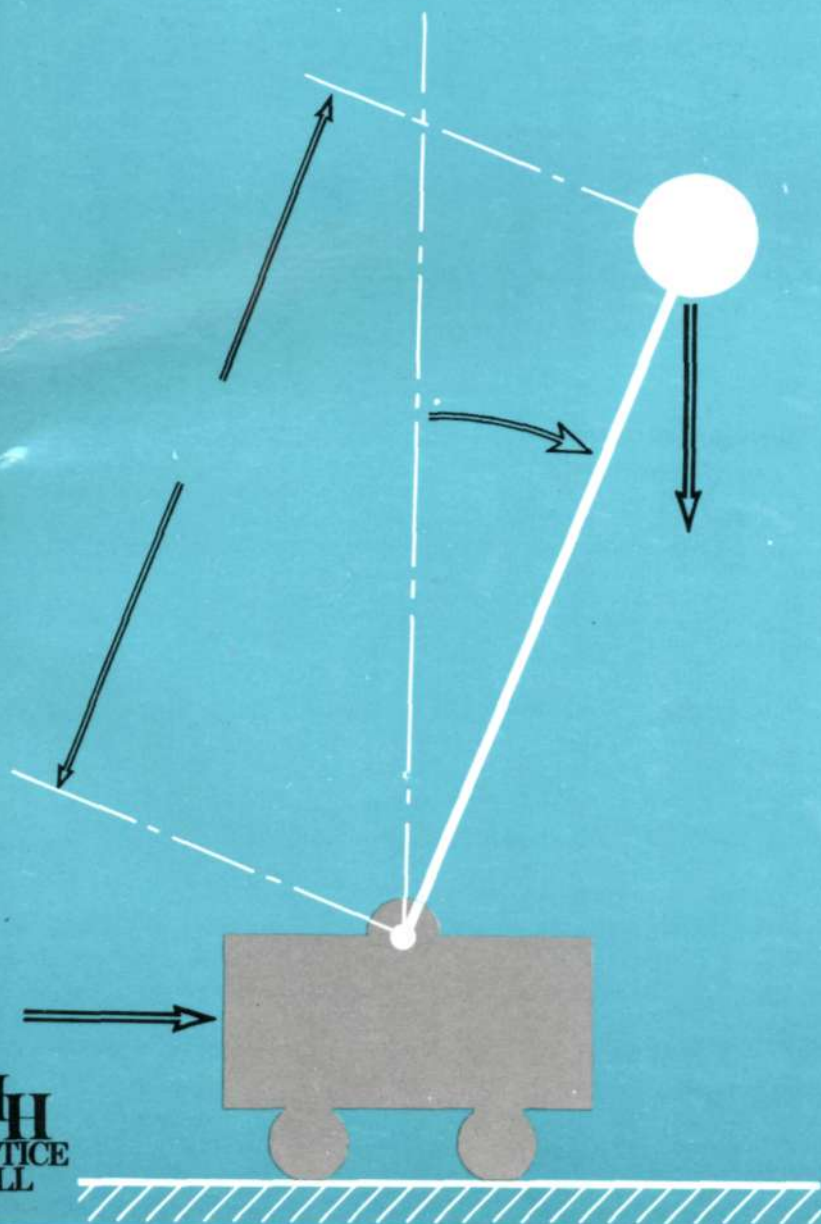


# DINAMICA DE SISTEMAS

KATSUHIKO OGATA



# **DINÁMICA DE SISTEMAS**



# DINÁMICA DE SISTEMAS

**KATSUHIKO OGATA**

*University of Minnesota*

**Traducción:**

Guillermo López Portillo Sánchez

Ingeniero Mecánico Electricista

Facultad de Ingeniería, UNAM

**Revisión Técnica:**

Francisco Rodríguez Ramírez

Ingeniero Mecánico Electricista, UNAM

Posgrado en el Instituto Tecnológico de Manchester

Coordinador de Dinámica de Sistemas Físicos,

Departamento de Control

Facultad de Ingeniería, UNAM

**PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.**

**México, Englewood Cliffs, Nueva Delhi, Wellington, Londres,**

**Río de Janeiro, Sidney, Singapur, Tokio, Toronto**

**EDICIÓN EN ESPAÑOL**

**EDITOR:**  
**SUPERVISOR DE**  
**TRADUCCIÓN Y CORRECCIÓN**  
**DE ESTILO:**  
**SUPERVISOR DE PRODUCCIÓN:**  
**DIRECTOR:**

José de Jesús Muñoz Zazueta

José C. Pecina Hernández  
Patricia Díaz Castañeda  
Raymundo Cruzado González

**DINÁMICA DE SISTEMAS**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método, sin autorización escrita del editor.

**DERECHOS RESERVADOS © 1987, respecto a la primera edición en español por PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.**

Enrique Jacob No. 20  
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de Méx.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524

**ISBN 968-880-074-0**

Traducido de la primera edición en inglés de  
**SYSTEM DYNAMICS**

Copyright © MCMLXXVIII, by Prentice Hall, Inc.

**ISBN 0-13-880385-4**

**IMPRESO EN MÉXICO / PRINTED IN MEXICO**



# CONTENIDO

## **PREFACIO** *ix*

## **1 INTRODUCCIÓN** *1*

- 1-1 Sistemas *1*
- 1-2 Elaboración de modelos *3*
- 1-3 Análisis y diseño de sistemas dinámicos *5*
- 1-4 Resumen *6*

## **2 SISTEMAS MECÁNICOS** *8*

- 2-1 Introducción *8*
- 2-2 Elaboración de modelos matemáticos *20*
- 2-3 Sistemas mecánicos con dos o más grados de libertad *35*
- 2-4 Sistemas mecánicos con fricción en seco *41*
- 2-5 Trabajo, energía y potencia *50*
- 2-6 Transformadores de movimiento, energía y potencia *61*
- Bibliografía *68*
- Ejemplos de problemas y soluciones *69*
- Problemas *96*

**3 SISTEMAS ELÉCTRICOS 105**

3-1 Introducción 105

3-2 Leyes básicas de los circuitos eléctricos 110

3-3 Elaboración de modelos matemáticos (modelado) y análisis de circuitos 118

3-4 Potencia y energía 129

3-5 Sistemas análogos 133

Bibliografía 137

Ejemplos de problemas y soluciones 137

Problemas 157

**4 SISTEMAS HIDRÁULICOS 164**

4-1 Introducción 164

4-2 Sistemas hidráulicos 166

4-3 Propiedades de los fluidos hidráulicos 181

4-4 Leyes básicas del flujo de fluidos 185

4-5 Elaboración de modelos matemáticos (modelado matemático) de sistemas hidráulicos 194

\*4-6 Linealización de sistemas no lineales 205

Bibliografía 210

Ejemplos de problemas y soluciones 210

Problemas 229

**5 SISTEMAS NEUMÁTICOS 235**

5-1 Introducción 235

5-2 Sistemas neumáticos 238

5-3 Propiedades físicas y termodinámicas de los gases 253

\*5-4 Flujo de gases a través de orificios 259

5-5 Elaboración de modelos matemáticos (modelado matemático) de sistemas neumáticos 269

\*5-6 Introducción a los dispositivos fluidicos 276

\*5-7 Fluidica digital y circuitos lógicos 284

Bibliografía 299

Ejemplos de problemas y soluciones 299

Problemas 313

**6 TRANSFORMADA DE LAPLACE 319**

- 6-1 Introducción 319
- 6-2 Números complejos, variables complejas y funciones complejas 320
- 6-3 Transformada de Laplace 326
- 6-4 Teoremas de la transformada de Laplace 329
- 6-5 Transformada inversa de Laplace 342
- 6-6 Solución a ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo 347
- Bibliografía 349
- Ejemplos de problemas y soluciones 350
- Problemas 359

**7 ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES 363**

- 7-1 Introducción 363
- 7-2 Análisis de la respuesta transitoria en sistemas de primer orden 365
- 7-3 Análisis de la respuesta transitoria en sistemas de segundo orden 371
- 7-4 Funciones de transferencia 389
- 7-5 Respuesta en frecuencia y funciones de transferencia senoidal 398
- \*7-6 Aislamiento de vibraciones 409
- 7-7 Computadoras analógicas 426
- Bibliografía 448
- Ejemplos de problemas y soluciones 449
- Problemas 482

**8 ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL 494**

- 8-1 Introducción 494
- 8-2 Diagramas de bloques 497
- 8-3 Controladores automáticos industriales 506
- 8-4 Análisis de la respuesta transitoria 528
- 8-5 Especificaciones de la respuesta transitoria 535
- 8-6 Mejoramiento en las características de la respuesta transitoria 544
- 8-7 Un problema de diseño 551
- Bibliografía 555
- Ejemplos de problemas y soluciones 556
- Problemas 576

## **APÉNDICES**

- A    Sistemas de unidades    584**
- B    Tablas de conversión    590**
- C    Ecuaciones de movimiento de Lagrange    596**

## **ÍNDICE    608**

## **PREFACIO**

Durante los años recientes, los cursos de dinámica de sistemas que tratan del modelado (elaboración de modelos matemáticos) y el análisis de la respuesta en dichos sistemas dinámicos se han convertido en requisitos de la mayoría de los programas en ingeniería. Este libro está destinado a tales cursos; presenta un tratamiento comprensible de la dinámica de los sistemas físicos en diversos medios y está escrito para el estudiante de ingeniería.

El esquema general del libro es el siguiente: el Capítulo 1 presenta una introducción general a los sistemas. El modelado y el análisis de los sistemas mecánicos se describen en el Capítulo 2. Los sistemas eléctricos se explican en el Capítulo 3; los Capítulos 4 y 5 tratan de los sistemas hidráulicos y neumáticos, respectivamente, e incluyen consideraciones acerca del proceso de linealización en el modelado de sistemas no lineales. El método de la transformada de Laplace para el análisis de sistemas lineales se da en el Capítulo 6 y el análisis de los sistemas lineales está descrito en el Capítulo 7. Finalmente, el Capítulo 8 presenta el análisis de los sistemas de control.

A lo largo de todo el libro, en puntos estratégicos, se presentan ejemplos escogidos cuidadosamente para que el lector tenga una mejor comprensión del tema en consideración. Además, excepto en el Capítulo 1, al final de cada capítulo se proporcionan problemas resueltos. Esos problemas, muchos de los cuales describen situaciones reales encontradas en la

práctica de la ingeniería, representan una parte integral del texto. Por lo tanto, se sugiere que el lector estudie cada uno de ellos con todo cuidado. Además, se incluyen muchos problemas no resueltos de diferentes grados de dificultad, para probar la capacidad del lector en la aplicación de la teoría expuesta.

Las cantidades físicas se introducen en unidades del SI (sistema métrico modernizado en unidades). Sin embargo, en algunos ejemplos y problemas, las cantidades físicas se introducen en unidades del SI y otro sistemas de unidades, de modo que el lector adquiera la capacidad de convertir con facilidad de un sistema a otro.

La mayor parte del material que aquí se presenta estuvo a prueba durante varios años en cursos de nivel superior de dinámica de los sistemas en el departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Minnesota.

Para que el instructor que utilice este libro en su clase pueda darle un uso adecuado, las secciones con mayor grado de dificultad (y los problemas resueltos y no resueltos correspondientes) están marcados con un asterisco, con el objeto de que los pueda incluir u omitir según los objetivos del curso.

Si este libro se emplea en cursos trimestrales, se puede cubrir la mayor parte del material de los capítulos 1 al 7 (con la posible excepción de las reacciones marcadas con asterisco). Después de estudiar esos siete capítulos, el lector debe ser capaz de formular modelos matemáticos de los sistemas físicos con una simplicidad razonable y podrá también determinar las respuestas transitoria y de frecuencia de tales sistemas. En cursos semestrales, se puede cubrir el libro entero.

En conclusión, quiero expresar mi reconocimiento a mis exalumnos quienes resolvieron muchos de los problemas incluidos en este libro, a los revisores anónimos que hicieron comentarios constructivos y a todos aquellos quienes, de una u otra manera, ayudaron a su terminación.

K. OGATA

# **DINÁMICA DE SISTEMAS**

# 1

## INTRODUCCIÓN

### 1-1 SISTEMAS

**Sistemas.** Un *sistema* es una combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo específico. Una *componente* es una unidad particular en su función en un sistema. De ninguna manera limitado a los sistemas físicos, el concepto de sistema se puede ampliar a fenómenos dinámicos abstractos, tales como los que se encuentran en la economía, el transporte, el crecimiento de la población y la biología.

Un sistema se llama *dinámico* si su salida en el presente depende de una entrada en el pasado; si su salida en curso depende solamente de la entrada en curso, el sistema se conoce como *estático*. La salida de un sistema estático permanece constante si la entrada no cambia y cambia sólo cuando la entrada cambia. En un sistema dinámico la salida cambia con el tiempo cuando no está en su estado de equilibrio. En este libro sólo nos ocuparemos de sistemas dinámicos.

**Modelos matemáticos.** Cualquier tentativa de diseño de un sistema debe empezar a partir de una predicción de su funcionamiento antes de que el sistema pueda diseñarse en detalle o construirse físicamente. Tal predicción se basa en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema. A esta descripción matemática se le llama *modelo matemático*. Para



los sistemas físicos, la mayoría de los modelos matemáticos que resultan útiles se describen en términos de ecuaciones diferenciales.

La dinámica de sistemas trata del modelado matemático y el análisis de la respuesta de los sistemas dinámicos. Hoy en día, el diseño de ingeniería requiere de un concienzudo estudio de esa materia.

**Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.** Las ecuaciones diferenciales lineales pueden clasificarse en ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo y ecuaciones lineales variantes en el tiempo.

Una *ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo* es aquella en la cual una variable dependiente y sus derivadas aparecen como combinaciones lineales. El siguiente es un ejemplo de esta clase de ecuación.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

Puesto que los coeficientes de todos los términos son constantes, una ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo también se denomina *ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes*.

En el caso de una *ecuación diferencial lineal variante en el tiempo*, la variable dependiente y sus derivadas aparecen como combinaciones lineales, pero algunos de los coeficientes de los términos pueden involucrar a la variable independiente. El siguiente es un ejemplo de este tipo de ecuación diferencial.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 - \cos 2t)x = 0$$

Es importante recordar que con objeto de que sea lineal, la ecuación no debe contener potencias, productos u otras funciones de las variables dependientes y sus derivadas.

Una ecuación diferencial se denomina *no lineal* cuando no es lineal. Entre los ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales se incluyen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + x^3 = \sin \omega t$$

**Sistemas lineales y sistemas no lineales.** Para sistemas lineales, las ecuaciones que constituyen el modelo son lineales. En este libro trataremos con sistemas lineales que puedan representarse por ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales e invariantes en el tiempo.

La propiedad más importante de los sistemas lineales consiste en que se les puede aplicar el *principio de superposición*. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de exci-

tación diferentes o entradas, es la suma de dos respuestas individuales. En consecuencia, en los sistemas lineales la respuesta a varias entradas puede calcularse tratando una entrada cada vez y después sumando los resultados. Como resultado del principio de superposición, las complicadas soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales se pueden obtener de la suma de soluciones simples.

En una investigación experimental de un sistema dinámico, si la causa y el efecto son proporcionales, eso implica que el principio de superposición se mantiene y se concluye que el sistema se puede considerar lineal.

Los sistemas no lineales, por supuesto, son aquellos que se representan mediante ecuaciones no lineales.

Aunque las relaciones físicas con frecuencia se representan mediante ecuaciones lineales, en muchos casos las relaciones reales puede que no sean del todo lineales. De hecho, un estudio cuidadoso de los sistemas físicos revela que los llamados sistemas lineales son realmente lineales dentro del rango de operación limitado. Por ejemplo, muchos de los sistemas hidráulicos y neumáticos involucran relaciones no lineales entre sus variables.

En los sistemas no lineales, la característica más importante es que el principio de superposición no es aplicable. En general, los procedimientos para encontrar la solución de problemas que involucran tales sistemas son extremadamente complicados. A causa de la dificultad matemática que representan los sistemas no lineales, con frecuencia es necesario linealizarlos alrededor de una condición de operación. Una vez que un sistema no lineal se aproxima mediante un modelo matemático lineal, se deben usar términos lineales para propósitos de análisis y diseño.

## 1-2 ELABORACIÓN DE MODELOS (MODELADO)

**Elaboración de modelos matemáticos (modelado matemático).** Al aplicar las leyes físicas a un sistema específico, es posible desarrollar un modelo matemático que describa al sistema. Tal sistema puede incluir parámetros desconocidos, los cuales deben evaluarse mediante pruebas reales. Sin embargo, algunas veces las leyes físicas que gobiernan el comportamiento de un sistema no están completamente definidas, y la formulación de un modelo matemático puede resultar imposible. De ser así, se puede utilizar un procedimiento de modelado experimental. En este procedimiento, se somete al sistema a un conjunto de entradas conocidas y se miden sus salidas. A partir de las relaciones de entrada y salida se deriva entonces el modelo matemático.

**Simplicidad contra exactitud.** Cuando se intenta construir un modelo, debe establecerse un equilibrio entre la simplicidad del modelo y la exactitud de los resultados del análisis. Es importante notar que los resultados obtenidos

en el análisis son válidos en la medida en que el modelo se aproxime al sistema físico dado.

La rapidez con la cual una computadora digital puede realizar operaciones aritméticas nos permite incluir cientos de ecuaciones para describir un sistema y para construir un modelo exacto, pero muy complicado. Si no se requiere de una exactitud extrema, es preferible desarrollar un modelo razonablemente simplificado.

Para determinar un modelo razonablemente simplificado, se necesita decidir cuáles de las variables y relaciones físicas pueden despreciarse y cuáles son cruciales en la exactitud del modelo. Con objeto de obtener un modelo en la forma de ecuaciones diferenciales lineales, se deben despreciar cualesquiera parámetros distribuidos y las no linealidades que pueden estar presentes en el sistema físico. Si los efectos que estas propiedades ignoradas tienen en la respuesta son pequeños, entonces los resultados del análisis del modelo matemático y los resultados del estudio experimental del sistema físico serán satisfactorios. El que cualquiera de las características particulares sea importante puede no ser obvio en algunos casos, y en otros, puede requerir de penetración física e intuición. En relación con lo mencionado, la experiencia es un factor importante.

Cuando se resuelve un problema nuevo, usualmente conviene construir primero un modelo simplificado para obtener una idea general en torno a la solución. Posteriormente puede construirse un modelo matemático más detallado y usarlo para un análisis más completo.

**Observaciones sobre la elaboración de modelos matemáticos (modelado matemático).** Ningún modelo matemático puede representar cualquier componente o sistema físicos con precisión. Siempre se involucran aproximaciones y suposiciones. Tales aproximaciones y suposiciones restringen el nivel de validez del modelo matemático. (El grado de aproximación puede determinarse solamente mediante experimentos). Así pues, al hacer una predicción acerca del funcionamiento del sistema, debe tenerse presente cualquier aproximación o suposición involucrada en el modelo.

**Procedimiento para la elaboración de modelos matemáticos (modelado matemático).** El procedimiento para obtener un modelo matemático de un sistema puede resumirse como sigue.

1. Dibujar un diagrama esquemático del sistema y definir las variables.
2. Utilizando leyes físicas, escribir ecuaciones para cada componente, combinándolos de acuerdo con el diagrama del sistema y obtener un modelo matemático.
3. Para verificar la validez del modelo, la predicción acerca del funcionamiento obtenida al resolver las ecuaciones del modelo, se com-

para con resultados experimentales. (La pregunta sobre la validez de cualquier modelo matemático puede contestarse solamente mediante experimento.) Si los resultados experimentales se alejan de la predicción en forma considerable, debe modificarse el modelo. Entonces se obtiene un nuevo modelo y las nuevas predicciones se comparan con los resultados experimentales. El proceso se repite hasta que se obtiene una concordancia satisfactoria entre la predicción y los resultados experimentales.

### 1-3 ANÁLISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DINÁMICOS

Esta sección explica brevemente lo referente al análisis y diseño de los sistemas dinámicos.

**Análisis.** *El análisis de sistemas* constituye, en condiciones especificadas, la investigación del funcionamiento de un sistema cuyo modelo matemático se conoce.

El primer paso al analizar un sistema dinámico consiste en obtener su modelo matemático. Puesto que cualquier sistema está formado por componentes, el análisis debe iniciarse obteniendo un modelo matemático de cada componente y combinando esos modelos con el objeto de construir un modelo del sistema completo. Una vez obtenido el modelo final, se puede formular el análisis de tal manera que los parámetros del sistema en el modelo se hacen variar para producir varias soluciones. Entonces, el ingeniero compara estas soluciones e interpreta y aplica los resultados de su análisis a su tarea básica.

Siempre debe tenerse presente que la obtención de un modelo razonable del sistema completo constituye la parte básica de todo el análisis. Una vez que se dispone de tal modelo, pueden usarse para el análisis diferentes técnicas analíticas y por computadora. La manera en que el análisis se lleva a cabo es independiente del tipo de sistema físico que se trate: mecánico, eléctrico, hidráulico, etcétera.

**Diseño.** *El diseño de sistemas* se refiere al proceso de encontrar un sistema que satisfaga una tarea específica. En general, el procedimiento de diseño no es directo y requiere de ensayo y error.

**Síntesis.** Por síntesis se entiende el uso de un procedimiento explícito para encontrar un sistema que funcione de manera especificada. Aquí, las características deseadas del sistema se postulan al principio y después se usan diferentes técnicas matemáticas para sintetizar un sistema que tenga esas características. En general, tal procedimiento es completamente matemático desde el principio hasta el fin del proceso de diseño.

**Enfoque básico del diseño de sistemas.** El enfoque básico en el diseño de cualquier sistema dinámico necesariamente incluye procedimientos por tanteo. Teóricamente es posible la síntesis de sistemas lineales y el ingeniero puede determinar sistemáticamente las componentes necesarias para alcanzar el objetivo dado. En la práctica, sin embargo, el sistema puede estar sujeto a muchas restricciones o puede ser no lineal; en tales casos, no se dispone en el presente de métodos de síntesis. Más aún, las características de las componentes pueden no ser conocidas con precisión. Casi siempre se necesita de las técnicas de tanteo.

**Procedimientos de diseño.** Con frecuencia, el diseño de un sistema ocurre como sigue. El ingeniero comienza el procedimiento de diseño a partir de las especificaciones que deben satisfacerse y la dinámica de las componentes, las cuales incluyen los parámetros de diseño. Puede ser que las especificaciones estén dadas en términos de valores numéricos precisos acompañados de vagas descripciones cualitativas. (Las especificaciones en ingeniería normalmente incluyen declaraciones sobre factores tales como el costo, la confiabilidad, el espacio, el peso y la factibilidad de mantenimiento.) Es importante notar que pueden cambiarse las especificaciones a medida que el diseño progresa, porque el análisis detallado puede revelar que es imposible satisfacer ciertos requerimientos. A continuación, el ingeniero aplicará las técnicas de síntesis cuando estén disponibles, así como otros métodos, para construir un modelo matemático del sistema.

Una vez que el problema de diseño se ha formulado en términos de este modelo, el ingeniero lleva a cabo un diseño matemático que produce una solución a la versión matemática del problema de diseño. Con el diseño matemático terminado, el ingeniero simula el modelo en una computadora con el objeto de probar el efecto de diferentes entradas y perturbaciones en el comportamiento del sistema resultante. Si la configuración inicial del sistema no es satisfactoria, el sistema debe rediseñarse y llevarse a cabo el análisis correspondiente. Este proceso de diseño y análisis se repite hasta encontrar un sistema satisfactorio. Entonces se puede construir un sistema físico prototipo.

Nótese que este proceso de construcción de un prototipo es el inverso de la elaboración de modelos matemáticos. El prototipo es un sistema físico que representa al modelo matemático con exactitud razonable. Una vez construido el prototipo, el ingeniero lo prueba para ver qué tan satisfactorio resulta. Si se satisface, el diseño quedó terminado. Si no, debe modificarse el prototipo y debe probarse de nuevo. Este proceso continúa hasta que se obtiene un prototipo satisfactorio.

## 1-4 RESUMEN

Desde el punto de vista del análisis, un ingeniero que ha destacado profesionalmente debe ser capaz de obtener un modelo matemático de un sistema

dado y predecir su funcionamiento. (La validez de la predicción depende en gran medida de la validez del modelo matemático utilizado para hacer dicha predicción.) Y desde el punto de vista del diseño, él debe ser capaz de llevar a cabo un cuidadoso análisis del funcionamiento antes de que se construya el prototipo.

El objetivo de este libro es capacitar al lector: a) para obtener modelos matemáticos que representen con mucha aproximación los comportamientos de los sistemas físicos y b) para obtener respuestas del sistema a diferentes entradas determinísticas de tal manera que pueda analizar y diseñar sistemas dinámicos. (Las entradas determinísticas, en contraste con las probabilísticas, son las que se especifican por completo en función del tiempo. En cambio, las entradas probabilísticas dependen de variables aleatorias impredecibles.)

**Esquema del texto.** El Capítulo 1 presenta una introducción a la dinámica de los sistemas. Los capítulos del 2 al 5 se ocupan principalmente del problema de la elaboración de modelos matemáticos (modelado matemático.) Básicamente, se formula un modelo de sistema mediante la aplicación de leyes físicas a las componentes y se toma en cuenta la manera en que están conectadas. Específicamente, el Capítulo 2 trata de los sistemas mecánicos y el Capítulo 3 de los sistemas eléctricos. Los capítulos 4 y 5 están relacionados con componentes y sistemas hidráulicos y neumáticos, respectivamente. Estos dos capítulos incluyen técnicas de linealización para sistemas no lineales. Al linealizar un sistema no lineal, limitamos las desviaciones de las variables a valores pequeños y obtenemos un modelo matemático lineal. Aunque resulta exacto solamente para valores pequeños de las variables, un modelo como éste tiene gran valor práctico porque muchos sistemas no lineales se diseñan para mantenerse tan cercanos como sea posible a ciertas condiciones de operación o estados de equilibrio.

El Capítulo 6 describe el método de la transformada de Laplace, el cual es útil para analizar sistemas lineales invariantes en el tiempo. Luego, el Capítulo 7 explica el análisis de la respuesta en fenómenos transitorios en frecuencia; este capítulo cubre el enfoque según la transformada de Laplace del análisis de la respuesta transitoria, las funciones de transferencia, el análisis de respuesta en frecuencia con aplicaciones a la solución de problemas de aislamiento de la vibración y computadoras analógicas. Finalmente, el Capítulo 8 incluye material introductorio sobre análisis de sistemas de control. Se incluyen explicaciones sobre controladores automáticos, técnicas estándar para obtener diferentes acciones de control mediante el uso de componentes neumáticas, hidráulicas y electrónicas, análisis de la respuesta transitoria de sistemas de control y un problema de diseño.

# 2

## SISTEMAS MECÁNICOS

### 2-1 INTRODUCCIÓN

La elaboración de modelos matemáticos (modelado matemático) y el análisis de la respuesta de los sistemas mecánicos constituyen los temas de este capítulo. En la Sec. 2-1, donde comenzamos con una breve descripción de los sistemas de unidades seguida por una explicación de conceptos como la masa, la fuerza y las leyes de Newton, los cuales son parte normal de los cursos de física para universitarios. En la Sec. 2-2 se describe la elaboración de modelos matemáticos de sistemas mecánicos y vibraciones libres en sistemas mecánicos simples. La Sec. 2-3 trata de las vibraciones libres de sistemas con dos o más grados de libertad y la Sec. 2-4 describe sistemas mecánicos con fricción en seco. El concepto de fricción estática y en deslizamiento se explica al principio, seguido por un análisis de los movimientos de deslizamiento y rodamiento de los sistemas. Finalmente se introduce el principio de d'Alembert. La Sec. 2-5 contiene conceptos de trabajo, energía y potencia. Esta sección concluye con un método de energía para obtener las ecuaciones de movimiento de los sistemas. La Sec. 2-6 última del capítulo trata de los transformadores de movimiento, energía y potencia y ofrece y analiza transformadores de movimientos, energía y potencia.

**Sistemas de unidades.** Es obvia la necesidad de alcanzar un conocimiento claro de los diferentes sistemas de unidades para el estudio cuantitativo de la dinámica de los sistemas. En el pasado, la mayoría de los cálculos

de ingeniería en Estados Unidos de América se basaban en el Sistema Inglés de Medidas de Ingeniería (BES). Sin embargo, de hoy en adelante, los cálculos se harán con el Sistema Internacional (abreviado SI) de unidades.

El *Sistema Internacional de unidades* es un sistema métrico modificado y como tal difiere de los sistemas convencionales métrico absoluto o métrico gravitacional. La Tabla 2-1 enlista el Sistema Internacional, los sistemas métricos convencionales y los sistemas ingleses de unidades. (Esta tabla presenta solamente aquellas unidades necesarias para describir el comportamiento de los sistemas mecánicos. (En el Apéndice A se encuentran detalles adicionales de los sistemas de unidades.)

**Tabla 2-1. SISTEMAS DE UNIDADES**

Sistemas de unidades Cantidad	Sistemas absolutos				Sistemas gravitacionales	
	Métrico			Inglés	Métrico de ingeniería	Inglés de ingeniería
	SI	mks	cgs			
Longitud	m	m	cm	ft	m	ft
Masa	kg	kg	g	lb	$\frac{\text{kg}_f \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$	$\frac{\text{slug}}{\text{lb}_f \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{ft}}{\text{ft}}$
Tiempo	s	s	s	s	s	s
Fuerza	$\frac{\text{N}}{= \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}$	$\frac{\text{N}}{= \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}$	$\frac{\text{dyn}}{= \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}}$	$\frac{\text{poundal}}{= \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}}$	$\text{kg}_f$	$\text{lb}_f$
Energía	$\frac{\text{J}}{= \text{N} \cdot \text{m}}$	$\frac{\text{J}}{= \text{N} \cdot \text{m}}$	$\frac{\text{erg}}{= \text{dyn} \cdot \text{cm}}$	ft-poundal	$\text{kg}_f \cdot \text{m}$	$\frac{\text{ft} \cdot \text{lb}_f}{\text{or Btu}}$
Potencia	$\frac{\text{W}}{= \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}}$	$\frac{\text{W}}{= \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}}$	$\frac{\text{dyn} \cdot \text{cm}}{\text{s}}$	$\frac{\text{ft} \cdot \text{poundal}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{s}}$	$\frac{\text{ft} \cdot \text{lb}_f}{\text{s}} \text{ or hp}$

La diferencia principal entre los sistemas “absolutos” de unidades y los sistemas “gravitacionales” de unidades consiste en optar por la masa o a fuerza como dimensión primaria. En los sistemas absolutos (SI, y el métrico y el inglés absolutos) se escoge a la masa como dimensión primaria y la fuerza es una cantidad derivada. Inversamente, en los sistemas gravitacionales (métrico de ingeniería e inglés de ingeniería) de unidades la fuerza es una dimensión primaria y la masa es una cantidad derivada. Por otra parte, en este último sistema la masa de un cuerpo se define como la relación entre la magnitud de la fuerza aplicada al cuerpo y la aceleración de la gravedad. (Así, la dimensión de la masa es fuerza/aceleración.)



En este libro se ha hecho un esfuerzo especial para familiarizar al lector con los diferentes sistemas de medición. En los ejemplos y problemas, como muestra, los cálculos están hechos con unidades del SI, unidades métricas convencionales, y unidades BES con el objeto de ilustrar la forma de convertir de un sistema a otro. La Tabla 2-2 muestra algunos factores de conversión convenientes entre diferentes sistemas de unidades. (En el Apéndice B se dan otras tablas de conversión detalladas.)

**Abreviaturas.** Las abreviaturas de las unidades SI se escriben con letras minúsculas, tales como m para metro y kg para kilogramo. Las abreviaturas de unidades nombradas en honor de una persona, usualmente se inician con mayúsculas: W para watt, N para newton, por ejemplo. Las unidades comúnmente usadas y sus abreviaturas se listan a continuación:

ampere	A	newton	N
candela	cd	ohm	$\Omega$
coulomb	C	pascal	Pa
farad	F	radián	rad
henry	H	segundo	s
hertz	Hz	esterradián	sr
joule	J	tesla	T
kelvin	K	volt	V
kilogramo	kg	watt	W
metro	m	weber	Wb

Los múltiplos y submúltiplos en potencias de 10 se indican mediante prefijos abreviados como sigue:

	<i>Prefijo</i>	<i>Prefijo abreviado</i>
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecto	h
10	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a

**Tabla 2-2. TABLA DE CONVERSIÓN**

Longitud	1	1 m = 100 cm	
	2	1 ft = 12 in.	1 in. = 2.54 cm
	3	1 m = 3.281 ft	1 ft = 0.3048 m
Masa	4	1 kg = 2.2046 lb	1 lb = 0.4536 kg
	5	1 kg = 0.10197 kg <sub>f</sub> -s <sup>2</sup> /m	1 kg <sub>f</sub> -s <sup>2</sup> /m = 9.807 kg
	6	1 slug = 14.594 kg	1 kg = 0.06852 slug
	7	1 slug = 32.174 lb	1 lb = 0.03108 slug
	8	1 slug = 1.488 kg <sub>f</sub> -s <sup>2</sup> /m	1 kg <sub>f</sub> -s <sup>2</sup> /m = 0.6720 slug
Momento de inercia	9	1 slug-ft <sup>2</sup> = 1.356 kg-m <sup>2</sup>	1 kg-m <sup>2</sup> = 0.7376 slug-ft <sup>2</sup>
	10	1 slug-ft <sup>2</sup> = 0.1383 kg <sub>f</sub> -s <sup>2</sup> -m	1 kg <sub>f</sub> -s <sup>2</sup> -m = 7.233 slug-ft <sup>2</sup>
	11	1 slug-ft <sup>2</sup> = 32.174 lb-ft <sup>2</sup>	1 lb-ft <sup>2</sup> = 0.03108 slug-ft <sup>2</sup>
Fuerza	12	1 N = 10 <sup>5</sup> dyn	
	13	1 N = 0.10197 kg <sub>f</sub>	1 kg <sub>f</sub> = 9.807 N
	14	1 N = 7.233 poundals	1 poundal = 0.1383 N
	15	1 N = 0.2248 lb <sub>f</sub>	1 lb <sub>f</sub> = 4.4482 N
	16	1 kg <sub>f</sub> = 2.2046 lb <sub>f</sub>	1 lb <sub>f</sub> = 0.4536 kg <sub>f</sub>
	17	1 lb <sub>f</sub> = 32.174 poundals	1 poundal = 0.03108 lb <sub>f</sub>
Energía	18	1 N-m = 1 J = 1 W-s	1 J = 0.10197 kg <sub>f</sub> -m
	19	1 dyn-cm = 1 erg = 10 <sup>-7</sup> J	1 kg <sub>f</sub> -m = 9.807 N-m
	20	1 N-m = 0.7376 ft-lb <sub>f</sub>	1 ft-lb <sub>f</sub> = 1.3557 N-m
	21	1 J = 2.389 × 10 <sup>-4</sup> kcal	1 kcal = 4186 J
	22	1 Btu = 778 ft-lb <sub>f</sub>	1 ft-lb <sub>f</sub> = 1.285 × 10 <sup>-3</sup> Btu
Potencia	23	1 W = 1 J/s	
	24	1 hp = 550 ft-lb <sub>f</sub> /s	1 ft-lb <sub>f</sub> /s = 1.818 × 10 <sup>-3</sup> hp
	25	1 hp = 745.7 W	1 W = 1.341 × 10 <sup>-3</sup> hp

**Masa.** La *masa* de un cuerpo es la cantidad de materia que contiene, la cual se supone constante. Físicamente, la masa es la propiedad de un cuerpo que da su inercia; esto es, la resistencia a arrancar y parar. Un cuerpo es atraído por la Tierra y la magnitud de la fuerza que la Tierra ejerce sobre él se llama *peso*.

En situaciones prácticas, conocemos el peso  $w$  de un cuerpo, pero no la masa  $m$ . Calculamos la masa  $m$  mediante:

$$m = \frac{w}{g}$$

donde  $g$  es la constante de aceleración gravitacional. El valor de  $g$  varía ligeramente de punto a punto sobre la superficie de la Tierra. Como resultado, el peso de un cuerpo varía ligeramente en diferentes puntos sobre la superficie de la Tierra, pero su masa permanece constante. Para propósitos de ingeniería, se toma  $g$  como

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 981 \text{ cm/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2 = 386 \text{ in/s}^2$$

En el espacio exterior un cuerpo se considera desprovisto de peso. Su masa aún permanece y, por lo tanto, el cuerpo posee inercia.

Las unidades de masa son kg, g, lb,  $\text{kg}_f\text{-s}^2/\text{m}$  y slug, como se muestra en la Tabla 2-1. Si la masa se expresa en unidades de kg (o de libra), podemos llamarlo kilogramo masa (o libra masa) para distinguirlo de la unidad de fuerza, la cual se denomina kilogramo fuerza (o libra fuerza). En este libro se usa kg para denominar un kilogramo masa y  $\text{kg}_f$  un kilogramo fuerza. Similarmente, lb denota una libra masa y  $\text{lb}_f$  una libra fuerza.

Un slug es una unidad de masa tal que, al aplicarle una fuerza de 1-libra, una masa de 1-slug se acelera  $1 \text{ ft/s}^2$  ( $\text{slug} = \text{lb}_f\text{-s}^2/\text{ft}$ ). En otras palabras, si a una masa de 1 slug se le aplica una fuerza de 32.2 libras fuerza, se acelera a  $32.2 \text{ ft/s}^2$  ( $= g$ ). Así pues, la masa de un cuerpo que pesa 32.2  $\text{lb}_f$  en la superficie de la Tierra es de 1 slug o

$$m = \frac{w}{g} = \frac{32.2 \text{ lb}_f}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ slug}$$

**Fuerza.** La *fuerza* puede definirse como la causa que tiende a producir un cambio en el movimiento de un cuerpo sobre el que actúa. Con objeto de mover un cuerpo debe aplicársele una fuerza. Hay dos tipos de fuerza capaces de actuar sobre un cuerpo: fuerzas *de contacto* y fuerzas *de campo*. Las fuerzas de contacto son aquellas que se establecen en contacto directo con el cuerpo, en tanto que las fuerzas de campo, tales como la fuerza gravitacional y la fuerza magnética, actúan sobre el cuerpo, pero no se ponen en contacto con él.

Las unidades de fuerza son el newton (N), la dina (dyn), el poundal, el  $\text{kg}_f$  y la  $\text{lb}_f$ . En unidades del SI y el sistema mks (un sistema absoluto métri-

co) de unidades la unidad de fuerza es el newton. El newton es la fuerza que dara a 1-kilogramo masa una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  o

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg-m/s}^2$$

Esto significa que 9.81 newtons darán a un kilogramo masa una aceleración de  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Puesto que la aceleración gravitacional es  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  (como se estableció anteriormente, para cálculos de ingeniería, el valor de  $g$  puede tomarse como  $9.81 \text{ m/s}^2$  o  $32.2 \text{ ft/s}^2$ ), una masa de 1 kilogramo producirá una fuerza sobre su apoyo de 9.81 newtons.

La unidad de fuerza en el sistema cgs (un sistema absoluto métrico) es la dina, la cual da a un gramo masa una aceleración de  $1 \text{ cm/s}^2$  o

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ g-cm/s}^2$$

En el sistema absoluto inglés de unidades la libra es la unidad de masa y el poundal es la unidad de fuerza. Un poundal es la fuerza que dará una libra masa una aceleración de  $1 \text{ ft/s}^2$  o

$$1 \text{ poundal} = 1 \text{ lb-ft/s}^2$$

Así pues, una fuerza de 32.2-poundals dará a una masa de una libra una aceleración de  $32.2 \text{ ft/s}^2$ . En consecuencia, una masa de una libra producirá una fuerza sobre su apoyo de 32.2 poundals.

La unidad de fuerza en el sistema métrico de ingeniería (gravitacional) es el  $\text{kg}_f$ , el cual es una dimensión primaria del sistema. Similarmente, en el sistema inglés de ingeniería la unidad de fuerza es la  $\text{lb}_f$ , que también es una dimensión primaria en este sistema de unidades.

**Comentario.** Las unidades del SI de fuerza, masa y longitud son el newton (N), el kilogramo masa (kg) y el metro (m). Las unidades mks de fuerza, masa y longitud son las mismas unidades del SI. Similarmente, las unidades cgs de fuerza, masa y longitud son la dina (dyn), el gramo (g) y el centímetro (cm) y las correspondientes unidades BES son la libra fuerza ( $\text{lb}_f$ ), el slug y el pie (ft). Cada uno de los sistemas de unidades es consistente con el hecho de que la unidad de fuerza acelera a la unidad de masa 1 unidad de longitud por segundo por segundo.

**Par o momento de fuerza.** El *par o momento de fuerza*, se define como cualquier causa que tienda a producir un cambio en el movimiento rotacional de un cuerpo sobre el cual actúa. El par es el producto de una fuerza y la distancia perpendicular desde un punto de rotación a la línea de acción de la fuerza. Las unidades del par son unidades de fuerza por longitud, tales como N-m, dyn-cm y  $\text{lb}_f\text{-ft}$ .

**Cuerpo rígido.** Cuando se acelera un cuerpo real, se tienen presente siempre deflexiones elásticas internas. Si estas deflexiones internas son despreciables por su relativa pequeñez respecto al movimiento total del

cuerpo entero, el cuerpo se denomina *cuerpo rígido*. Así pues, un cuerpo rígido no se deforma. En otras palabras, en un movimiento traslacional puro, cada punto del cuerpo rígido tiene idéntico movimiento.

**Momento de inercia.** El *momento de inercia*  $J$  de un cuerpo rígido alrededor de un eje se define como:

$$J = \int r^2 dm$$

donde  $dm$  es un elemento de masa,  $r$  la distancia del eje a  $dm$  y la integración se efectúa sobre el cuerpo. Al considerar momentos de inercia, suponemos que el cuerpo en rotación es perfectamente rígido. Físicamente, el momento de inercia de un cuerpo es una medida de su resistencia a la aceleración angular.

Considérese un sistema coordenado rectangular ( $xyz$ ) en un cuerpo. El momento de inercia de un cuerpo respecto al eje  $x$  es:

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

De igual forma, los correspondientes alrededor de los ejes  $y$  y  $z$  son

$$J_y = \int (z^2 + x^2) dm$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

Si el espesor (en la dirección de  $z$ ) de un cuerpo plano tal como un disco, es despreciable comparada con las dimensiones  $x$  o  $y$ , entonces

$$J_x = \int y^2 dm$$

$$J_y = \int x^2 dm$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = J_x + J_y$$

La tabla 2-3 da los momentos de inercia de formas comunes.

**Ejemplo 2-1.** La figura 2-1 muestra un cilindro homogéneo de radio  $R$  y longitud  $L$ . El momento de inercia de este cilindro alrededor del eje  $AA'$  puede obtenerse como sigue

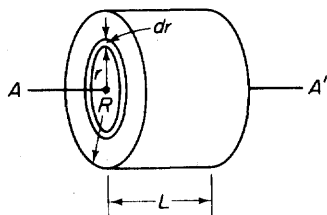
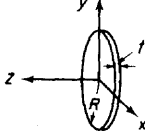
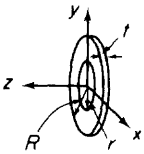
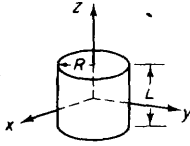
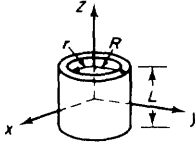
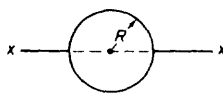
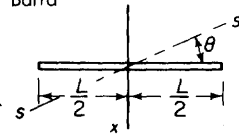


Fig. 2-1. Cilindro homogéneo.

Tabla 2-3. MOMENTOS DE INERCIA

	$t \ll R$ $M = \text{masa}$ $J_x = J_y = M \frac{R^2}{4}, \quad J_z = J_x + J_y = M \frac{R^2}{2}$
	$t \ll R$ $M = \text{masa}$ $J_x = J_y = M \frac{R^2 + r^2}{4}, \quad J_z = M \frac{R^2 + r^2}{2}$
	$M = \text{masa}$ $J_x = J_y = M \frac{3R^2 + L^2}{12}, \quad J_z = M \frac{R^2}{2}$
	$M = \text{masa}$ $J_x = J_y = M \frac{R^2 + r^2 + \frac{1}{3}L^2}{4}, \quad J_z = M \frac{R^2 + r^2}{2}$
<p>Esfera</p> 	$M = \text{masa} \quad \rho = \text{densidad}$ $J_{xx} = M \frac{2}{5} R^2 \quad (M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho)$
<p>Barra</p> 	$M = \text{masa}$ $J_{xx} = M \frac{L^2}{12}, \quad J_{ss} = M \frac{(L \sin \theta)^2}{12}$

Considérese un elemento de masa en forma de anillo de espesor infinitesimal  $dr$  y radio  $r$ . La masa de este elemento anular es  $2\pi r L \rho$  donde  $\rho$  es la densidad de este cilindro. Así pues,

$$dm = 2\pi r L \rho \, dr$$

En consecuencia,

$$J = \int_0^R r^2 2\pi r L \rho \, dr = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 \, dr = \frac{\pi L \rho R^4}{2}$$

Puesto que la masa entera  $m$  del cuerpo del cilindro es  $m = \pi R^2 L \rho$ , se obtiene

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

**Radio de giro.** El *radio de giro* de un cuerpo rígido con respecto a un eje es una longitud  $k$ , la cual, cuando se eleva al cuadrado se multiplica por la masa  $m$  del mismo es igual al momento de inercia  $J$  del cuerpo con respecto al mismo eje de inercia, o bien

$$m k^2 = J$$

Por lo tanto,

$$k = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

Físicamente, si fuera posible concentrar toda la masa del cuerpo rígido en un punto a una distancia  $k$  del eje en cuestión, de modo que  $m k^2$  sea igual al momento de inercia  $J$  del cuerpo con respecto a ese eje, entonces la distancia  $k$  sería el radio de giro.

**Ejemplo 2-2.** Supóngase que un cuerpo rígido con 161 lb<sub>f</sub> de peso tiene un momento de inercia con respecto a un eje particular de 125 slug-ft<sup>2</sup>. ¿Cuál es el radio de giro con respecto a dicho eje?

La masa del cuerpo rígido es

$$m = \frac{w}{g} = \frac{161}{32.2} = 5 \text{ slugs}$$

El radio de giro  $k$  es

$$k = \sqrt{\frac{J}{m}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = 5 \text{ ft}$$

En este ejemplo usamos unidades del sistema inglés de ingeniería. Como ejercicio, interpretemos este problema en términos de otros sistemas de unidades.

### 1. Unidades SI o unidades mks (consulte las tablas 2-1 y 2-2).

Un cuerpo rígido pesa

$$w = 161 \text{ lb}_f = 161 \times 4.448 \text{ N} = 716 \text{ N} = 716 \text{ kg-m/s}^2$$

Para obtener la masa  $m$  dividimos este valor de  $w$  entre  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

$$m = \frac{w}{g} = \frac{716 \text{ kg-m/s}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} = 73.0 \text{ kg}$$

El momento de inercia  $J$  resulta

$$J = 125 \text{ slug-ft}^2 = 125 \times 1.356 \text{ kg-m}^2 = 169.5 \text{ kg-m}^2$$

Por lo tanto, el radio de giro  $k$  es

$$k = \sqrt{\frac{J}{m}} = \sqrt{\frac{169.5}{73.0}} = 1.52 \text{ m}$$

## 2. Unidades métricas de ingeniería (gravitacional) (consulte las tablas 2-1 y 2-2).

Un cuerpo rígido pesa

$$w = 161 \text{ lb}_f = 161 \times 0.4536 \text{ kg}_f = 73.0 \text{ kg}_f$$

La masa  $m$  se obtiene como

$$m = \frac{w}{g} = \frac{73.0 \text{ kg}_f}{9.81 \text{ m/s}^2} = 7.44 \text{ kg}_f\text{-s}^2/\text{m}$$

Y también el momento de inercia  $J$  es

$$J = 125 \text{ slug-ft}^2 = 125 \times 0.1382 \text{ kg}_f\text{-s}^2\text{-m} = 17.28 \text{ kg}_f\text{-s}^2\text{-m}$$

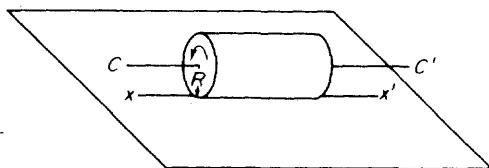
En consecuencia,

$$k = \sqrt{\frac{J}{m}} = \sqrt{\frac{17.28}{7.44}} = 1.52 \text{ m}$$

### Momento de inercia alrededor de un eje diferente del eje geométrico.

Algunas veces es necesario calcular el momento de inercia de un cuerpo rígido homogéneo alrededor de un eje diferente de su eje geométrico. Si los ejes son paralelos, este proceso se puede efectuar fácilmente. El momento de inercia alrededor de un eje que está a una distancia  $x$  del eje geométrico, que pasa a través del centro de gravedad, es la suma del momento de inercia alrededor del eje geométrico y el momento de inercia considerado concentrado en el centro de gravedad alrededor del nuevo eje.

**Ejemplo 2-3.** Considérese el sistema mostrado en la Fig. 2-2, donde el cilindro homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$  rueda sobre una superficie plana. Encuentre el momento de inercia  $J_x$  del cilindro alrededor de la línea de contacto (eje  $xx'$ ) con la superficie.



**Fig. 2-2.** Cilindro homogéneo rodando sobre una superficie plana.

El momento de inercia del cilindro alrededor del eje  $CC'$  es

$$J_C = \frac{1}{2} mR^2$$

El momento de inercia del cilindro alrededor del eje  $xx'$  cuando se considera a la masa  $m$  concentrada en el centro de gravedad es  $mR^2$ . Así pues el momento de inercia  $J_x$  del cilindro alrededor del eje  $xx'$  es

$$J_x = J_C + mR^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$



**Desplazamiento, velocidad y aceleración.** El *desplazamiento*  $x$  es un cambio en la posición desde un punto a otro en un marco de referencia. La *velocidad*  $v$  es la derivada con respecto al tiempo del desplazamiento o

$$v = \dot{x}$$

La *aceleración*  $a$  es la derivada con respecto al tiempo de la velocidad o

$$a = \dot{v} = \ddot{x}$$

Es importante distinguir entre rapidez y velocidad. La *rapidez* es la razón con la cual se mueve un cuerpo a lo largo de su trayectoria. Así pues, la rapidez se refiere meramente a la celeridad del movimiento y es una cantidad escalar. *Velocidad* es la razón de cambio con respecto al tiempo. Por lo tanto, la velocidad representa rapidez, dirección y sentido, y es una cantidad vectorial.

**Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.** Para propósitos de ingeniería, el *desplazamiento angular*  $\theta$  se mide en radianes y se define como positivo cuando se mide en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. *Velocidad angular*  $\omega$  es la derivada con respecto al tiempo de desplazamiento angular o

$$\omega = \dot{\theta}$$

y *aceleración*  $\alpha$  es la derivada con respecto al tiempo de la velocidad angular o

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

Nótese que la rapidez angular se refiere a la celeridad del movimiento angular y es una cantidad escalar. La velocidad angular es la razón de cambio con respecto al tiempo de la posición angular y por lo tanto, representa rapidez de movimiento angular, dirección y sentido. Es una cantidad vectorial.

Más aún, nótese que si la velocidad o la velocidad angular se miden con respecto a una referencia fija, entonces se denominan *velocidad absoluta* o velocidad angular absoluta. De otra forma se denominan *velocidad relativa* o velocidad angular relativa. Similarmente, si la aceleración o la aceleración angular se miden con respecto a una referencia no acelerada, se les llama *aceleración absoluta* o aceleración angular absoluta; de otra forma se usa el término *aceleración relativa* o aceleración angular relativa.

**Leyes de Newton.** Hay tres leyes muy conocidas llamadas las *leyes de Newton*. La primera ley de Newton, que trata de la conservación de la cantidad de movimiento, establece que la cantidad de movimiento, (momentum) total de un sistema mecánico es constante en ausencia de fuerzas externas. La cantidad de movimiento es el producto de la masa  $m$  y la velocidad  $v$ , o  $mv$ , para el movimiento traslacional o lineal. En el movimiento rotacional, la cantidad de movimiento es el producto del momento de inercia  $J$  y la velocidad angular  $\omega$ , o  $J\omega$ , y se denomina cantidad de movimiento angular.

**Segunda ley de Newton (del movimiento traslacional).** Para un movimiento traslacional, la segunda ley de Newton dice que la aceleración de cualquier cuerpo rígido es directamente proporcional a la fuerza que actúe sobre él e inversamente proporcional a la masa del cuerpo. Esto es

$$\text{Fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración})$$

Supóngase que unas fuerzas actúan sobre una masa  $m$ . Si  $\sum F$  es la suma de todas las fuerzas que actúan en una dirección dada, entonces

$$\sum F = ma \quad (2-1)$$

donde  $a$  es la aceleración resultante en esa dirección. La línea de acción de la fuerza que actúa sobre una masa debe pasar a través del centro de la masa. De otra manera también se vería envuelto un movimiento rotacional. El movimiento rotacional no está definido por la Ec. (2-1) pero se da en la Ec. (2-2) a continuación.

La segunda ley de Newton da la relación fuerza-aceleración de un cuerpo rígido o la relación de aceleración angular-par de un cuerpo rígido en rotación. La tercera ley se refiere a la acción y reacción, y en efecto, establece que a toda acción se opone una reacción de igual magnitud.

**Segunda ley de Newton (del movimiento rotacional).** Para un cuerpo rígido en rotación pura alrededor de un eje fijo, la segunda ley de Newton establece que

$$\sum \text{Pares} = (\text{momento de inercia})(\text{aceleración angular})$$

o bien

$$\sum T = J\alpha \quad (2-2)$$

donde  $\sum T$  es la suma de todos los pares que actúan alrededor de un eje dado,  $J$  es el momento de inercia del cuerpo alrededor de ese eje y  $\alpha$  es la aceleración angular.

**Ejemplo 2-4.** Una bola de masa  $m$  se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s. El desplazamiento vertical  $x$  se mide hacia arriba desde el punto inicial. ¿Cuál es la máxima altura que alcanzará la bola? Suponga que la fricción del aire es despreciable.

La única fuerza que actúa sobre la bola es la fuerza gravitacional  $-mg$ . Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos

$$m\ddot{x} = -mg$$

Observando que  $\dot{x}(0) = 10$  m/s y  $x(0) = 0$ , obtenemos

$$\dot{x}(t) = -gt + \dot{x}(0) = -gt + 10$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t$$

En el instante en que la bola alcanza el punto más alto, la velocidad es cero. Defina-

mos ese instante como  $t_p$ . Entonces,

$$\dot{x}(t_p) = -gt_p + 10 = 0$$

o bien

$$t_p = \frac{10}{g} = \frac{10 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 1.02 \text{ s}$$

La altura máxima obtenida es, por lo tanto,  $x(t_p)$  o

$$\begin{aligned} x(t_p) &= -\frac{1}{2}gt_p^2 + 10t_p \\ &= -\frac{1}{2} \times 9.81 \times 1.02^2 + 10 \times 1.02 = 5.10 \end{aligned}$$

Así es que la altura máxima que la bola alcanza es 5.10 m.

## 2-2 ELABORACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS (MODELADO MATEMÁTICO)

Para cualquier sistema mecánico se puede desarrollar un modelo matemático, aplicando al sistema de leyes de Newton. En esta sección trataremos primero el problema de obtener los modelos matemáticos de sistemas mecánicos, y después explicaremos el análisis de la respuesta de sistemas mecánicos simples.

En el modelado matemático de sistemas mecánicos pueden necesitarse tres tipos de elementos básicos: elementos de inercia, de resorte y elementos amortiguadores. Comenzaremos esta sección con una breve explicación de cada uno de esos tres tipos.

**Elementos de inercia.** Por *elementos de inercia* entendemos las masas y los momentos de inercia. Puesto que las masas y los momentos de inercia se presentaron en detalle en la Sec. 2-1, aquí bastará una breve explicación.

La *inercia* puede definirse como el cambio en fuerza (par) requerido para producir un cambio unitario en la aceleración (aceleración angular). Esto es,

$$\text{Inercia (masa)} = \frac{\text{cambio de la fuerza}}{\text{cambio en la aceleración}} \frac{\text{N}}{\text{m/s}^2} \text{ o kg}$$

$$\text{Inercia (momento de inercia)} = \frac{\text{cambio en el par}}{\text{cambio en la aceleración angular}}$$

$$\frac{\text{N-m}}{\text{rad/s}^2} \text{ o kg-m}^2$$

**Elementos de un resorte.** Un *resorte* lineal es un elemento mecánico que puede ser deformado por una fuerza externa tal que la deformación sea directamente proporcional a la fuerza o par que se le aplique.

La Fig. 2-3 es un diagrama esquemático de un resorte. Aquí consideramos solamente el movimiento traslacional. El resorte ha sido deflelado de

su posición original por una fuerza aplicada en cada extremo. Las posiciones  $x_1$  y  $x_2$  de los extremos del resorte se han medido en relación con el mismo marco de referencia. Las fuerzas en ambos extremos del resorte están en la misma línea y son de igual magnitud. Por lo tanto, la fuerza  $F$  y el desplazamiento neto  $x$  de los extremos del resorte están relacionados por

$$F = kx = k(x_1 - x_2) \quad (2-3)$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad llamada *constante del resorte*. La dimensión de la constante del resorte  $k$  es fuerza/desplazamiento.



Fig. 2-3. Resorte.

En el movimiento rotacional, el par aplicado a los extremos de un resorte de torsión o rotacional y el cambio neto en el desplazamiento angular de los extremos están relacionados por

$$T = k\theta = k(\theta_1 - \theta_2) \quad (2-4)$$

donde

$T$  = par aplicado a los extremos del resorte de torsión

$\theta_1$  = desplazamiento angular de un extremo

$\theta_2$  = desplazamiento angular en el otro extremo

$\theta = \theta_1 - \theta_2$  = desplazamiento angular neto de los extremos

$k$  = constante del resorte de torsión

La dimensión de la constante del resorte de torsión  $k$  es par/desplazamiento angular, donde el desplazamiento angular se mide en radianes.

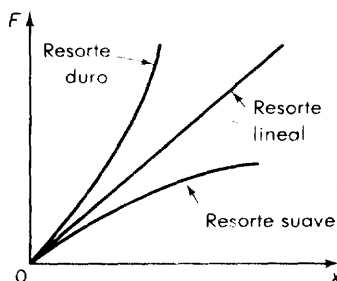


Fig. 2-4. Curvas características de fuerza-desplazamiento de resortes lineales y no lineales.

Cuando se estira un resorte lineal, se alcanza un punto en el cual la fuerza por desplazamiento unitario empieza a cambiar y el resorte viene a ser un resorte no lineal. Si se le estira aún más, se alcanza un punto en que el material se rompe o cede. En resortes prácticos, por lo tanto, la suposición de linealidad puede estar bien sólo para desplazamientos netos relativamente pequeños.

En resortes prácticos, la constante del resorte  $k$  (o una constante del resorte equivalente en resortes no lineales) puede definirse como

Constante del resorte  $k$  (para resorte traslacional)

$$= \frac{\text{cambio en la fuerza}}{\text{cambio en el desplazamiento del resorte}} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Constante del resorte  $k$  (para resorte de torsión)

$$= \frac{\text{cambio en el par}}{\text{cambio en el desplazamiento angular del resorte}} \frac{\text{N} - \text{m}}{\text{rad}}$$

Las constantes de resorte indican rigidez; un gran valor de  $k$  corresponde a un resorte duro y un valor pequeño de  $k$  a un resorte suave. El recíproco de la constante del resorte  $k$  se denomina *compliance* o *capacitancia mecánica*  $C$ . Así pues  $C = 1/k$ . La compliance o capacitancia mecánica indica la suavidad de un resorte.

Compliance o capacitancia mecánica  $C$  (para resorte traslacional)

$$= \frac{\text{cambio en el desplazamiento del resorte}}{\text{cambio en la fuerza}} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

Compliance o capacitancia mecánica  $C$  (para resorte de torsión)

$$= \frac{\text{cambio en el desplazamiento angular del resorte}}{\text{cambio en el par}} \frac{\text{rad}}{\text{N} - \text{m}}$$

Nótese que en términos de la compliance o capacitancia mecánica  $C$ , las Ecs. (2-3) y (2-4) quedan

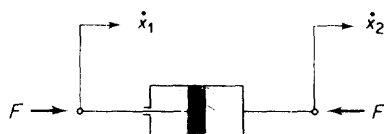
$$x = CF \quad \text{y} \quad \theta = CT$$

**Resorte práctico contra resorte ideal.** Todos los resortes prácticos tienen inercia y amortiguamiento. En nuestro análisis en este libro, sin embargo, supondremos que el efecto de la masa en un resorte es despreciable, esto es, la fuerza de inercia debida a la aceleración del resorte es despreciable por su pequeñez comparada con la fuerza del resorte. También, supondremos que el efecto de amortiguamiento del resorte es de tamaño despreciable.

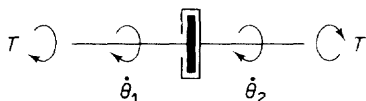
Un resorte ideal, en comparación con un resorte real, no tendrá masa ni amortiguamiento (fricción interna) y obedecerá la ley de fuerza-desplazamiento lineal como se da en la Ec. (2-3) o la ley de par-desplazamiento angular como se da en la Ec. (2-4).

**Elementos amortiguadores.** Un *amortiguador* es un elemento mecánico que disipa energía en forma de calor en lugar de almacenarla. La figura

2-5(a) muestra un diagrama esquemático de un amortiguador traslacional. Consiste en un pistón y un cilindro lleno de aceite. Cualquier movimiento relativo entre el vástago del pistón y el cilindro encuentra resistencia por el aceite ya que éste debe fluir alrededor del pistón (o a través de orificios provistos en el pistón) de un lado a otro. Esencialmente, el amortiguador absorbe energía y la energía absorbida se disipa como calor que fluye al ambiente.



(a)



(b)

Fig. 2-5. (a) amortiguador traslacional; (b) amortiguador torsional (o rotacional).

En la Fig. 2-5(a) las velocidades  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  se consideran relativas al mismo marco de referencia. Las fuerzas en los extremos del amortiguador traslacional están en la misma línea y son de igual magnitud. En el amortiguador, la fuerza  $F$  que actúa sobre él es proporcional a la diferencia de velocidad  $\dot{x}$  de ambos extremos o

$$F = b\dot{x} = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (2-5)$$

donde la constante de proporcionalidad  $b$  que relaciona la fuerza externa  $F$  y la diferencia de velocidad  $\dot{x}$  se denomina *coeficiente de fricción viscosa* o *constante de fricción viscosa*. La dimensión del coeficiente de fricción viscosa es fuerza/velocidad. Nótese que las posiciones iniciales de ambos extremos del amortiguador no aparecen en la ecuación.

Para el amortiguamiento de torsión o rotacional mostrado en la Fig. 2-5(b), el par aplicado a los extremos del amortiguador es proporcional a la diferencia de velocidad angular de ambos extremos o

$$T = b\dot{\theta} = b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (2-6)$$

donde

$T$  = par aplicado a los extremos del amortiguador de torsión

$\dot{\theta}_1$  = velocidad angular de un extremo

$\dot{\theta}_2$  = velocidad angular del otro extremo

$\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$  velocidad angular relativa de los extremos

$b$  = coeficiente de fricción viscosa de torsión (constante de fricción viscosa de torsión)

La dimensión del coeficiente de fricción viscosa de torsión  $b$  es par/velocidad angular.

Nótese que un amortiguador es un elemento que provee resistencia en el movimiento mecánico, y como tal, su efecto en el comportamiento dinámico de un sistema mecánico es similar al de un resistor eléctrico en el comportamiento dinámico de un sistema eléctrico. En consecuencia, a menudo se trata de un amortiguador como un *elemento de resistencia mecánica* y al coeficiente de fricción viscosa como a la *resistencia mecánica*.

Resistencia mecánica  $b$  (para amortiguador traslacional)

$$= \frac{\text{cambio en la fuerza}}{\text{cambio en la velocidad}} \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$$

Resistencia mecánica  $b$  (para amortiguadores de torsión)

$$= \frac{\text{cambio en el par}}{\text{cambio en la velocidad angular}} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$$

**Amortiguador práctico contra amortiguador ideal.** Todos los amortiguadores prácticos producen efectos de inercia y de resorte. En este libro, sin embargo, suponemos que esos efectos son despreciables.

Un amortiguador ideal está desprovisto de masa y de resorte, disipa toda la energía y obedece a la ley fuerza-velocidad lineal o par-velocidad angular lineal como se dan en la Ec. (2-5) o en la Ec. (2-6), respectivamente.

**Fricción no lineal.** La fricción que obedece a la ley lineal se llama *fricción lineal*, en tanto que la fricción que no la obedece se describe como *no lineal*. Los ejemplos de fricción no lineal incluyen la fricción estática, la fricción deslizante y la fricción de ley cuadrática. Los temas relacionados con la fricción estática y la fricción deslizante se explicarán en la Sección 2-4.

La fricción de ley cuadrática ocurre cuando un cuerpo sólido se mueve en un medio fluido. Aquí la fuerza de fricción es esencialmente proporcional a la velocidad en poca rapidez y llega a ser proporcional al cuadrado de la velocidad en gran rapidez. La figura 2-6 muestra una curva característica de la fricción de ley cuadrática.

**Respuesta forzada y respuesta libre.** El comportamiento determinado por una función de excitación se llama *respuesta forzada* y la que se debe a las condiciones iniciales (almacenamientos de energía iniciales) se llama *res-*

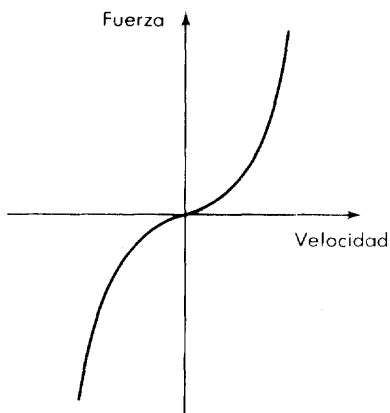


Fig. 2-6. Curva característica de la fricción de ley cuadrática.

*puesta libre.* El periodo entre la iniciación de una respuesta libre y su determinación se conoce como *periodo transitorio*. Después que la respuesta libre se hace despreciable, se dice que las condiciones han alcanzado un estado estable.

**Sistemas rotacionales.** Se muestra en la Fig. 2-7 un diagrama esquemático de un rotor montado sobre cojinetes. El momento de inercia del rotor alrededor del eje de rotación es  $J$ . Supongamos que en  $t = 0$  el rotor está girando a la velocidad angular de  $\omega(0) = \omega_0$ . Supongamos también que la fricción en los cojinetes es fricción viscosa y que no se aplica par externo al rotor. Entonces el único par que actúa sobre el rotor es el par de fricción  $b\omega$  en los cojinetes.

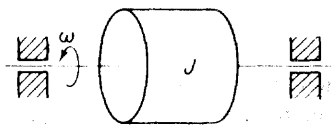


Fig. 2-7. Rotor montado en cojinetes.

Aplicando la segunda ley de Newton, Ec. (2-2) obtenemos la ecuación del movimiento,

$$J\dot{\omega} = -b\omega, \quad \omega(0) = \omega_0$$

o bien

$$J\dot{\omega} + b\omega = 0 \quad (2-7)$$

La ecuación (2-7) es la ecuación del movimiento, así como un modelo matemático del sistema. A un sistema gobernado por una ecuación diferencial de primer orden se le llama *sistema de primer orden*.

Al resolver la Ec. (2-7), podemos suponer que

$$\omega(t) = e^{at} \quad (2-8)$$



La diferenciación de ambos lados de la Ec. (2-8) con respecto a  $t$  da

$$\dot{\omega} = \omega_0 \lambda e^{\lambda t}$$

A continuación, sustituimos esta  $\dot{\omega}$  y la Ec. (2-7) y obtenemos

$$J\omega_0 \lambda e^{\lambda t} + b\omega_0 e^{\lambda t} = 0$$

Puesto que  $\omega_0 e^{\lambda t} \neq 0$ , esta última ecuación da

$$J\lambda + b = 0$$

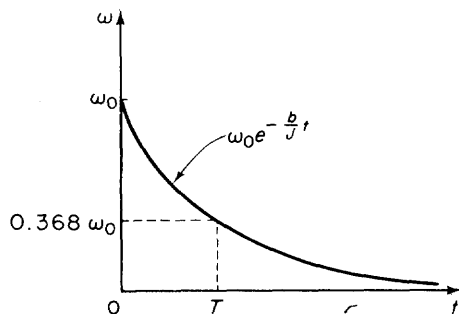
A este resultado se le llama la *ecuación característica* del sistema. La ecuación característica determina el valor de  $\lambda$ .

$$\lambda = -\frac{b}{J}$$

Así pues, de la Ec. (2-8) tenemos

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-(b/J)t}$$

La velocidad angular decrece exponencialmente, como se muestra en la Fig. 2-8.



**Fig. 2-8.** Curva de velocidad angular del sistema rotor mostrado en la Fig. 2-7.

Puesto que el factor exponencial  $e^{-(b/J)t}$  tiende a cero cuando  $t$  se hace muy grande, matemáticamente la respuesta decrece en forma permanente. Cuando se trata con tal respuesta de decrecimiento exponencial, es conveniente describir la respuesta en términos de una constante de tiempo. Una *constante de tiempo* es aquel valor de tiempo que hace al exponente igual a  $-1$ . En este sistema, la constante de tiempo  $T$  es igual a  $J/b$ . Cuando  $t = T$ , el valor del factor exponencial es

$$e^{-T/T} = e^{-1} = 0.368$$

En otras palabras, cuando el tiempo  $t$  en segundos es igual a la constante de tiempo, el factor exponencial se reduce aproximadamente a 37% de su valor inicial, como se muestra en la Fig. 2-8.

**Sistema masa-resorte.** La figura 2-9 describe un sistema que consiste en una masa y un resorte. Aquí la masa está suspendida por el resorte. Para el movimiento vertical, actúan dos fuerzas sobre la masa: la fuerza del re-

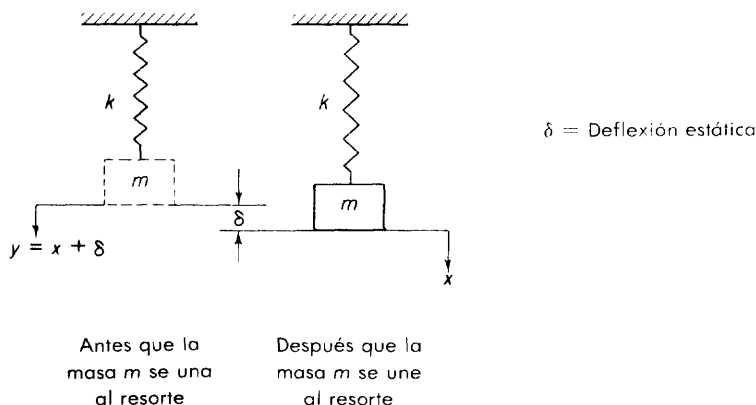


Fig. 2-9. Sistema masa-resorte.

sorte  $ky$  y la fuerza gravitacional  $mg$ . En el diagrama la dirección positiva del desplazamiento  $y$  está definida hacia abajo. Nótese que la fuerza gravitacional jala a la masa hacia abajo. Si se jala a la masa hacia abajo por una fuerza externa y luego se la suelta, la fuerza del resorte actúa hacia arriba y tiende a jalar a la masa hacia arriba. Así, mediante la aplicación de la segunda ley de Newton, obtenemos la ecuación del movimiento

$$m\ddot{y} = \sum \text{fuerzas} = -ky + mg$$

o bien

$$m\ddot{y} + ky = mg \quad (2-9)$$

La fuerza gravitacional es estáticamente opuesta por la deflexión  $\delta$  de equilibrio del resorte. Si medimos el desplazamiento desde esta posición de equilibrio, entonces el término  $mg$  puede descartarse de la ecuación de movimiento. Puesto que  $k\delta = mg$ , sustituyendo  $y = x + \delta$  en la Ec. (2-9) y considerando que  $\delta =$  constante, tenemos

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2-10)$$

la cual es un modelo matemático del sistema. A tal sistema se le llama *sistema de segundo orden*; esto es, está gobernado por una ecuación diferencial de segundo orden.

A menos que se establezca otra situación en este libro, cuando se escriban las ecuaciones de movimiento para sistemas que incluyan a la fuerza gravitacional, mediremos el desplazamiento de la masa desde la posición de equilibrio con el objeto de eliminar el término  $mg$  y simplificar el modelo matemático.

**Vibración libre.** En el sistema masa-resorte de la Fig. 2-9, supóngase que la masa se jala hacia abajo y luego se la suelta en condiciones iniciales arbitrarias  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ . En este caso, la masa oscilará y el movimiento será periódico. El movimiento periódico, observado en el sistema cuando es desplazado de su posición de equilibrio estático, se denomina *vibración libre*. Es una respuesta libre debida a las condiciones iniciales.

Con el objeto de encontrar la forma matemática del movimiento periódico, resolvamos la Ec. (20). Para encontrar la solución, un método útil consiste en suponer que  $x(t)$  tiene una forma exponencial o sinusoidal (senoidal). En este capítulo demostraremos ambos enfoques, el exponencial y el sinusoidal (senoidal).

Para obtener una solución del presente problema, suponemos que  $x(t)$  está en forma exponencial

$$x(t) = Ke^{\lambda t} \quad (2-11)$$

Si se sustituye esta ecuación en la Ec. (2-10), entonces

$$mK\lambda^2 e^{\lambda t} + kKe^{\lambda t} = 0$$

Dividiendo ambos lados entre  $Ke^{\lambda t}$  resulta

$$m\lambda^2 + k = 0$$

la cual es la ecuación característica del sistema. De esta ecuación característica obtenemos

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

Aquí las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son

$$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{m}}$$

y esos dos valores de  $\lambda$  satisfacen la solución propuesta, Ec. (2-11). Puesto que la ecuación diferencial de segundo orden debe tener dos constantes arbitrarias en su solución, podemos escribir la solución general  $x(t)$  como

$$x(t) = K_1 e^{j(\sqrt{k/m})t} + K_2 e^{-j(\sqrt{k/m})t}$$

A continuación, podemos usar las siguientes ecuaciones (fórmula de Euler) para expresar funciones exponenciales en términos de funciones seno y coseno:

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \sin \omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos \omega t - j \sin \omega t \end{aligned} \quad (2-12)$$

Entonces la solución general  $x(t)$  se hace

$$\begin{aligned} x(t) &= K_1 \left( \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + j \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + K_2 \left( \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - j \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ &= j(K_1 - K_2) \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + (K_1 + K_2) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ &= A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \end{aligned} \quad (2-13)$$

donde

$$A = j(K_1 - K_2), \quad B = K_1 + K_2$$

$A$  y  $B$  son ahora constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ . La ecuación (2-13) puede escribirse también

$$x(t) = C \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$$

donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{A}{B}$$

Para determinar las constantes  $A$  y  $B$  en términos de las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$  sustituimos  $t = 0$  en la Ec. (2-13). Entonces,

$$x(0) = B$$

Después de diferenciar ambos lados de la Ec. (2-13) con respecto a  $t$ , tenemos

$$\dot{x}(t) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - B \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Así pues,

$$\dot{x}(0) = A \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Se infiere que  $A = \sqrt{m/k} \dot{x}(0)$  y  $B = x(0)$ . En términos de las condiciones iniciales la Ec. (2-13) se hace

$$x(t) = \dot{x}(0) \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + x(0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (2-14)$$

El movimiento periódico descrito por esta última ecuación se denomina *movimiento armónico simple*.

Si las condiciones iniciales dadas fueron  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , entonces por sustitución de estas condiciones iniciales en la Ec. (2-14), el desplaza-

miento  $x(t)$  estaría dado por

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

El periodo y la frecuencia de un movimiento armónico simple puede ahora definirse como sigue. El *periodo*  $T$  es el tiempo requerido para que un movimiento periódico vuelva a repetirse. En este caso,

$$\text{Periodo } T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \text{ segundos}$$

La *frecuencia*  $f$  de un movimiento periódico es el número de ciclos por segundo y la unidad estándar de frecuencia es el hertz (Hz); esto es, un hertz es un ciclo por segundo. En el presente movimiento armónico,

$$\text{Frecuencia } f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} \text{ hertz}$$

La frecuencia natural o frecuencia natural no amortiguada es la frecuencia de vibración libre de un sistema sin amortiguamiento. Si la frecuencia natural se mide en hertz (Hz) o ciclos por segundo (cps), se la representa por  $f_n$ . Si se la mide en radianes por segundo (rad/s), se la presenta por  $\omega_n$ . En el presente sistema

$$\omega_n = 2\pi f_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/s}$$

Es importante recordar que cuando la Ec. (2-10) se escribe en forma tal que el coeficiente del término  $\ddot{x}$  es la unidad,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

la raíz cuadrada del coeficiente del término  $x$  es la frecuencia natural  $\omega_n$ . Esto significa que para el sistema mostrado en la Fig. 2-9, podemos poner un modelo matemático del sistema en la forma

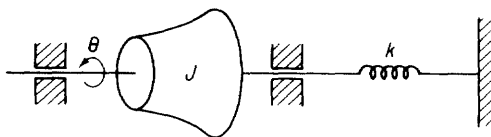
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ .

**Determinación experimental del momento de inercia.** Es posible calcular momentos de inercia de los cuerpos homogéneos que tengan formas geométricas simples. Sin embargo, tratándose de cuerpos rígidos con formas complicadas o que estén hechos de materiales de diferentes densidades, tales cálculos pueden ser difíciles o aun imposibles; más aún, los valores calculados pueden no ser exactos. En esos casos, es preferible la determinación experimental de los momentos de inercia. El proceso es como sigue. Monte-

mos un cuerpo rígido sobre cojinetes sin fricción, de modo que pueda girar libremente alrededor del eje de rotación con respecto al cual se determinará el momento de inercia. En seguida, unimos un resorte de torsión de constante de resorte  $k$  conocida, al cuerpo rígido (véase la Fig. 2-10).

Fig. 2-10. Un montaje para la determinación experimental del momento de inercia.



El resorte se tuerce ligeramente, se suelta y se mide la frecuencia del movimiento armónico simple resultante. Puesto que la ecuación de movimiento del sistema es

$$J\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{J}\theta = 0$$

la frecuencia natural  $\omega_n$  es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}}$$

y el periodo de vibración es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/J}}$$

El momento de inercia  $J$  queda determinado entonces como

$$J = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

De manera similar, en el sistema masa-resorte de la Fig. 2-9, si la constante del resorte  $k$  se conoce y se mide el periodo  $T$  de la vibración libre, entonces la masa  $m$  puede calcularse mediante

$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

**Sistema masa-resorte-amortiguador.** La mayor parte de los sistemas físicos constan de algún tipo de amortiguamiento: amortiguamiento viscoso, amortiguamiento seco, amortiguamiento magnético, etcétera. Tal amortiguamiento no sólo retarda el movimiento, sino que dado el caso, causa que se detenga. En la siguiente explicación consideraremos un sistema mecánico

simple que incluye amortiguamiento viscoso. Nótese que el amortiguador de cilindro es un elemento amortiguador viscoso típico.

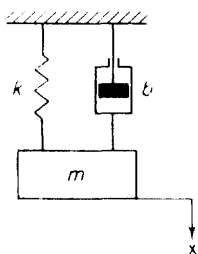


Fig. 2-11. Sistema masa-resorte-amortiguador.

La figura 2-11 es un diagrama esquemático de un sistema masa-resorte-amortiguador. Supóngase que la masa se jala hacia abajo y luego se suelta. Si el amortiguamiento es ligero, ocurrirá un movimiento vibratorio. (Se dice que este sistema está subamortiguado). Si el amortiguamiento es fuerte, no ocurrirá movimiento vibratorio. (Se dice que este sistema está sobreamortiguado). Un sistema críticamente amortiguado es aquel en el cual el grado de amortiguamiento es tal que el movimiento resultante está en la frontera entre los casos de subamortiguamiento y sobreamortiguamiento. Independientemente de que el sistema sea subamortiguado, sobreamortiguado o críticamente amortiguado, a causa de la presencia del amortiguador la vibración o movimiento libre disminuirá con el tiempo. Esta vibración libre se llama *transitoria*.

En el sistema que se muestra en la figura 2-11, en el movimiento vertical están actuando tres fuerzas sobre la masa: la fuerza del resorte, la fuerza amortiguadora y la fuerza gravitacional. Como ya se hizo notar, si medimos el desplazamiento de la masa desde una posición de equilibrio estático (de modo que la fuerza gravitacional esté balanceada por la deflexión de equilibrio del resorte), la fuerza gravitacional no participará en la ecuación de movimiento. Por lo tanto, al medir el desplazamiento  $x$  de la posición de equilibrio estático, obtenemos la ecuación del movimiento,

$$m\ddot{x} = \sum \text{fuerzas} = -kx - b\dot{x}$$

o bien

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (2-15)$$

La ecuación (2-15), la cual describe el movimiento del sistema, es también un modelo matemático del sistema.

En nuestro análisis presente, sólo se considera el caso del subamortiguamiento. (En el Capítulo 7 se hace un análisis más completo del sistema para los casos de subamortiguamiento, sobreamortiguamiento y críticamente amortiguado.)

Resolvamos la Ec. (2-15) para un caso particular. Supóngase que  $m = 0.1$  slug,  $b = 0.4$  lb<sub>f</sub>-s/ft y  $k = 4$  lb<sub>f</sub>/ft. Entonces la Ec. 2-15 se hace

$$0.1\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 4x = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 40x = 0 \quad (2-16)$$

Supongamos que

$$x(t) = Ke^{\lambda t} \quad (2-17)$$

Cuando se sustituye la Ec. (2-17) en la Ec. (2-16), el resultado es

$$K\lambda^2 e^{\lambda t} + 4K\lambda e^{\lambda t} + 40Ke^{\lambda t} = 0$$

Dividiendo esta última ecuación entre  $Ke^{\lambda t}$ , queda

$$\lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0$$

Esta ecuación cuadrática es la ecuación característica del sistema considerado. Como tal, tiene dos raíces

$$\lambda_1 = -2 + j6, \quad \lambda_2 = -2 - j6$$

Estos dos valores de  $\lambda$  satisfacen la solución supuesta, Ec. (2-17). En consecuencia, suponemos que la solución contiene dos términos de la forma mostrada en la Ec. (2-17) y escribimos la solución general  $x(t)$  como

$$\begin{aligned} x(t) &= K_1 e^{(-2+j6)t} + K_2 e^{(-2-j6)t} \\ &= e^{-2t}(K_1 e^{j6t} + K_2 e^{-j6t}) \\ &= e^{-2t}(A \sin 6t + B \cos 6t) \end{aligned} \quad (2-18)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes arbitrarias y  $A = j(K_1 - K_2)$ ,  $B = K_1 + K_2$ . Para obtener la Ec. (2-18), utilizamos la fórmula de Euler, dada en la Ec. (2-12).

Obtengamos el movimiento  $x(t)$  cuando se jala a la masa hacia abajo en  $t = 0$ , tal que  $x(0) = x_0$ , y se la suelta con velocidad,  $\dot{x}(0) = 0$ . Entonces las constantes arbitrarias  $A$  y  $B$  pueden determinarse como sigue. Primero, la sustitución de  $t = 0$  en la Ec. (2-18) da

$$x(0) = B = x_0$$

Diferenciando luego la Ec. (2-18) con respecto a  $t$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2e^{-2t}(A \sin 6t + B \cos 6t) + e^{-2t}(6A \cos 6t - 6B \sin 6t) \\ &= -2e^{-2t}[(A + 3B) \sin 6t + (B - 3A) \cos 6t] \end{aligned}$$

De aquí

$$\dot{x}(0) = -2(B - 3A) = 0$$

y, por lo tanto,

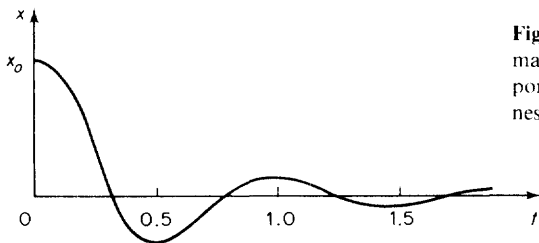
$$A = \frac{1}{3}x_0, \quad B = x_0$$



La solución  $x(t)$  se hace

$$x(t) = e^{-2t}(\frac{1}{3}\sin 6t + \cos 6t)x_0$$

Además de describir una vibración sinusoidal (senoidal) amortiguada (Fig. 2-12), esta ecuación representa la vibración libre del sistema masa-resorte-amortiguador con los valores numéricos dados.



**Fig. 2-12.** Vibración libre del sistema masa-resorte-amortiguador descrito por  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 40x = 0$  con condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ .

**Comentarios.** Los valores numéricos en el problema precedente se dieron en unidades BES. Convirtamos esos valores en unidades de otros sistemas.

1. *Unidades del SI o mks (consulte las tablas 2-1 y 2-2).*

$$m = 0.1 \text{ slug} = 1.459 \text{ kg}$$

$$b = 0.4 \text{ lb}_f\text{-s/ft} = 0.4 \times 4.448/0.3048 \text{ N-s/m} = 5.837 \text{ N-s/m}$$

$$k = 4 \text{ lb}_f/\text{ft} = 4 \times 4.448/0.3048 \text{ N/m}$$

La Ec. (2-15) queda

$$1.459\ddot{x} + 5.837\dot{x} + 58.37x = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 40x = 0$$

la cual es la misma que la Ec. (2-16).

2. *Unidades métricas de ingeniería (gravitacional) (consulte las tablas 2-1 y 2-2).*

$$m = 0.1 \text{ slug} = 0.1488 \text{ kg}_f\text{-s}^2/\text{m}$$

$$b = 0.4 \text{ lb}_f\text{-s/ft} = 0.4 \times 0.4536/0.3048 \text{ kg}_f\text{-s/m} = 0.5953 \text{ kg}_f\text{-s/m}$$

$$k = 4 \text{ lb}_f/\text{ft} = 4 \times 0.4536/0.3048 \text{ kg}_f/\text{m} = 5.953 \text{ kg}_f/\text{m}$$

Por lo tanto, la Ec. (2-15) se hace

$$0.1488\ddot{x} + 0.5953\dot{x} + 5.953x = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 40x = 0$$

la cual es la misma que la Ec. (2-16).

Nótese que en tanto usemos unidades consistentes, la ecuación diferencial (modelo matemático) del sistema permanece igual.

### **Resumen del procedimiento general para la obtención de respuestas.**

Para determinar el comportamiento libre de los sistemas mecánicos, se puede resumir un procedimiento general como sigue.

1. Obtenga un modelo matemático del sistema. (Escriba la ecuación diferencial del sistema, usando la segunda ley de Newton.)
2. Si el sistema incluye amortiguamiento, es conveniente suponer que la solución es de la forma de una función exponencial con constantes indeterminadas. (Si no hay amortiguamiento incluido, podemos suponer que la solución es de la forma sinusoidal (senoidal) con constantes indeterminadas. Véase Sección 2-3.)
3. Determine el exponente a partir de la ecuación característica. (En la solución sinusoidal (senoidal) determine la frecuencia natural a partir de la ecuación característica.)
4. Evalúe las constantes indeterminadas, usando las condiciones iniciales.

## **2-3 SISTEMAS MECÁNICOS CON DOS O MÁS GRADOS DE LIBERTAD**

En situaciones de la vida real, el movimiento de un sistema mecánico puede ser simultáneamente traslacional y rotacional en un espacio de tres dimensiones y algunas partes del sistema pueden tener trayectorias restringidas en las cuales puedan moverse. La descripción geométrica de tales movimientos puede llegar a ser complicada, pero las leyes físicas fundamentales, Ecs. (2-1 y 2-2) aún se aplican.

En el sistema masa-resorte-amortiguador expuesto en la Sección 2-2, se necesitó sólo una coordenada  $x$  para especificar el movimiento del sistema. Sin embargo, se necesita más de una coordenada para describir el movimiento de sistemas más complicados. El término *grado de libertad* es el que describe el número mínimo de coordenadas independientes requeridas para especificar ese movimiento.

**Grados de libertad.** El número de grados de libertad que posee un sistema mecánico es el número mínimo de coordenadas independientes requeridas para especificar las posiciones de todos sus elementos. Por ejemplo, si sólo se necesita una coordenada independiente para especificar la localización geométrica completa de un sistema en el espacio, se trata de un sistema de un grado de libertad. Esto es, un cuerpo rígido en rotación

sobre un eje tiene un grado de libertad, mientras que un cuerpo rígido en el espacio tiene seis grados de libertad: tres traslacionales y tres rotacionales.

En general, es importante observar que, no es el número de masas ni cualquier otra cantidad obvia la que conducirá siempre a una estimación correcta del número de grados de libertad.

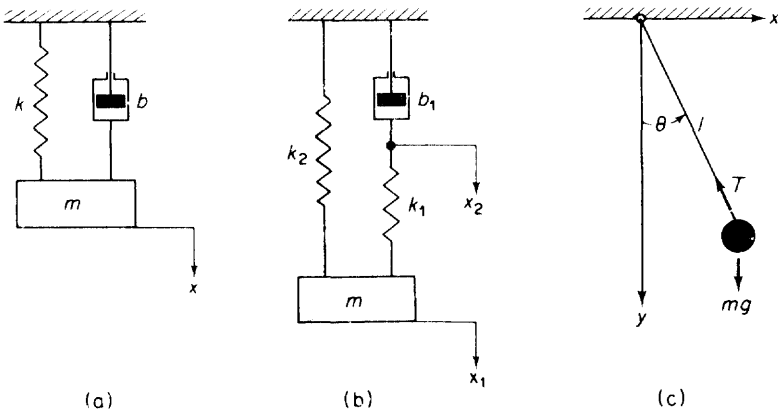
En términos del número de ecuaciones de movimiento y del número de restricciones, los grados de libertad pueden expresarse así:

Número de grados de libertad

$$= (\text{número de ecuaciones de movimiento})$$

$$- (\text{número de ecuaciones de restricción})$$

**Ejemplo 2-5.** Observando los sistemas mostrados en la Fig. 2-13, encontremos los grados de libertad de cada uno de ellos.



**Fig. 2-13.** Sistemas mecánicos.

(a) Comencemos con el sistema mostrado en la Fig. 2-13(a). Si la masa  $m$  está restringida a moverse verticalmente, sólo se requiere una coordenada  $x$  para definir la localización de la masa en cualquier momento. Así, el sistema mostrado en la Fig. 2-13(a) tiene un grado de libertad.

Podemos verificar esta declaración contando el número de ecuaciones de movimiento y el número de ecuaciones de las restricciones. Este sistema tiene una ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

y ninguna ecuación de restricciones. En consecuencia,

$$\text{Grado de libertad} = 1 - 0 = 1$$

(b) A continuación, consideremos el sistema mostrado en la Fig. 2-13(b). Las

ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + k_2x_1 &= 0 \\ k_1(x_1 - x_2) &= b_1\dot{x}_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de ecuaciones de movimiento es dos. No hay ecuación de restricciones. Así es que

$$\text{Grados de libertad} = 2 - 0 = 2$$

(c) Finalmente, consideremos el sistema de péndulo mostrado en la Fig. 2-13(c). Definamos las coordenadas de la masa del péndulo como  $(x, y)$ . Entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T \sin \theta \\ m\ddot{y} &= mg - T \cos \theta \end{aligned}$$

Así pues, el número de ecuaciones de movimiento es dos. La ecuación de restricción de este sistema es

$$x^2 + y^2 = l^2$$

El número de ecuaciones de restricción es uno. Y por eso

$$\text{Grado de libertad} = 2 - 1 = 1$$

Obsérvese que cuando hay restricciones presentes, el sistema de coordenadas más conveniente puede ser no rectangular. En el sistema de péndulo de la Fig. 2-13(c) el péndulo está restringido a moverse en una trayectoria circular. Aquí el sistema de coordenadas más conveniente puede ser un sistema de coordenadas polares. Entonces la única coordenada necesaria sería el ángulo  $\theta$  en el cual el péndulo se balancea. Las coordenadas rectangulares  $x, y$  y las coordenadas polares  $\theta, l$  (donde  $l$  es una constante) están relacionadas mediante

$$x = l \sin \theta, \quad y = l \cos \theta$$

En términos del sistema de coordenadas polares, la ecuación de movimiento queda

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Nótese que, como  $l$  es constante, la configuración del sistema puede especificarse por una coordenada,  $\theta$ . En consecuencia, se trata de un *sistema con un grado de libertad*.

**Sistema de dos grados de libertad.** Un *sistema de dos grados de libertad* requiere dos coordenadas independientes para especificar la configuración del sistema. Considérese el sistema mostrado en la Fig. 2-14; el cual ilustra el caso de dos grados de libertad y obtengamos de él un modelo matemático. Al aplicar la segunda ley de Newton a la masa  $m_1$  y la masa  $m_2$ , tenemos

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1)$$

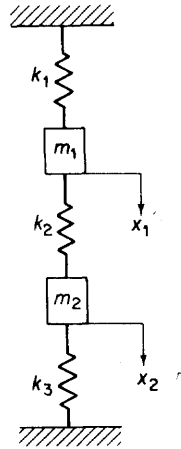


Fig. 2-14. Sistema mecánico.

Al rearmar las ecuaciones de movimiento, se hacen

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \quad (2-19)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (2-20)$$

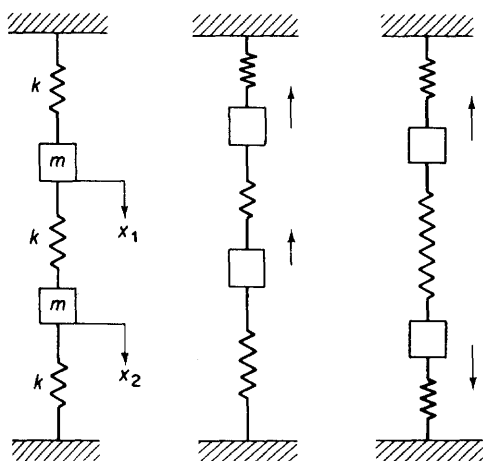
Estas dos ecuaciones representan un modelo matemático del sistema.

**Vibración libre de un sistema de dos grados de libertad.** A continuación, considérese la Fig. 2-15, la cual es un caso especial del sistema dado en la Fig. 2-14. Las ecuaciones de movimiento para el presente sistema pueden obtenerse sustituyendo  $m_1 = m_2 = m$  y  $k_1 = k_2 = k$  en las Ecs. (2-19) y (2-20) como sigue.

$$m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \quad (2-21)$$

$$m \ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \quad (2-22)$$

Examinemos la vibración libre del sistema. Con objeto de encontrar las frecuencias naturales de la vibración libre, supongamos que el movimiento es armónico. Así pues, supongamos que

Primer modo  
de vibraciónSegundo modo  
de vibración**Fig. 2-15.** Sistema mecánico y sus dos  
modos de vibración.

$$x_1 = A \operatorname{sen} \omega t, \quad x_2 = B \operatorname{sen} \omega t$$

uego

$$\ddot{x}_1 = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t, \quad \ddot{x}_2 = -B\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

Si las expresiones precedentes se sustituyen en las Ecs. (2-21) y (2-22), las ecuaciones resultantes son

$$(-mA\omega^2 + 2kA - kB) \operatorname{sen} \omega t = 0$$

$$(-mB\omega^2 + 2kB - kA) \operatorname{sen} \omega t = 0$$

Puesto que estas ecuaciones deben satisfacerse en todo tiempo, y puesto que  $\omega t$  no puede ser cero en todo tiempo, las cantidades entre paréntesis deben ser iguales a cero. Así,

$$-mA\omega^2 + 2kA - kB = 0$$

$$-mB\omega^2 + 2kB - kA = 0$$

Al rearmar, tenemos

$$(2k - m\omega^2)A - kB = 0 \quad (2-23)$$

$$-kA + (2k - m\omega^2)B = 0 \quad (2-24)$$

La ecuación (2-23) da

$$\frac{A}{B} = \frac{k}{2k - m\omega^2}$$

y Ec. (2-24)

$$\frac{A}{B} = \frac{2k - m\omega^2}{k}$$

Y por lo tanto, obtenemos

$$\frac{k}{2k - m\omega^2} = \frac{2k - m\omega^2}{k}$$

o bien

$$\omega^4 - \frac{4k}{m}\omega^2 + 3\frac{k^2}{m^2} = 0$$

la cual puede reescribirse como

$$\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{3k}{m}\right) = 0$$

o bien

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega^2 = \frac{3k}{m}$$

En consecuencia,  $\omega^2$  tiene dos valores, el primero representa la primera frecuencia natural  $\omega_1$  (primer forma) y la segunda representa la segunda frecuencia natural  $\omega_2$  (segunda forma).

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Debe recordarse que en el sistema de un grado de libertad sólo existe una frecuencia natural, en tanto que en el sistema de dos grados de libertad hay dos frecuencias naturales.

En cualquiera de las frecuencias naturales las dos masas deben vibrar a la misma frecuencia. Por ejemplo, en la primera (o más baja) frecuencia natural  $\omega_1$  la relación de amplitud  $A/B$  se hace unitaria, o  $A = B$ , lo cual significa que ambas masas se mueven la misma cantidad en la misma dirección; esto es, los movimientos están en fase. Sin embargo, en la segunda frecuencia natural  $\omega_2$ , la relación de amplitud  $A/B$  se hace  $-1$ , o  $A = -B$ , y por lo tanto, los movimientos están opuestos en fase. (En el presente sistema la relación de amplitud  $A/B$  se hace igual a  $1$  o a  $-1$  cuando las masas vibran a la frecuencia natural. Es importante puntualizar que esta situación ocurre cuando suponemos que  $m_1 = m_2$  y  $k_1 = k_2 = k_3$ . Sin tales suposiciones la relación de amplitud  $A/B$  no será igual a  $1$  ni a  $-1$ .)

Nótese que además el sistema no siempre vibra con una de las frecuencias, pero que pueden ocurrir dos formas de vibración simultáneamente, dependiendo de las condiciones iniciales. Esto es, la vibración de  $m_1$  puede consistir en la suma de dos componentes: un movimiento armónico de amplitud  $A_1$  a la frecuencia  $\omega_1$  y un movimiento armónico  $A_2$  a la frecuencia  $\omega_2$ . En este caso la vibración de  $m_2$  consiste en la suma de dos componentes armónicas de amplitud  $B_1$  a la frecuencia  $\omega_1$  y de amplitud  $B_2$  a la frecuencia  $\omega_2$ .

**Sistemas con muchos grados de libertad.** Generalmente, un *sistema con  $n$  grados de libertad* (tal como el formado por  $n$  masas y  $n + 1$  resortes) tiene  $n$  frecuencias naturales. Si tiene lugar una vibración libre en alguna de sus frecuencias naturales, todas las  $n$  masas vibrarán a esa frecuencia y la amplitud de cualquiera de las masas sostendrá un valor fijo relativo a la amplitud de cualquier otra masa. Sin embargo, el sistema puede vibrar con más de una frecuencia natural. Entonces la vibración resultante puede hacerse bastante complicada y verse como una vibración aleatoria.

## 2-4 SISTEMAS MECÁNICOS CON FRICCIÓN EN SECO

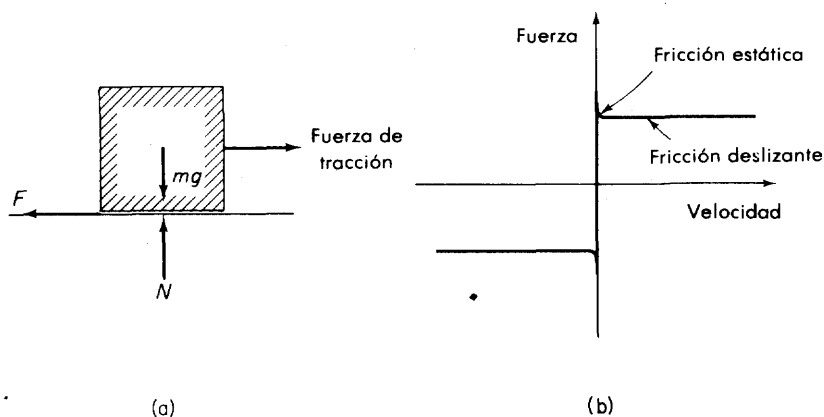
El deslizamiento, el rodamiento y el roce de diferentes partes constituyen algunas de las fuerzas de fricción que se presentan en los sistemas mecánicos. En la mayoría de los casos, las fuerzas de fricción presentes son una combinación de fricción viscosa, fricción en seco y algunos otros tipos.

En esta sección trataremos la *fricción en seco*: la fuerza de fricción que se observa cuando un cuerpo con una superficie no lubricada se desliza sobre otra superficie no lubricada. Empezaremos con la fricción estática, la fricción por deslizamiento y la fricción por rodamiento. Después haremos modelos matemáticos de los sistemas mecánicos con fricción en seco, seguidos de análisis de la respuesta de tales sistemas. Finalmente, se expondrá el principio de d'Alembert y sus aplicaciones a la elaboración de modelos matemáticos.

**Fricción estática y fricción por deslizamiento.** Siempre que la superficie de un cuerpo se deslice sobre la de otro, cada uno ejerce una fuerza de fricción sobre el otro que es paralela a las superficies. La fuerza sobre cada cuerpo es opuesta a la dirección de su movimiento relativo respecto al otro.

Supóngase que se coloca un cuerpo sobre una superficie áspera y que sobre él se ejerce el jalón de una fuerza [véase la Fig. 2-16(a)]. Si el cuerpo se jala con una fuerza en incremento, al principio no se moverá. Pero a medida que la magnitud de la fuerza se incrementa y alcanza un valor suficiente para superar la fricción entre las dos superficies en contacto, el cuerpo comenzará a moverse. Cuando dos superficies en contacto están en reposo relativo una con respecto a la otra, la fuerza de fricción estática alcanza un máximo cuando el deslizamiento entre las dos superficies es inminente. Inmediatamente después que el movimiento se inicia, la magnitud de la fuerza de fricción decrece ligeramente. La fuerza de fricción que actúa sobre el cuerpo cuando se mueve con movimiento uniforme se llama *fricción de deslizamiento o cinética*. Algunas veces también se expresa como *fricción de Coulomb*. En la Fig. 2-16(b) aparece una curva característica de la fricción estática y por deslizamiento.





**Fig. 2-16.** (a) Un cuerpo colocado sobre una superficie áspera y sometido a una fuerza de tracción; (b) curva característica de la fricción estática y deslizando.

En el sistema mostrado en la Fig. 2-16(a), las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, diferentes de las fuerzas de tracción y de fricción, son la fuerza gravitacional y la llamada fuerza normal, la cual se crea en la superficie sobre la cual el cuerpo está en reposo o deslizando y empuja el cuerpo hacia arriba. Esta última fuerza actúa *normal* a la superficie, de allí su nombre.

La magnitud  $N$  de la fuerza normal y la magnitud  $F_s$  de la fuerza de fricción estática máxima son proporcionales entre sí. La relación  $F_s/N$  se denomina *coeficiente de fricción estática* y se representa por  $\mu_s$  o bien

$$\mu_s = \frac{F_s}{N}$$

La fuerza real  $F$  de fricción estática puede tener cualquier valor entre cero (cuando ninguna fuerza se aplica paralela a la superficie) y un valor máximo  $\mu_s N$  o

$$0 \leq F \leq \mu_s N$$

Si la fuerza de fricción es aquella que se observa en el movimiento uniforme del cuerpo, la relación  $F_k/N$ , donde  $F_k$  es la magnitud de la fuerza de fricción durante el movimiento uniforme, se denomina *coeficiente de fricción por deslizamiento* o de *fricción cinética* y se expresa por  $\mu_k$  o también

$$\mu_k = \frac{F_k}{N}$$

Así pues, cuando el cuerpo está en movimiento, la fuerza de deslizamiento o

fricción cinética está dada por

$$F_k = \mu_k N$$

Nótese que la fricción estática máxima es mayor que la fricción por deslizamiento, es decir

$$\mu_s > \mu_k$$

Los coeficientes de fricción estática y por deslizamiento dependen principalmente de la naturaleza de las superficies en contacto.

**Comentarios.** Los hechos precedentes acerca de las fuerzas de fricción dan una descripción macroscópica de estos fenómenos y se basan en estudios experimentales. Estos es, son relaciones empíricas pero no representan leyes fundamentales. En la siguiente lista resumimos los hechos relativos a la fricción estática y por deslizamiento.

1. La fuerza de fricción siempre actúa opuesta a la dirección del movimiento real o pretendido. Hasta que tenga lugar el movimiento del cuerpo, la magnitud de la fuerza de fricción estática es igual a la magnitud de la fuerza que actúa en la dirección del movimiento.
2. La magnitud de la fricción por deslizamiento es proporcional a la magnitud de la fuerza normal y es prácticamente independiente del área de contacto.
3. El coeficiente de fricción por deslizamiento varía poco con la velocidad relativa, pero puede considerarse constante dentro de una amplia escala de velocidades.
4. Para cualquier par de superficies, la fricción estática máxima es mayor que la fricción por deslizamiento.

---

**Ejemplo 2-6.** En el sistema mostrado en la Fig. 2-17, obtengamos la fuerza  $F_i$  que se necesita en el extremo de la palanca con el objeto de mantener el tambor del freno sin rotación. Supongamos que el coeficiente de fricción estática  $\mu_s$  es 0.4.

El par debido al peso  $mg$  es en el sentido de las manecillas del reloj y su magnitud  $T_1$  es

$$T_1 = mgr_1 = 100 \times 9.81 \times 0.3 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = 294.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La fuerza de fricción que actúa sobre el tambor del freno es

$$F = \mu_s N = 0.4 \times 6F_i = 2.4F_i \text{ N}$$

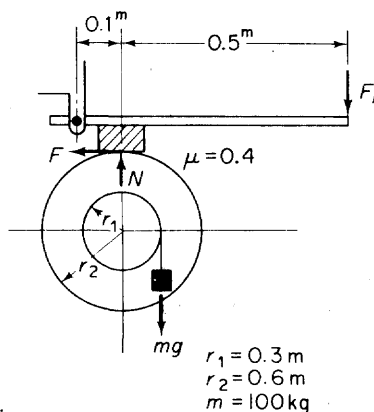


Fig. 2-17. Sistema de freno.

El par debido a la fuerza del freno  $F$  es en sentido contrario al de las manecillas del reloj y su magnitud  $T_2$  es

$$T_2 = Fr_2 = 2.4F_i \times 0.6 = 1.44F_i \text{ N-m}$$

Si  $T_2 > T_1$ , entonces el tambor del freno no girará y, por lo tanto,

$$1.44F_i > 294.3$$

o bien

$$F_i > 204.4 \text{ N}$$

Así pues, la magnitud de la fuerza  $F_i$  que se necesita para evitar que el tambor gire debe ser mayor que 204.4 newtons.

**Fricción por rodamiento.** El movimiento de un cuerpo que rueda sobre otro se ve opuesto por una fuerza llamada *fricción por rodamiento*, la cual resulta de la deformación de los dos cuerpos en el lugar de contacto. La figura 2-18 muestra un cilindro homogéneo que rueda sobre una superficie suave. Aquí la fuerza que jala,  $P$ , actúa paralela a la superficie. La fuerza gravitacional  $mg$  actúa hacia abajo y la fuerza de reacción o fuerza normal  $N$  actúa hacia arriba, aplicada sobre el cilindro por la superficie del plano, y constituyen un par de fricción de rodamiento. (Un *par* son dos fuerzas de igual magnitud, pero de dirección opuesta que no tienen la misma línea de acción. La línea de acción de la fuerza gravitacional y la correspondiente a la fuerza normal están separadas una distancia  $\rho$  debida a la deformación del cilindro y la superficie.

El par de fricción por rodamiento es un par que tiene como eje la tangente a la superficie del plano alrededor del cual el cilindro está rodando. Su valor máximo (la presión normal multiplicada por la distancia  $\rho$ ) es ge-

neralmente muy pequeño, por lo que casi siempre se desprecia. La dirección en la cual el par de fricción de rodamiento tiende a voltear al cilindro es opuesta a aquella en la cual está realmente rodando. Si el cilindro está en reposo, pero actuado por fuerzas que tienden a hacerlo rodar, el par de fricción por rodamiento tiende a evitar la rotación respecto a la tangente común a las dos superficies.

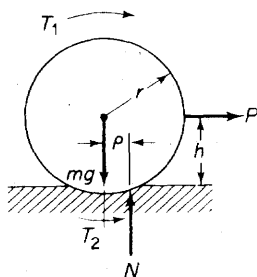


Fig. 2-18. Cilindro homogéneo rodando sobre una superficie lisa.

En la Fig. 2-18, el par debido a la fuerza de tracción actúa en la dirección de las manecillas del reloj y su magnitud  $T_1$  es

$$T_1 = Ph \doteq Pr$$

El par  $T_2$  que resiste a la rotación se origina por el par debido a  $mg$  y a  $N$ . Actúa en la dirección opuesta a la de las manecillas del reloj y su magnitud es

$$T_2 = Np$$

Supóngase que se jala un cuerpo con una fuerza en incremento. Si la fuerza aplicada alcanza un valor suficientemente grande para superar el par resistente  $T_2$ , el cilindro comenzará a rodar. Por lo tanto,  $T_1 = T_2$  o  $Pr = Np$  dan la condición para la rotación inminente. La distancia  $p$ , donde

$$p = \frac{Pr}{N}$$

se denomina *coeficiente de fricción por rodamiento*. Además de tener la dimensión de longitud, depende de factores como la naturaleza de las superficies de contacto y la presión de contacto.

Puesto que el par de fricción por rodamiento es, como ya se observó, generalmente muy pequeño, casi siempre se desprecia en el análisis de ingeniería de los sistemas mecánicos. En los siguientes análisis de sistemas mecánicos con fricción en seco, también lo despreciaremos.

**Movimiento de rodamiento y deslizamiento.** Considérese el movimiento de un cilindro homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$  rodando hacia abajo en

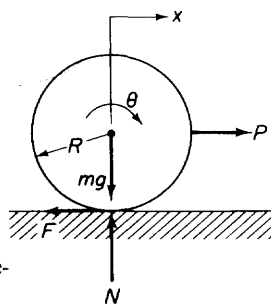
un plano inclinado. El aspecto del rodamiento y/o deslizamiento de inmediato envuelve el aspecto de la fricción entre las superficies en contacto. Sin fricción, el cilindro se deslizaría. Con fricción, el movimiento traslacional del centro de masa y el movimiento de rotación alrededor del centro de masa son independientes entre sí. Por otra parte, si el cilindro rueda sin deslizamiento, una fuerza de fricción estática actúa durante todo el tiempo; la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción estática son tales que aseguran  $x = R\theta$ , donde  $x$  es el desplazamiento traslacional del centro de masa y  $\theta$  es el ángulo de rotación.

Si el cilindro se desliza, la fuerza de fricción  $F$  es igual a  $\mu_k N$  donde  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción deslizante y  $N$  es la fuerza normal. Nótese que si el cilindro está rodando sin deslizamiento, la fuerza de fricción  $F$  se transforma en fricción estática con magnitud desconocida, pero  $F$  es menor que  $\mu_k N$ . En otras palabras, la condición para que el cilindro ruede hacia abajo sin deslizamiento es que  $F$  debe ser menor que  $\mu_k N$ .

La fuerza de fricción estática en el cilindro rodante es una fuerza no disipativa aplicada sobre un desplazamiento, ya que el punto de contacto entre el cilindro rodante y el plano inclinado cambia continuamente. El trabajo hecho por la fuerza de fricción al incrementar la energía cinética traslacional del centro de masa va emparejado por una cantidad igual, pero negativa de trabajo rotacional hecho por la misma fuerza de fricción, de tal modo que decrece la energía cinética rotacional respecto al centro de masa y viceversa, y no disipa energía.

---

**Ejemplo 2-7.** Considérese un cilindro homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$ , inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal, y supóngase que se le aplica una fuerza  $P$  (Fig. 2-19). Suponiendo que el cilindro rueda sin deslizamiento, encuentrese la magnitud y la dirección de la fuerza  $F$ .



**Fig. 2-19.** Cilindro homogéneo sometido a una fuerza horizontal  $P$ .

Supongamos que  $F$  está actuando en la dirección opuesta a  $P$ . Al aplicar la segunda Ley de Newton al sistema, para el movimiento traslacional del centro de masa

obtenemos

$$m\ddot{x} = P - F \quad (2-25)$$

y para el movimiento rotacional con respecto al centro de masa

$$J\ddot{\theta} = FR \quad (2-26)$$

donde  $J$ , el momento de inercia del cilindro alrededor del eje de rotación que pasa a través de su centro de gravedad, es igual a  $\frac{1}{2}mR^2$  y  $x$  es igual a  $R\theta$ . (Nótese que la condición para que el cilindro ruede sin deslizamiento es  $\dot{x} = R\dot{\theta}$ .) Las ecuaciones 2-25 y 2-26 representan un modelo matemático del sistema.

Sustituyendo  $\theta = x/R$  en la Ec. (2-26), queda

$$\frac{1}{2}mR\ddot{x} = FR$$

o bien

$$\frac{1}{2}m\ddot{x} = F \quad (2-27)$$

Por la eliminación de  $\ddot{x}$  de las Ecs. (2-25) y (2-27),

$$2F = P - F$$

o bien

$$F = \frac{P}{3}$$

Así pues, la magnitud de la fuerza de fricción  $F$  es  $P/3$  y la dirección de  $F$  es hacia la izquierda como se muestra en la Fig. 2-19. (De haber escogido la dirección de  $F$  hacia la derecha,  $F$  hubiera sido  $-P/3$ .)

Nótese que si la fuerza de fricción  $P$  es cero, la fuerza estática  $F$  también es cero y obtendremos  $\ddot{x} = 0$ . Esto es, si el cilindro está rodando originalmente, continuará rodando con velocidad lineal constante  $\dot{x} = v_0$  (donde  $v_0$  es la velocidad inicial) y velocidad angular constante  $\dot{\theta} = v_0/R$ .

**Ejemplo 2-8.** Un cilindro homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$  se mueve hacia abajo en un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es  $\alpha$ , como se muestra en la Fig. 2-20. Definamos

$\theta$  = desplazamiento angular como se define en la Fig. 2-20

$x$  = desplazamiento lineal (a lo largo del plano inclinado) del centro de gravedad del cilindro

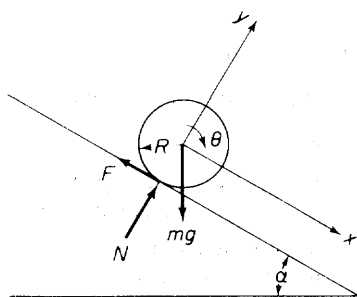
$F$  = fuerza de fricción que actúa hacia arriba en el plano

$N$  = fuerza normal que actúa a través del punto de contacto

Determine el ángulo  $\alpha$  para el cual el cilindro rodará sin deslizamiento. Suponga que  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ , y  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

Cuando el cilindro rueda hacia abajo sin deslizamiento, la fuerza de fricción  $F$  y la fuerza normal  $N$  están relacionadas mediante

$$F < \mu_k N$$



**Fig. 2-20.** Cilindro homogéneo moviéndose hacia abajo en un plano inclinado.

donde  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción deslizante. La ecuación del movimiento traslacional en la dirección  $x$  es

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F \quad (2-28)$$

y la ecuación del movimiento rotacional es

$$J\ddot{\theta} = FR \quad (2-29)$$

donde  $\theta = x/R$  (puesto que el cilindro rueda sin deslizamiento) y  $J$  es el momento de inercia del cilindro alrededor del eje de rotación que pasa a través del centro de gravedad. Las ecuaciones (2-28) y (2-29) definen un modelo matemático del sistema. (Nótese que, en la dirección  $y$ ,  $m\ddot{y} = N - mg \cos \alpha = 0$ .)

Al eliminar  $F$  de las ecuaciones (2-28) y (2-29) y usando la relación  $\theta = x/R$ , tenemos

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \frac{J\ddot{x}}{R^2}$$

Observando que  $J = \frac{1}{2}mR^2$ , esta última ecuación se simplifica a

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \alpha \quad (2-30)$$

Y de esa manera, de las Ecs. (2-28) y (2-30) obtenemos

$$F = mg \sin \alpha - m\ddot{x} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$$

La condición para que el cilindro ruede hacia abajo sin deslizamiento es  $F < \mu_k N$ . En consecuencia,

$$\mu_s N > \mu_k N = \mu_k mg \cos \alpha > F = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$$

donde  $\mu_s N$  es la fricción estática máxima. Así pues,

$$\mu_s > \mu_k > \frac{1}{3} \tan \alpha$$

Si se satisface esta condición, el cilindro rodará hacia abajo en el plano inclinado sin deslizamiento.

**Principio de d'Alembert.** La siguiente exposición mostrará que un ligero rearrreglo de la segunda ley de Newton algunas veces conduce a un camino más simple para obtener la ecuación de movimiento. Cuando una fuerza actúa sobre una masa, la acelera. En lugar de pensar en la aceleración como resultado de la aplicación de una fuerza, podemos convertir esta situación dinámica en una situación de equilibrio en la cual la suma de las fuerzas externas se iguala por una fuerza de inercia ficticia.

Considérese el movimiento de una partícula. La segunda ley de Newton para el movimiento traslacional puede reescribirse como

$$F - ma = 0$$

Si se supone que una fuerza ficticia  $-ma$  está actuando sobre la partícula, a ésta se la puede tratar como si estuviera en equilibrio. Este hecho se conoce como *principio de d'Alembert*.

La ecuación que resulta de la aplicación del principio de d'Alembert es aquella en la cual la suma de todas las fuerzas, incluyendo la fuerza de inercia ficticia, se hace igual a cero. El enfoque de d'Alembert se aplica tanto a sistemas traslacionales como rotacionales y proporciona una simplificación analítica importante en situaciones complicadas que involucran traslación y rotación combinadas. Es importante observar que en este método la fuerza de inercia es una fuerza ficticia que se agrega mentalmente al sistema sólo para propósitos de análisis, más no es una fuerza real capaz de originar que se mueva un cuerpo que inicialmente estaba en reposo.

La principal ventaja del método de d'Alembert sobre la aplicación directa de la segunda ley de Newton es que no necesitamos considerar la acción de fuerzas y pares respecto a un eje a través de su centro de gravedad. En lugar de eso podemos resumir tal acción con respecto al eje que consideremos conveniente. Demostraremos esta ventaja mediante un ejemplo.

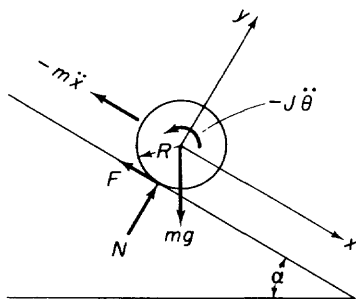
**Ejemplo 2-9.** Considérese el mismo sistema propuesto en el Ejemplo 2-8. Un cilindro rueda hacia abajo en un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es  $\alpha$  (véase la Fig. 2-20). En este ejemplo supondremos que no hay deslizamiento. Obtengamos  $x(t)$  como una función del tiempo  $t$  utilizando el enfoque de d'Alembert. Supongamos que  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\theta_0 = 0$  y  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

Al aplicar el principio de d'Alembert a este problema, tratamos al cilindro como si estuviera en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas y pares, incluyendo la fuerza de inercia ficticia  $m\ddot{x}$  y el par ficticio  $J\ddot{\theta}$ , como se muestra en la Fig. 2-21. Podemos resumir los pares respecto a cualquier eje en el cilindro. Sin embargo, es conveniente sumar los pares con respecto al eje en el punto de contacto entre el cilindro y el plano inclinado, ya que al hacerlo así eliminamos las fuerzas  $F$  y  $N$ . Entonces, obtenemos

$$mgR \sin \alpha - J\ddot{\theta} - m\ddot{x}R = 0 \quad (2-31)$$

Puesto que no hay deslizamiento,  $x = R\theta$ . El momento de inercia  $J$  es igual a  $\frac{1}{2}mR^2$ .





**Fig. 2-21.** Cilindro homogéneo en un plano inclinado indicando todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro incluyendo una fuerza de inercia ficticia y un par ficticio.

Por lo tanto, la Ec. (2-21) puede simplificarse a

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \alpha \quad (2-32)$$

Nótese que la Ec. (2-32) es idéntica a la Ec. (2-30). Integrando la Ec. (2-32) dos veces con respecto a  $t$  y observando que  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , tenemos

$$x = \frac{1}{3}gt^2 \sin \alpha$$

Esta última ecuación da el desplazamiento lineal del centro de masa del cilindro.

Comparemos el enfoque de d'Alembert con el enfoque de Newton en la solución. En el método de Newton las ecuaciones de movimiento en términos de  $x$  y  $\theta$  se dan mediante dos ecuaciones, las Ecs. (2-28) y (2-29), en tanto que en el enfoque de d'Alembert obtenemos solamente una ecuación, la Ec. (2-31). Así pues, el enfoque de d'Alembert simplifica el proceso de obtención del resultado final.

## 2-5 TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA

Si la fuerza se considera una medida de esfuerzo, entonces el *trabajo* es una medida de la realización y *energía* es la capacidad de hacer trabajo. El concepto de trabajo no admite factor de tiempo alguno. Cuando se considera un factor de tiempo, debe introducirse el concepto de potencia. *Potencia* es trabajo por unidad de tiempo.

En las siguientes páginas los conceptos de trabajo, energía y potencia (los cuales se ofrecen normalmente en cursos de física para universitarios) son tratados con algún detalle, después de lo cual se expone un método, basado en la ley de conservación de la energía, para obtener las ecuaciones de movimiento de sistemas.

**Trabajo.** El *trabajo* realizado en un sistema mecánico es el producto de la fuerza multiplicada por la distancia (o el par multiplicado por el desplazamiento angular) a través de la cual se ejerce, midiendo tanto la fuerza como la distancia en la misma dirección. Por ejemplo, si se empuja un cuerpo con una fuerza horizontal de  $F$  newtons a lo largo de un piso ho-

horizontal una distancia de  $x$  metros, el trabajo  $W$  realizado al empujar el cuerpo es

$$W = Fx \quad \text{N-m}$$

**Ejemplo 2-10.** En un resorte traslacional con constante de resorte  $k$ , el trabajo realizado por un desplazamiento infinitesimal  $dx$  está dado por

$$\text{Trabajo total realizado} = F dx = kx dx$$

El trabajo total realizado sobre cualquier desplazamiento es la integral del trabajo hecho por un desplazamiento infinitesimal  $dx$ . Si el desplazamiento total es  $x$ , entonces

$$\text{Trabajo total realizado} = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$

De igual manera, en un resorte torsional

$$\text{Trabajo total realizado} = \int_0^\theta k\theta d\theta = \frac{1}{2}k\theta^2$$

donde  $k$  es la constante del resorte torsional y  $\theta$  es el desplazamiento angular.

**Unidades de trabajo.** A continuación se enlistan unidades de trabajo de diferentes sistemas de unidades.

*Sistema de unidades en unidades SI y mks (métrico absoluto).* La fuerza se mide en newtons y la distancia en metros. Así pues, la unidad de trabajo es el N-m. Nótese que

$$1 \text{ N-m} = 1 \text{ joule} = 1 \text{ J}$$

*Sistema de unidades inglés de ingeniería.* La fuerza se mide en libras y la distancia en pies. Así pues, la unidad de trabajo es el ft-lb<sub>f</sub>.

$$1 \text{ ft-lb}_f = 1.356 \text{ J} = 1.285 \times 10^{-3} \text{ Btu}$$

$$1 \text{ Btu} = 778 \text{ ft-lb}_f$$

*Sistema de unidades cgs (métrico absoluto).* La unidad de trabajo es la dina-cm o erg. Nótese que

$$10^7 \text{ erg} = 10^7 \text{ dyn-cm} = 1 \text{ J}$$

*Sistema de unidades métrico de ingeniería (gravitacional).* La unidad de trabajo es el kg<sub>f</sub>-m. Nótese que

$$1 \text{ kg}_f\text{-m} = 9.81 \times 10^7 \text{ dyn-cm} = 9.81 \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 0.102 \text{ kg}_f\text{-m}$$

*Sistema de unidades inglés absoluto.* La unidad de trabajo es el pie-poundal (ft-pdl). Nótese que

$$1 \text{ ft-pdl} = 0.0421 \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 23.7 \text{ ft-pdl}$$

**Energía.** En forma general, la energía puede definirse como la capacidad de aptitud para hacer trabajo. Se la encuentra en muy diferentes formas y puede convertirse de una forma a otra. Por ejemplo, un motor eléctrico convierte energía eléctrica en energía mecánica, una batería convierte energía química en energía eléctrica, etcétera.

Se dice que un sistema posee energía cuando puede trabajar. Cuando el sistema hace trabajo mecánico, la energía del sistema decrece en una cantidad igual a la energía requerida para el trabajo realizado. Las unidades de energía son las mismas que las unidades de trabajo: newton-m, joule, kcal, Btu, etcétera.

De acuerdo con la ley de conservación de la energía, la energía no puede crearse ni destruirse. Esto significa que el incremento en la energía total dentro de un sistema es igual a la entrada de energía neta al sistema. De modo que si no hay entrada de energía, no hay cambio en la energía total del sistema.

La energía que un cuerpo posee en razón de su posición se denomina energía *potencial*, en tanto que la energía que tiene el cuerpo como resultado de su velocidad se llama energía *cinética*.

**Energía potencial.** En un sistema mecánico solamente los elementos de masa y resorte pueden almacenar energía potencial. El cambio en la energía potencial almacenada en un sistema es igual al trabajo requerido para cambiar la configuración del sistema. La energía potencial se mide siempre con referencia a un nivel dado y es relativa respecto de ese nivel.

La energía potencial es el trabajo hecho por la fuerza externa. En un cuerpo de masa  $m$  en un campo gravitacional, la energía potencial  $U$  medida desde algún nivel de referencia es  $mg$  veces la altitud  $h$  medida desde el mismo nivel de referencia o

$$U = \int_0^h mg \, dx = mgh$$

Obsérvese que si el cuerpo cae, tiene la capacidad de hacer trabajo, puesto que el peso  $mg$  (fuerza) viajará una distancia  $h$  cuando se le suelte. Una vez que el cuerpo se suelta, la energía potencial decrece. La energía potencial perdida se convierte en energía cinética.

En un resorte traslacional, la energía potencial  $U$  es igual al trabajo neto hecho sobre él por las fuerzas que actúan en sus extremos cuando es compri-

mido o estirado. Puesto que la fuerza  $F$  es igual a  $kx$ , donde  $x$  es el desplazamiento neto de los extremos del resorte, la energía almacenada total es

$$U = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Si los valores inicial y final de  $x$  son  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente, entonces

$$\text{Cambio en energía potencial } \Delta U = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

Nótese que la energía potencial almacenada en un resorte no depende de que sea comprimido o estirado.

En el caso de un resorte torsional

$$\text{Cambio en energía potencial } \Delta U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} k\theta d\theta = \frac{1}{2}k\theta_2^2 - \frac{1}{2}k\theta_1^2$$

**Energía cinética.** Los elementos de inercia sólo pueden almacenar energía cinética en los sistemas mecánicos. Una masa  $m$  en traslación pura a velocidad  $v$  tiene energía cinética  $T = \frac{1}{2}mv^2$ , mientras que un momento de inercia  $J$  en rotación pura a velocidad angular  $\dot{\theta}$  tiene una energía cinética  $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ . Un cambio en la energía cinética de la masa  $m$  es igual al trabajo hecho sobre ella por la aplicación de una fuerza que la acelera o desacelera. Así pues, un cambio en la energía cinética  $T$  de una masa  $m$  moviéndose en línea recta es

$$\begin{aligned} \text{Cambio en energía cinética} &= \Delta T = \Delta W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} Fv dt = \int_{v_1}^{v_2} m\dot{v}v dt = \int_{v_1}^{v_2} mv dv \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{aligned}$$

donde  $x(t_1) = x_1$ ,  $x(t_2) = x_2$ ,  $v(t_1) = v_1$ , y  $v(t_2) = v_2$ . Nótese que la energía cinética almacenada en la masa no depende del signo de la velocidad  $v$ .

Un cambio en la energía cinética de un momento de inercia en rotación pura a la velocidad angular  $\dot{\theta}$  es

$$\text{Cambio en energía cinética } \Delta T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2$$

donde  $J$  es el momento de inercia respecto al eje de rotación,  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}(t_1)$ , y  $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}(t_2)$ .

**Ejemplo 2-11.** Un auto con una masa de 1500 kg se mueve con una velocidad de 50 km/h. ¿Cuál es la fuerza requerida para detener al auto a una distancia de 100 m?

La velocidad de 50 km/h es igual a 13.89 m/s. Por lo tanto,

$$v = 50 \text{ km/h} = 13.89 \text{ m/s}$$

La energía cinética  $T$  es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1500 \times (13.89)^2 \\ &= 1.447 \times 10^5 \frac{\text{kg-m}^2}{\text{s}^2} \\ &= 1.447 \times 10^5 \text{ N-m} \end{aligned}$$

La fuerza  $F$  requerida para detener al auto puede obtenerse mediante el igualamiento de  $Fx$  (donde  $x$  es la distancia) y  $T$  o igualando el trabajo realizado  $Fx$  con la energía cinética  $T$ .

$$Fx = T$$

Así pues,

$$\begin{aligned} F &= \frac{T}{x} = \frac{1.447 \times 10^5 \text{ N-m}}{100} \\ &= 1447 \text{ N} \end{aligned}$$

Si los valores numéricos de este ejemplo se convierten al sistema de unidades inglés de ingeniería, entonces

$$\text{masa del auto} = 1500 \times 0.0685 = 102.8 \text{ slugs}$$

$$(\text{peso del auto} = mg = 3307 \text{ lb}_f)$$

$$v = 50 \text{ km/h} = 31.07 \text{ mi/h} = 45.57 \text{ ft/s}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 102.8 \times (45.57)^2 \\ &= 1.067 \times 10^5 \frac{\text{slug-ft}^2}{\text{s}^2} = 1.067 \times 10^5 \text{ ft-lb}_f \end{aligned}$$

$$x = 100 \text{ m} = 328.1 \text{ ft}$$

Por lo tanto, la fuerza requerida para detener el carro es

$$F = \frac{T}{x} = \frac{1.067 \times 10^5 \text{ ft-lb}_f}{328.1} = 325.3 \text{ lb}_f$$

**Energía disipada.** Considérese el amortiguador mostrado en la Fig. 2-22 en el cual uno de los extremos está fijo y el otro extremo se mueve de  $x_1$  a  $x_2$ . La energía disipada  $\Delta W$  del amortiguador es igual al trabajo neto realizado sobre él.

$$\Delta W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} b\dot{x} dx = b \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} \frac{dx}{dt} dt = b \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt$$

La energía del elemento amortiguador se disipa siempre sin importar el signo de  $\dot{x}$ .

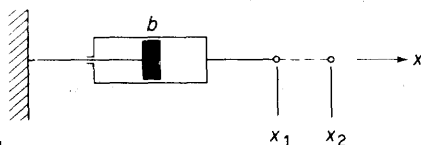


Fig. 2-22. Amortiguador.

**Potencia.** La *potencia* es la realización de trabajo que varía con respecto al tiempo. Esto es

$$\text{Potencia} = P = \frac{dW}{dt}$$

donde  $dW$  representa el trabajo hecho durante un intervalo de tiempo  $dt$ . La potencia media durante un tiempo de duración  $t_2 - t_1$  segundos puede determinarse midiendo el trabajo hecho en  $t_2 - t_1$  segundos.

$$\text{Potencia media} = \frac{\text{trabajo realizado } (t_2 - t_1) \text{ segundos}}{(t_2 - t_1) \text{ segundos}}$$

En los sistemas de unidades SI o mks (métrico absoluto el trabajo realizado se mide en newton-metro y el tiempo en segundos. La unidad de potencia es el newton-metro por segundo o watt.

$$1 \text{ N-m/s} = 1 \text{ W}$$

En el sistema de unidades inglés de ingeniería, el trabajo realizado se mide en ft-lb<sub>f</sub> y el tiempo en segundos. La unidad de potencia es el ft-lb<sub>f</sub>/s. La potencia de 550 ft-lb<sub>f</sub>/s se denomina 1 caballo de fuerza (hp), así es que

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft-lb}_f/\text{s} = 33\,000 \text{ ft-lb}_f/\text{min} = 745.7 \text{ W}$$

Y en el sistema de unidades métrico de ingeniería el trabajo realizado se mide en kg<sub>f</sub>-m y el tiempo en segundos. La unidad de potencia es el kg<sub>f</sub>-m/s.

$$1 \text{ kg}_f\text{-m/s} = 9.81 \text{ W}$$

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 0.102 \text{ kg}_f\text{-m/s}$$

**Ejemplo 2-12.** Encuentre la potencia para elevar un cuerpo de masa de 500 kg a razón de 20 m/min.

Definamos el desplazamiento por segundo como  $x$ . Entonces,

$$\text{Trabajo realizado en un segundo} = mgx = 500 \times 9.81 \times \frac{20}{60} \frac{\text{kg-m}^2}{\text{s}^2} = 1635 \text{ N-m}$$

$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo realizado en un segundo}}{\text{un segundo}} = \frac{1635 \text{ W}}{1 \text{ s}} = 1635 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Así pues, la potencia requerida es de 1635 W.

**Potencia y energía.** La potencia requerida para comprimir o estirar un resorte es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx}{dt} = F\dot{x} = kx\dot{x}$$

Puesto que la energía potencial de un resorte comprimido o estirado para una cantidad  $x$  es  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , obtenemos

$$P = kx\dot{x} = \dot{U}$$

Nótese que en el elemento resorte la potencia  $P$  es la razón de cambio de la energía potencial  $U$ .

La potencia requerida para acelerar en línea recta una masa es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx}{dt} = F\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x}$$

Puesto que la energía cinética de una masa  $m$  moviéndose a la velocidad  $v$  es  $T = \frac{1}{2}mv^2$ ,

$$P = m\ddot{x}\dot{x} = m\dot{v}v = \dot{T}$$

Por lo tanto, para la masa  $m$  que se mueve en línea recta, la potencia  $P$  es la razón de cambio de la energía cinética  $T$ .

La potencia disipada en el amortiguador de cilindro es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx}{dt} = F\dot{x}$$

Puesto que  $F = b\dot{x}$ , donde  $b$  es el coeficiente de fricción viscosa, tenemos

$$P = b\dot{x}^2$$

La potencia  $P$  es la razón a la cual la energía se disipa en el amortiguador. La energía total disipada en un intervalo de tiempo dado  $t_2 - t_1$  es la integral con respecto al tiempo de  $b\dot{x}^2$ , o bien  $\int_{t_1}^{t_2} b\dot{x}^2 dt$ .

Nótese que si la fuerza aplicada por la fuente externa y la velocidad que ésta causa están en la misma dirección, la fuente suministra potencia al sistema. Si la fuerza y la velocidad son opuestas, el sistema está regresando potencia a la fuente. Por ejemplo, un resorte almacena energía cuando se le aplica una fuerza para comprimirlo. Si la fuerza se remueve gradualmente, la fuerza externa y la velocidad tendrán signos opuestos y el resorte entregará potencia.

**Elementos pasivos y elementos activos.** Algunos de los elementos de un sistema (masas y resortes, por ejemplo) almacenan energía. Esta energía puede introducirse al sistema posteriormente. La cantidad introducida, sin embargo, no puede exceder la cantidad que el elemento ha almacenado, a menos que tal elemento almacenara energía de antemano, no puede entregarla al sistema. Debido a esto, tal elemento se denomina *elemento pasivo*. Esto es, los elementos pasivos son elementos no productores de energía. Un sistema que contenga solamente elementos pasivos se denomina *sistema pasivo*. Ejemplo de elementos pasivos son las masas, inercias, amortiguadores y resortes en sistemas mecánicos, e inductores, resistores y capacitores en sistemas eléctricos. Debe observarse que en los sistemas pasivos cada término en la ecuación diferencial del sistema homogéneo tiene el mismo signo.

Un elemento físico que pueda entregar energía externa al sistema se denomina *elemento activo*. Las fuerzas y pares externas en los sistemas mecánicos, y las fuentes de corriente y de voltaje en los sistemas eléctricos son ejemplos de elementos activos.

**Un método de energía para la obtención de ecuaciones de movimiento.** Al principio de este capítulo presentamos dos métodos básicos para obtener las ecuaciones de movimiento de los sistemas mecánicos. Estos métodos se basan en la segunda ley de Newton y el principio de d'Alembert. Se dispone de otros enfoques diferentes para obtener las ecuaciones de movimiento, uno de los cuales se basa en la ley de conservación de la energía. Aquí obtenemos esas ecuaciones por el hecho de que la energía total de un sistema permanece igual si ninguna energía entra o sale del sistema.

En los sistemas mecánicos, la fricción disipa energía en forma de calor. Los sistemas que no incluyen a la fricción se llaman sistemas *conservativos*. Considérese un sistema conservativo en el cual la energía esté en la forma de energía cinética y/o potencial. Puesto que la energía entra y sale en el sistema conservativo en la forma de trabajo mecánico, obtenemos

$$\Delta(T + U) = \Delta W$$

donde  $\Delta(T + U)$  es el cambio en la energía total y  $\Delta W$  es el trabajo neto hecho sobre el sistema debido a la fuerza externa. Si no entra energía externa al sistema, entonces

$$\Delta(T + U) = 0$$

la cual da

$$T + U = \text{constante}$$

Con relación al sistema mecánico mostrado en la Fig. 2-23(a), si suponemos que no hay fricción, el sistema puede considerarse conservativo. La



energía cinética  $T$  y la energía potencial  $U$  están dadas por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2}kx^2$$

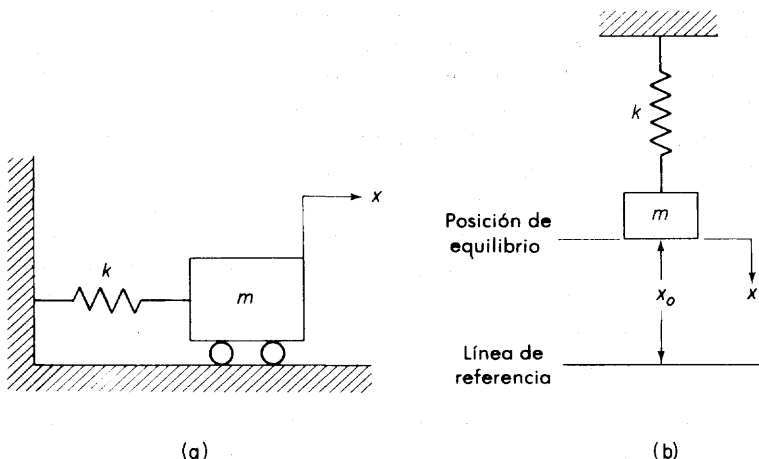


Fig. 2-23. Sistemas mecánicos.

Por lo tanto, en ausencia de cualquier entrada de energía externa,

$$T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

La ecuación de movimiento del sistema puede obtenerse diferenciando la energía total con respecto a  $t$  y haciendo el resultado igual a cero.

$$\frac{d}{dt}(T + U) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0$$

Puesto que  $\dot{x}$  no siempre es cero, tenemos

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

la cual es la ecuación de movimiento del sistema.

Veamos a continuación el sistema mecánico de la Fig. 2-23(b). Aquí no hay amortiguamiento involucrado, por lo tanto, es un sistema conservativo. En este caso, puesto que la masa está suspendida de un resorte, la energía potencial incluye aquella que se debe a la posición del elemento de masa. En la posición de equilibrio, la energía potencial  $U_0$  del sistema es

$$U_0 = mgx_0 + \frac{1}{2}k\delta^2$$

donde  $x_0$  es la posición de equilibrio en un campo gravitacional del elemento de masa sobre una línea de referencia arbitraria y  $\delta$  es la deformación del resorte cuando el sistema está en posición de equilibrio o  $k\delta = mg$ .

La energía potencial instantánea  $U$  es el potencial instantáneo del peso del elemento de masa más la energía elástica instantánea almacenada en el resorte. Así es que

$$\begin{aligned} U &= mg(x_0 - x) + \frac{1}{2}k(\delta + x)^2 \\ &= mgx_0 - mgx + \frac{1}{2}k\delta^2 + k\delta x + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= mgx_0 + \frac{1}{2}k\delta^2 - (mg - k\delta)x + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

Puesto que  $mg = k\delta$ , se sigue que

$$U = U_0 + \frac{1}{2}kx^2$$

Nótese que el incremento en la energía potencial total del sistema se debe al incremento en la energía elástica del resorte que resulta de su deformación desde la posición de equilibrio. Además, debido a que  $x_0$  es el desplazamiento medido desde una línea de referencia arbitraria, es posible encontrar una línea de referencia tal que  $U_0 = 0$ .

La energía cinética del sistema es  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . Puesto que la energía total es constante, obtenemos

$$T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U_0 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

Diferenciando la energía total con respecto a  $t$  y observando que  $U_0$  es constante, tenemos,

$$\frac{d}{dt}(T + U) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

o bien

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0$$

Puesto que  $x$  no siempre es cero, se tiene que

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Ésta es la ecuación de movimiento del sistema.

De este análisis vemos que el sistema mecánico donde el movimiento de la masa se debe solamente a la fuerza de un resorte, el incremento en la energía potencial total del sistema es la energía elástica del resorte que resulta de su deformación desde la configuración de la posición de equilibrio.

**Ejemplo 2-13.** La figura 2-24 muestra un cilindro homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  que tiene la libertad de girar alrededor del eje de rotación y está conectado a la pared por medio de un resorte. Suponiendo que el cilindro gira en una superficie áspera sin

deslizamiento, obténgase la energía cinética y la energía potencial del sistema. Después obténganse las ecuaciones de movimiento basándose en el hecho de que la energía total es constante.

La energía cinética del cilindro es la suma de la energía cinética traslacional del centro de masa y la energía cinética rotacional respecto al eje de rotación.

$$\text{Energía cinética} = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

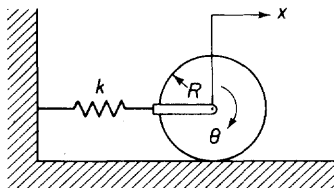


Fig. 2-24. Cilindro homogéneo conectado a una pared a través de un resorte.

La energía potencial del sistema se debe a la deflexión del resorte.

$$\text{Energía potencial} = U = \frac{1}{2}kx^2$$

Puesto que la energía total  $T = U$  es constante en este sistema conservativo (lo cual significa que la pérdida en energía potencial iguala a la ganancia en energía cinética), se infiere que

$$T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

El cilindro rueda sin deslizamiento, lo cual significa que  $x = R\theta$ . Reescribiendo esta última ecuación y observando que el momento de inercia  $J$  es igual a  $\frac{1}{2}mR^2$ , tenemos

$$\frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

Diferenciando ambos miembros de esta última ecuación con respecto a  $t$  queda

$$\frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

o bien

$$(m\ddot{x} + \frac{2}{3}kx)\dot{x} = 0$$

Nótese que  $\dot{x}$  no siempre es cero, y por lo tanto,  $m\ddot{x} + \frac{2}{3}kx$  debe ser idénticamente cero. Por lo tanto,

$$m\ddot{x} + \frac{2}{3}kx = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

Esta ecuación describe el movimiento horizontal del cilindro. Para el movimiento ro-

tacional, sustituimos  $x = R\theta$  en esa ecuación para obtener

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{3m}\theta = 0$$

En cualquiera de las ecuaciones de movimiento la frecuencia natural de vibración es la misma  $\omega_n = \sqrt{2k/(3m)}$  rad/s.

**Comentarios.** La utilización de la ley de conservación de la energía para obtener las ecuaciones de movimiento es fácil en sistemas simples. Sin embargo, este método puede no ser conveniente en sistemas a menos que *sean* simples. Lagrange desarrolló una forma más general de abordarlo basada en el principio de energía. (Para los detalles, consulte el apéndice C.) Puede usarse para sistemas más generales. De hecho, en algunos casos, es más conveniente usar el método de Lagrange que el enfoque convencional de Newton.

En un sistema mecánico complicado, es aconsejable obtener las ecuaciones de movimiento utilizando dos métodos diferentes para asegurarse que las ecuaciones están correctas de los métodos basados en la segunda ley de Newton, el principio de d'Alembert y otros más.

## 2-6 TRANSFORMADORES DE MOVIMIENTO, ENERGÍA Y POTENCIA

En los sistemas mecánicos se encuentran numerosos transformadores de movimiento, energía y potencia. Sin embargo, expondremos sólo transformadores de movimiento mecánico y transformadores de energía y potencia de mecánica a mecánica (tales como una palanca, un bloque y una polea, un polipasto) que puedan usarse para mover una carga pesada en una distancia corta mediante la aplicación de una fuerza ligera en una distancia grande. Finalmente se describen sistemas de trenes de engranes; esto es, sistemas que actúan como transformadores de movimiento o transformadores de potencia, dependiendo de la aplicación.

**Yugo escocés.** La figura 2-25(a) muestra un mecanismo de yugo escocés, el cual produce un movimiento sinusoidal (senoidal) a la salida de un cigüeñal girando a velocidad constante. Siendo un transformador de movimiento, este dispositivo se usa como fuente de movimiento en sistemas mecánicos. Sin embargo, esta fuente de movimiento puede convertirse en una fuente de fuerza si se le conecta al elemento de carga a través de un resorte suave, como se muestra en la Fig. 2-25(b).

**Palanca.** Una palanca es un dispositivo que transmite energía de una parte de un sistema mecánico a otra. En la Fig. 2-26 se muestra un sistema

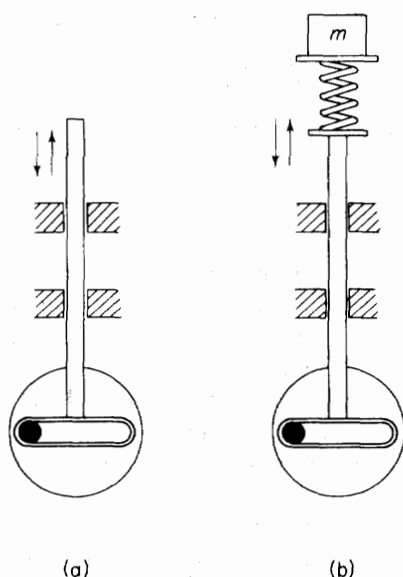


Fig. 2-25. Mecanismos de yugo escocés.

de palanca simple. El propósito de tal palanca es obtener una gran ventaja mecánica. La ventaja mecánica de una máquina se define como la relación

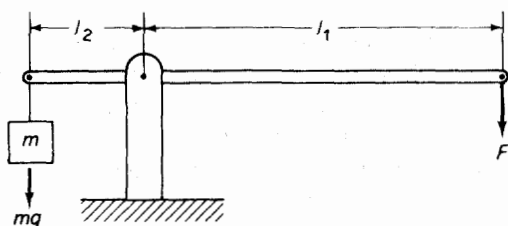


Fig. 2-26. Sistema de palanca.

entre la fuerza ejercida por la máquina y la fuerza impuesta a la máquina o

$$\text{Ventaja mecánica} = MA = \frac{\text{fuerza de salida}}{\text{fuerza de entrada}}$$

En el presente sistema de palanca, si  $mg$  es el peso que se va a mover (o fuerza que se va a balancear), la ventaja mecánica es  $mg/F$ . Puesto que  $F l_1 = mg l_2$ , la ventaja mecánica es  $l_1/l_2$ . Nótese que la fuerza de entrada (fuerza requerida para mover la carga o peso  $mg$ ) es la fuerza de salida (carga o peso  $mg$ ) dividida entre la ventaja mecánica o

$$F = \frac{mg}{MA} = \frac{l_2}{l_1} mg$$

**Bloque y polea.** El bloque y polea se refiere a un dispositivo en el cual una carga pesada se eleva mediante una fuerza comparativamente pequeña. Casi siempre el dispositivo se usa para mover una carga pesada en una distancia corta aplicando una carga ligera que se mueve una distancia grande. La figura 2-27(a) muestra un polipasto de dos poleas. Aquí un cable se fija a la polea superior, pasa alrededor de la polea inferior y después regresa alrededor de la polea superior hasta la fuerza elevadora  $F$ . Un cable diferente que sostiene el peso  $mg$  se sujeta a la polea inferior. En el presente análisis, incluimos el peso de las poleas y el cable en el peso de la carga  $mg$ . También, despreciamos cualesquiera fuerza de fricción que pueda existir en el sistema. Nótese que los dos cables soportan a la polea inferior y al peso en este sistema. Puesto que  $F_1$  y  $F_2$  son fuerzas (de tensión) en el mismo cable, son iguales, y por lo tanto,

$$F_1 = F_2 = \frac{mg}{2}$$

En la Fig. 2-27(b) se muestra un polipasto de cuatro poleas. (En el polipasto real, las dos poleas superiores son del mismo tamaño y están en la misma flecha. Lo mismo se cumple en las dos poleas inferiores.) En este caso, son cuatro los cables que soportan el peso  $mg$ . Puesto que la tensión del cable es la misma a lo largo de toda su longitud, se infiere que

$$4F = mg$$

donde  $F$  es la tensión en el cable y es la fuerza elevadora. En consecuencia,

$$F = \frac{mg}{4}$$

La ventaja mecánica  $mg/F$  es 4. La entrada de trabajo por la fuerza de tracción es  $Fx$ , donde  $x$  es la longitud del cable jalado por la fuerza elevadora y debe ser igual al trabajo de salida  $mgh$ . Por lo tanto,

$$Fx = mgh$$

Nótese que la altura  $h$  a la cual se eleva el peso es la distancia  $x$  recorrida por el cable elevador dividida entre la ventaja mecánica o  $h = x/4$ .

En razón de que no se obtienen grandes valores de ventaja mecánica con facilidad, el bloque y polea generalmente se limita a cargas pequeñas.

**Polipasto.** La figura 2-28 muestra un polipasto de cadena, un dispositivo que difiere del de bloque y polea en que la cadena es continua. El uso de una polea diferencial proporciona una gran ventaja mecánica. En esta figura las dos poleas superiores son de diámetros diferentes, pero están sosteni-

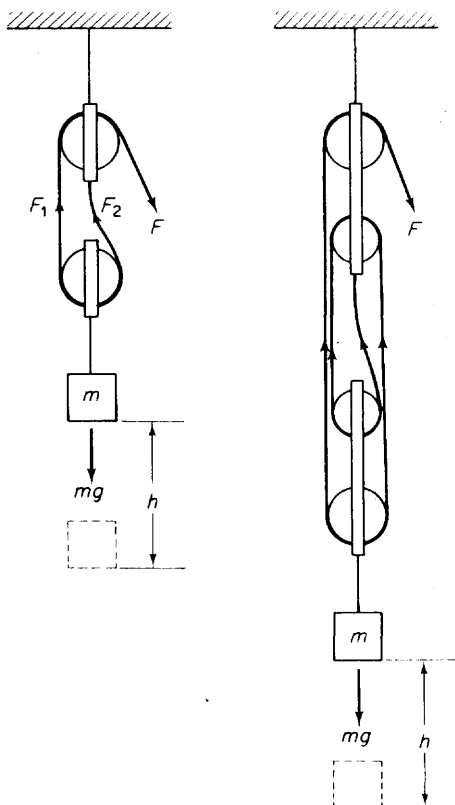


Fig. 2-27. (a) Polipasto de dos poleas;  
(b) polipasto de cuatro poleas.

(a)

(b)

das por la misma flecha, y por lo tanto, giran el mismo ángulo. Si se jala la cadena  $a$ , las poleas superiores giran en el sentido de las manecillas del reloj. Al terminar de enrollarse la polea grande de radio  $R$ , la cadena  $b$  se desenrolla de la pequeña polea de radio  $r$ . El resultado es que la carga  $mg$  se levanta con una gran ventaja mecánica.

Si la polea superior gira un ángulo de  $\theta$  radianes, la cadena  $c$  se desenrolla de la polea pequeña una distancia  $r\theta$  y, al mismo tiempo, la cadena  $d$  se enrolla en la polea grande una distancia  $R\theta$ . Así pues, el resultado de acortar el ciclo  $cd$  es  $\theta(R - r)$ . La carga  $mg$  se levanta una altura igual a  $\frac{1}{2}\theta(R - r)$ .

El trabajo de entrada  $FR\theta$ , donde  $F$  es la fuerza de tracción de la cadena y  $R\theta$  es la distancia recorrida, debe ser igual a la salida de trabajo  $\frac{1}{2}mg\theta(R - r)$ . Por lo tanto,

$$FR\theta = \frac{1}{2}mg\theta(R - r)$$

La ventaja mecánica es

$$MA = \frac{mg}{F} = \frac{2R}{R - r}$$

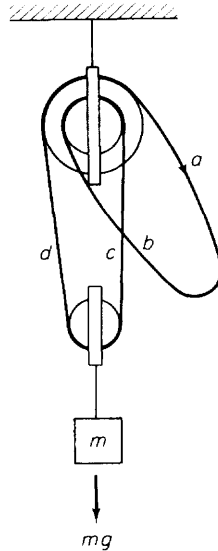


Fig. 2-28. Polipasto de cadena.

Puesto que la ventaja puede ser muy grande en un polipasto, este dispositivo se usa para elevar cargas pesadas.

Nótese que si  $R = r$ , la ventaja mecánica se hace infinita, pero entonces el polipasto no levantará la carga en lo absoluto. En la práctica,  $R - r$  se hace lo suficientemente pequeña para sostener la carga en cualquier posición, durante mucho tiempo, con una fuerza de tracción muy pequeña sobre la cadena  $a$ . En el análisis precedente del polipasto, no consideramos la fricción del sistema; en realidad ésta existe y suministra en forma conveniente la pequeña fuerza de tracción necesaria. A causa de esto, no se requiere otra fuerza de tracción para sostener el peso indefinidamente.

**Ejemplo 2-14.** Considérese el polipasto mostrado en la Fig. 2-28 y supóngase que las dos poleas superiores tienen radios de 0.4 m y 0.38 m, respectivamente. ¿Cuál es la ventaja mecánica? Encuentre también la fuerza de tracción requerida para levantar un cuerpo de masa de 500 kg.

La ventaja mecánica es

$$MA = \frac{2R}{R - r} = \frac{2 \times 0.4}{0.4 - 0.38} = 40$$



La fuerza de tracción  $F$  es

$$F = \frac{mg}{MA} = \frac{500 \times 9.81}{40} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 122.6 \text{ N}$$

**Tren de engranes.** Los trenes de engrane se utilizan frecuentemente en los sistemas mecánicos para reducir la velocidad, amplificar el par o para obtener la transferencia de potencia más eficiente apareando el miembro impulsor con una carga dada. La figura 2-29 ilustra un sistema de engranes

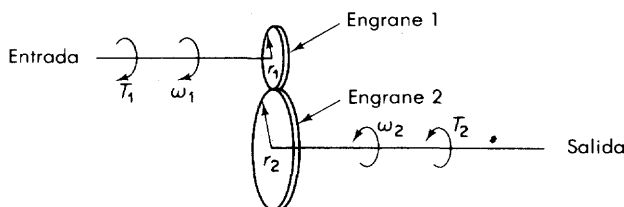


Fig. 2-29. Sistema de tren de engranes.

simple en el cual el tren de engranes transmite movimiento y par del miembro de entrada al miembro de salida. Si los radios del engrane 1 y en el engrane 2 son  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente, y el número de dientes del engrane 1 y del engrane 2 son  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente, entonces

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

En razón de que las velocidades de las superficies en el punto de contacto de los dos engranes deben ser idénticas, tenemos

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$$

donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las velocidades angulares de los engranes 1 y 2, respectivamente. Por lo tanto,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Si despreciamos las pérdidas por fricción, el tren de engranes transmite la potencia sin cambio. En otras palabras, si el par aplicado a la flecha de entrada es  $T_1$  y el par transmitido a la flecha de salida es  $T_2$ , entonces

$$T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2$$

**Ejemplo 2-15.** Para ilustrar el concepto, considérese el sistema mostrado en la Fig. 2-30. Aquí se impulsa una carga mediante un motor a través de un tren de engranes. Supo-

niendo que la rigidez de las flechas del tren de engranes es infinita, que no hay juego ni deformación elástica, y que el número de dientes de cada engrane es proporcional al radio del engrane, encuéntrase la inercia equivalente y la fricción equivalente referidas a la flecha del motor (flecha 1) y también las correspondientes referidas a la flecha de la carga (flecha 2). Los números de dientes del engrane 1 y el engrane 2 son  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente. Las velocidades angulares de la flecha 1 y la flecha 2 son  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , respectivamente, en tanto que la inercia y el coeficiente de fricción viscosa de cada componente de los trenes de engranes se expresan por  $J_1$ ,  $b_1$  y  $J_2$  y  $b_2$ , respectivamente.

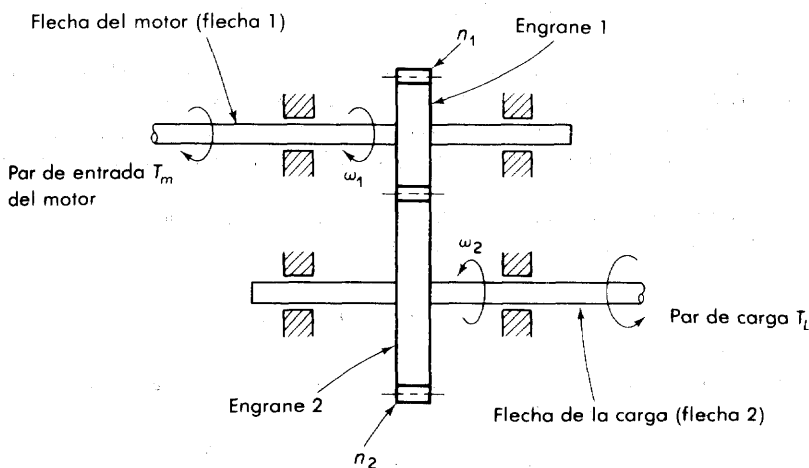


Fig. 2-30. Sistema de tren de engranes.

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema se pueden obtener las siguientes dos ecuaciones. Para la flecha del motor (flecha 1),

$$J_1 \dot{\omega}_1 + b_1 \omega_1 + T_1 = T_m \quad (2-33)$$

donde  $T_m$  es el par desarrollado por el motor y  $T_1$  es el par de la carga en el engrane 1 debida al resto del tren de engranes. Para la flecha de la carga (flecha 2),

$$J_2 \dot{\omega}_2 + b_2 \omega_2 + T_L = T_2 \quad (2-34)$$

donde  $T_2$  es el par transmitido al engrane 2 y  $T_1$  es el par de la carga. Puesto que el trabajo hecho por el engrane 1 es igual al del engrane 2,

$$T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2$$

o bien

$$T_1 = T_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = T_2 \frac{n_1}{n_2}$$

Si  $n_1/n_2 < 1$ , el radio del engrane reduce la velocidad amplificando el par. La elimi-

nación de  $T_1$  y  $T_2$  de las Ecs. (2-33) y (2-34) da

$$J_1 \dot{\omega}_1 + b_1 \omega_1 + \frac{n_1}{n_2} (J_2 \dot{\omega}_2 + b_2 \omega_2 + T_L) = T_m \quad (2-35)$$

Puesto que  $\omega_2 = (n_1/n_2)\omega_1$ , eliminando  $\omega_2$  de la Ec. (2-35) se tiene

$$\left[ J_1 + \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 J_2 \right] \dot{\omega}_1 + \left[ b_1 + \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 b_2 \right] \omega_1 + \left( \frac{n_1}{n_2} \right) T_L = T_m \quad (2-36)$$

Así pues, la inercia equivalente y el coeficiente de fricción viscosa del tren de engranes referidos a la flecha 1 están dados por

$$J_{1 \text{ eq}} = J_1 + \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 J_2, \quad b_{1 \text{ eq}} = b_1 + \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 b_2$$

El efecto de  $J_2$  en la inercia equivalente  $J_{1 \text{ eq}}$  se determina mediante la relación  $n_1/n_2$ . En trenes de engranes reductores de velocidad, la relación  $n_1/n_2$  es mucho menor que la unidad. Si  $n_1/n_2 \ll 1$ , entonces el efecto de  $J_2$  en la inercia equivalente  $J_{1 \text{ eq}}$  es despreciable. Un comentario semejante se aplica a la fricción equivalente del tren de engranes.

En términos de la inercia equivalente  $J_{1 \text{ eq}}$  y el coeficiente de fricción viscosa  $b_{1 \text{ eq}}$ , la Ec. (2-36) puede simplificarse para dar

$$J_{1 \text{ eq}} \dot{\omega}_1 + b_{1 \text{ eq}} \omega_1 + n T_L = T_m$$

donde  $n = n_1/n_2$ .

La inercia equivalente y el coeficiente de fricción viscosa equivalente del tren de engranes referidos a la flecha 2 son

$$J_{2 \text{ eq}} = J_2 + \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 J_1, \quad b_{2 \text{ eq}} = b_2 + \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 b_1$$

Así es que la relación entre  $J_{1 \text{ eq}}$  y  $J_{2 \text{ eq}}$  es

$$J_{1 \text{ eq}} = \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 J_{2 \text{ eq}}$$

y la correspondiente entre  $b_{1 \text{ eq}}$  y  $b_{2 \text{ eq}}$  es

$$b_{1 \text{ eq}} = \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 b_{2 \text{ eq}}$$

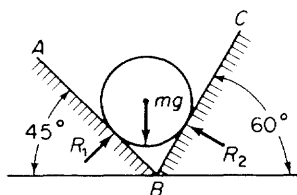
## BIBLIOGRAFÍA

- 2-1 CANNON, R. H., *Dynamics of Physical Systems*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1967.
- 2-2 DEN HARTOG, J.P., *Mechanical Vibrations*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1947.
- 2-3 RESWICK, J. B., AND C.K. TAFT, *Introduction to Dynamic Systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1967.
- 2-4 SEELY, S., *Dynamic Systems Analysis*, New York: Reinhold Publishing Corp., 1964.

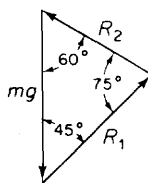
- 2-5 SHEARER, J. L., A. T. MURPHY, AND H. H. RICHARDSON, *Introduction to System Dynamics*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967.

## EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

**PROBLEMA A-2-1.** Una bola de acero de masa de 10 kg está sostenida por la pared  $ABC$  (véase la Fig. 2-31). Encuéntrense las fuerzas de reacción  $R_1$  y  $R_2$ .



**Fig. 2-31.** Bola de acero sostenida por paredes.



**Fig. 2-32.** Diagrama de balance de fuerzas.

**Solución.** Las tres fuerzas  $mg$ ,  $R_1$  y  $R_2$  deben balancearse como se muestra en la Fig. (2-32). De esa figura obtenemos

$$\frac{R_1}{\sin 60^\circ} = \frac{R_2}{\sin 45^\circ} = \frac{mg}{\sin 75^\circ}$$

o bien

$$\frac{R_1}{0.866} = \frac{R_2}{0.707} = \frac{10 \times 9.81}{0.966}$$

Por lo tanto,

$$R_1 = 87.9 \text{ N}, \quad R_2 = 71.8 \text{ N}$$

**PROBLEMA A-2-2.** En el sistema que se muestra en la Fig. 2-33 una barra de acero está articulada en el punto A. El alambre  $CBP$  sostiene una masa de 10 kg. Hállese la fuerza de reacción  $F_1$  que actúa sobre la barra  $AB$  y la tensión  $F_2$  en el alambre.

**Solución.** Las tres fuerzas  $mg$ ,  $F_1$  y  $F_2$  deben balancearse como en la Fig. 2-34. De la figura

$$\frac{F_1}{\sin 120^\circ} = \frac{F_2}{\sin 30^\circ} = \frac{mg}{\sin 30^\circ}$$

o bien

$$\frac{F_1}{0.866} = \frac{F_2}{0.5} = \frac{10 \times 9.81}{0.5}$$

Por lo tanto,

$$F_1 = 169.9 \text{ N}, \quad F_2 = 98.1 \text{ N}$$

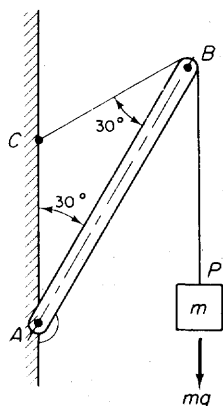


Fig. 2-33. Sistema mecánico.

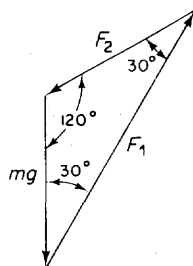
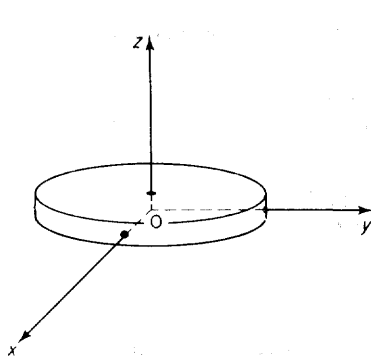
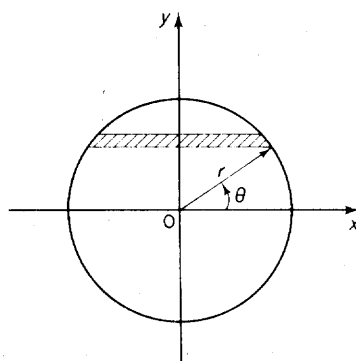


Fig. 2-34. Diagrama de balance de fuerzas.

**PROBLEMA A-2-3.** En el disco homogéneo de masa  $m$  y radio  $r$  que se muestra en la Fig. 2-35(a), calcúlese los momentos de inercia respecto a los ejes  $x$  y  $z$ . Supóngase que el sistema coordenado  $xyz$  tiene su origen en el centro de gravedad y que el disco es simétrico con respecto a cada eje.



(a)



(b)

**Fig. 2-35.** (a) Disco homogéneo; (b) disco mostrado con sistemas de coordenadas rectangulares y polares.

**Solución.** Definase

$$\rho = \frac{m}{\pi r^2}$$

Entonces el momento de inercia  $J_x$  respecto al eje  $x$  está dado por

$$J_x = \int_{-r}^r y^2 \rho (2\sqrt{r^2 - y^2}) dy$$

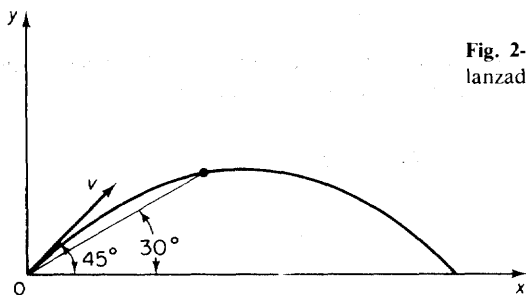
Al cambiar el sistema de coordenadas rectangulares por un sistema de coordenadas polares, como en la Fig. 2-35(b), obtenemos  $y = r \sin \theta$ . Así pues

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r \sin \theta)^2 \rho (2r \cos \theta) r \cos \theta d\theta \\ &= r^2 \rho 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4\rho r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4\rho r^4 \left[ \frac{1}{8}(\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} \rho r^4 \pi \\ &= \frac{1}{4} m r^2 \end{aligned}$$

De manera semejante,  $J_y = \frac{1}{4} m r^2$ . Por lo tanto, el momento de inercia  $J_z$  respecto al eje  $z$  es

$$J_z = J_x + J_y = \frac{1}{2} m r^2$$

**PROBLEMA A-2-4.** Una bola de masa  $m$  se lanza al aire en una dirección a  $45^\circ$  del horizonte. Después de 3 segundos la bola se ve en una dirección a  $30^\circ$  del horizonte (Fig. 2-36). Despreciando la fricción del aire, encuentrese la velocidad inicial  $v$  de la bola.



**Fig. 2-36.** (a) Movimiento de una bola lanzada al aire.

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento de la bola en las direcciones  $x$  y  $y$  son

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

Integrando esas ecuaciones, encontramos

$$\dot{x}(t) = v \cos 45^\circ$$

$$x(t) = (v \cos 45^\circ)t$$

y

$$\dot{y}(t) = -gt + v \sin 45^\circ$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v \sin 45^\circ)t$$

donde usamos las condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v \cos 45^\circ$ ,  $y(0) = 0$  y  $\dot{y}(0) = v \sin 45^\circ$ .

En  $t = 3$  segundos

$$\frac{y(3)}{x(3)} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Puesto que  $x(3) = (0.707v) \times 3$  y  $y(3) = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times 3^2 + (0.707v) \times 3$ , obtenemos

$$\frac{-\frac{1}{2} \times 9.81 \times 9 + (0.707v) \times 3}{(0.707v) \times 3} = \frac{1}{1.732}$$

Resolviendo esta ecuación para  $v$  da

$$v = 49.2 \text{ m/s}$$

**PROBLEMA A-2-5.** Se aplica el freno a un auto que viaja a la velocidad constante de 90 km/h. Si la aceleración  $\alpha$  originada por la acción de frenado es de  $5 \text{ m/s}^2$ , encuentre el tiempo y la distancia antes de que el auto se detenga.

**Solución.** Nótese que

$$90 \text{ km/s}^2 = 25 \text{ m/s}$$

La ecuación de movimiento del carro es

$$m\ddot{x} = -m\alpha$$

donde  $m$  es la masa del carro y  $x$  es el desplazamiento del auto medido desde el punto donde el freno comenzó a aplicarse. Integrando esta última ecuación, tenemos

$$\dot{x}(t) = -\alpha t + v(0)$$

y

$$x(t) = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + v(0)t + x(0)$$

donde  $x(0) = 0$  y  $v(0) = 25 \text{ m/s}$ .

Supóngase que el auto se detiene en  $t = t_1$ . Entonces  $\dot{x}(t_1) = 0$ . El valor de  $t_1$  se determina de

$$\dot{x}(t_1) = -\alpha t_1 + v(0) = 0$$

o bien

$$t_1 = \frac{v(0)}{\alpha} = \frac{25}{5} = 5 \text{ s}$$

La distancia recorrida antes de que el auto se detenga es  $x(t_1)$ , donde

$$\begin{aligned} x(t_1) &= -\frac{1}{2}\alpha t_1^2 + v(0)t_1 = -\frac{1}{2} \times 5 \times 5^2 + 25 \times 5 \\ &= 62.5 \text{ m} \end{aligned}$$

**PROBLEMA A-2-6.** Un cilindro homogéneo con radio de 1 m tiene una masa de 100 kg. ¿Cuál será su aceleración angular si se le aplica un par externo de 10 N-m alrededor del eje del cilindro?

**Solución.** El momento de inercia  $J$  es

$$J = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 1^2 = 50 \text{ kg-m}^2$$

La ecuación de movimiento del sistema es

$$J\ddot{\theta} = T$$

donde  $\ddot{\theta}$  es la aceleración angular. Por lo tanto,

$$\ddot{\theta} = \frac{T}{J} = \frac{10 \text{ N-m}}{50 \text{ kg-m}^2} = 0.2 \text{ rad/s}^2$$

(Nótese que al examinar las unidades de esta última ecuación, vemos que la unidad de  $\theta$  no es  $s^{-2}$  sino  $\text{rad/s}^{-2}$ . Este uso aparece porque al escribir  $\text{rad/s}^{-2}$  se indica que el ángulo  $\theta$  está medido en radianes. El radián es una medida del ángulo y es la relación de la longitud del arco con respecto al radio. Así pues, medido en radianes, el ángulo es un número puro. En el manejo algebraico de unidades la unidad “radián” se añade cuando sea necesario.)

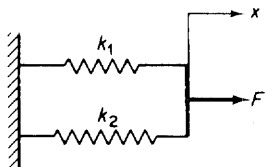
**PROBLEMA A-2-7.** Obténgase la constante de resorte equivalente del sistema mostrado en la Fig. 2-37.

**Solución.** Para los resortes en paralelo, la constante de resorte equivalente  $k_{eq}$  se obtiene de

$$k_1x + k_2x = F = k_{eq}x$$

o bien

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

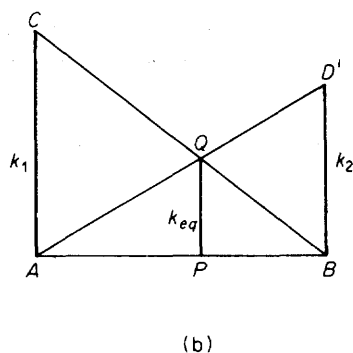
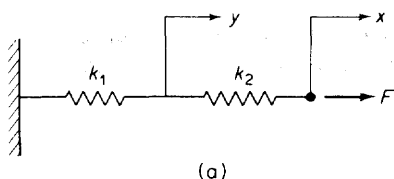


**Fig. 2-37.** Sistema que consta de dos resortes en paralelo.

**PROBLEMA A-2-8.** Encuéntrese la constante de resorte equivalente para el sistema mostrado en la Fig. 2-38(a) y muéstrase que también puede obtenerse gráficamente como lo indica la Fig. 2-38(b).

**Solución.** En los resortes en serie, la fuerza en cada resorte es la misma.





**Fig. 2-38.** (a) Sistema que consta de dos resortes en serie; (b) diagrama que muestra la constante de resorte equivalente.

Así pues,

$$k_1 y = F, \quad k_2(x - y) = F$$

La eliminación de  $y$  en estas dos ecuaciones resulta en

$$k_2 \left( x - \frac{F}{k_1} \right) = F$$

o bien

$$k_2 x = F + \frac{k_2}{k_1} F = \frac{k_1 + k_2}{k_1} F$$

La constante de resorte equivalente  $k_{eq}$  para este caso se encuentra entonces como

$$k_{eq} = \frac{F}{x} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Para la solución gráfica, nótese que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}, \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$$

de la cual

$$\overline{PB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PQ}}{\overline{AC}}, \quad \overline{AP} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PQ}}{\overline{BD}}$$

Puesto que  $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$ , tenemos

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{PQ}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PQ}}{\overline{AC}} = \overline{AB}$$

o bien

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{PQ}}{\overline{AC}} = 1$$

Resolviendo para  $\overline{PQ}$ , obtenemos

$$\overline{PQ} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BD}}}$$

De modo que si las longitudes  $\overline{AC} + \overline{BD}$  representan a las constantes de resorte  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente, entonces la longitud  $\overline{PQ}$  representa la constante de resorte equivalente  $k_{eq}$ . Esto es

$$\overline{PQ} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = k_{eq}$$

**PROBLEMA A-2-9.** En la Fig. 2-39 el péndulo simple consiste en una esfera de masa  $m$  suspendida por una cuerda de masa despreciable. Haciendo caso omiso de la elongación de la cuerda, encuéntrase la ecuación de movimiento del péndulo. Además, encuéntrase la frecuencia natural del sistema cuando  $\theta$  sea pequeño. Supóngase que no hay fricción.

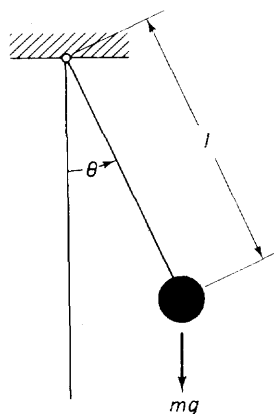


Fig. 2-39. Péndulo simple.

**Solución.** La fuerza gravitacional  $mg$  tiene la componente tangencial  $mg \sin \theta$  y la componente normal  $mg \cos \theta$ . El par debido a la componente tangencial de  $mg$  es  $-mgl \sin \theta$ . De modo que la ecuación de movimiento es

$$J\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

donde  $J = ml^2$ . Por lo tanto,

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Para un  $\theta$  pequeño,  $\sin \theta \doteq \theta$  y la ecuación de movimiento se simplifica a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

La frecuencia natural  $\omega_n$  se obtiene entonces como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

**PROBLEMA A-2-10.** Una masa  $m$  está suspendida por dos resortes en la Fig. 2-40. Uno de los resortes es una viga en cantilever con constante de resorte  $k_1$  si se carga transversalmente en su extremo. El otro resorte es uno de tensión-compresión con constante de resorte  $k_2$ . Determinése la deflexión estática  $\delta$  de la masa cuando se la mide desde la posición en la cual el resorte no tiene carga. Determinése también la frecuencia natural del sistema.

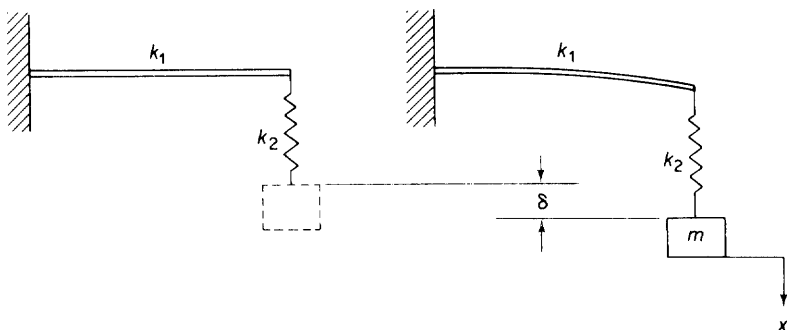


Fig. 2-40. Masa suspendida de dos resortes.

**Solución.** En cierto sentido los dos resortes están conectados en serie, la constante de resorte equivalente  $k_{eq}$  es

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Entonces la deflexión  $\delta$  estática es

$$\delta = \frac{mg}{k_{eq}}$$

La frecuencia natural del sistema es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

**PROBLEMA A-2-11.** Considérese la Fig. 2-41 donde un disco homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  que puede girar alrededor de su centro de masa el cual cuelga del techo y está precargado por resortes. (Dos resortes que están conectados mediante un alambre que pasa sobre la polea como se muestra.) Cada resorte está estirado una cantidad  $x$ . Suponiendo que el disco inicialmente está girando un pequeño ángulo  $\theta$  y luego se le suelta, obténgase tanto la ecuación de movimiento del disco como la frecuencia natural.

**Solución.** Si el disco está girando un ángulo  $\theta$  como en la Fig. 2-41, el resorte del lado derecho está estirado  $x + R\theta$  y el resorte del lado izquierdo está estirado  $x - R\theta$ . Por lo tanto, la aplicación de la segunda ley de Newton al movimiento rotacional del disco da

$$J\ddot{\theta} = -k(x + R\theta)R + k(x - R\theta)R$$

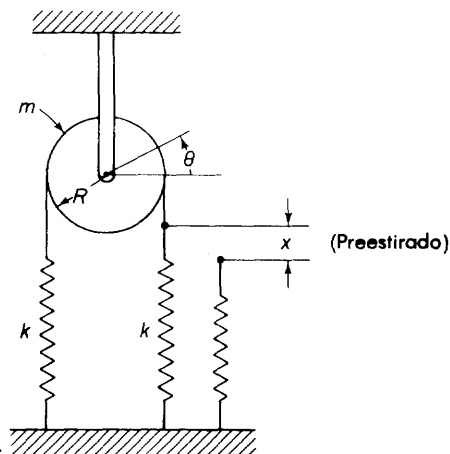


Fig. 2-41. Sistema de resorte-polea.

donde el momento de inercia  $J$  es  $\frac{1}{2}mR^2$ . Simplificando la ecuación de movimiento, tenemos

$$\ddot{\theta} + \frac{4k}{m}\theta = 0$$

Por lo tanto, la frecuencia natural es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m}}$$

**PROBLEMA A-2-12.** En el sistema masa-resorte-polea de la Fig. 2-42, el momento de inercia de la polea respecto al eje de rotación es  $J$  y el radio es  $R$ . Supóngase que el

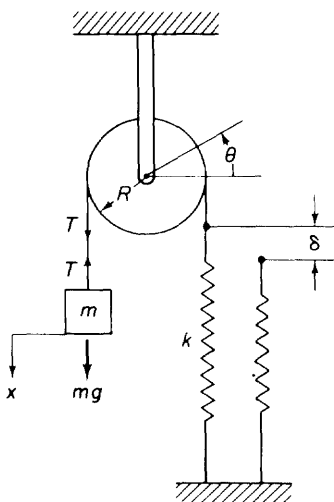


Fig. 2-42. Sistema masa-resorte-polea.

sistema está inicialmente en equilibrio. La fuerza gravitacional de masa  $m$  origina una deflexión estática del resorte tal que  $k \delta = mg$ . Suponiendo que el desplazamiento  $x$  de la masa  $m$  se mide desde la posición de equilibrio, ¿cuál es la ecuación de movimiento del sistema? Encuéntrese además la frecuencia natural.

**Solución.** Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos para la masa  $m$

$$m\ddot{x} = -T \quad (2-37)$$

donde  $T$  es la tensión en el alambre. (Nótese que  $x$  se mide desde la posición de equilibrio estático y el término  $mg$  no participa en la ecuación.) Para el movimiento rotacional de la polea,

$$J\ddot{\theta} = TR - kxR \quad (2-38)$$

Si eliminamos la tensión  $T$  de las Ecs. 2-37 y 2-38, el resultado es

$$J\ddot{\theta} = -m\ddot{x}R - kxR$$

Observando que  $x = R\theta$ , esta última ecuación se simplifica a

$$(J + mR^2)\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{kR^2}{J + mR^2}\theta = 0$$

La frecuencia natural  $\omega_n$  es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kR^2}{J + mR^2}}$$

**PROBLEMA A-2-13.** En el sistema mecánico de la Fig. 2-43, un extremo de la palanca está conectado a un resorte y a un amortiguador, y se aplica una fuerza  $F$  al otro extremo de la palanca. ¿Cuál es la ecuación de movimiento del sistema, si se supone un pequeño desplazamiento  $x$ ? Supóngase también que la palanca es rígida y sin masa.

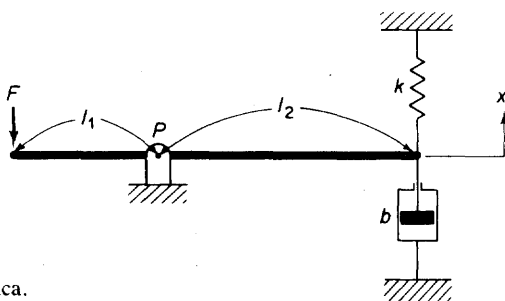


Fig. 2-43. Sistema de palanca.

**Solución.** Utilizando la segunda ley de Newton, para un pequeño desplazamiento  $x$ , el movimiento rotacional alrededor del pivote  $P$  está dado por

$$Fl_1 - (b\dot{x} + kx)l_2 = 0$$

o bien

$$b\dot{x} + kx = \frac{l_1}{l_2} F$$

la cual es la ecuación de movimiento del sistema.

**PROBLEMA A-2-14.** Una escalera está apoyada sobre una pared (véase la Fig. 2-44). Suponiendo que el coeficiente de fricción deslizando de la pared es de 0.2 y el del pivote es de 0.5, encuentrese el ángulo crítico  $\theta$  en que la escalera comenzará a deslizarse hacia abajo del piso.

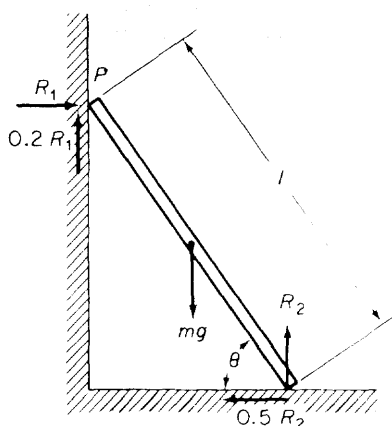


Fig. 2-44. Escalera colocada contra una pared.

**Solución.** Las magnitudes y direcciones de las fuerzas y las fuerzas de reacción que actúan en el sistema aparecen en la figura. El ángulo crítico  $\theta$  puede encontrarse considerando las ecuaciones de balance de fuerzas y balance de momentos. Las ecuaciones de balance de fuerzas son

$$R_1 = 0.5R_2$$

$$mg = 0.2R_1 + R_2$$

de las cuales

$$mg = 1.1R_2$$

La ecuación de balance de momentos respecto al punto  $P$  es

$$R_2 l \cos \theta = mg \frac{l}{2} \cos \theta + 0.5R_2 l \sin \theta$$

la cual puede simplificarse a

$$R_2 = \frac{1}{2}mg + 0.5R_2 \tan \theta$$

Sustituyendo  $mg = 1.1R_2$  en esta última ecuación, tenemos

$$R_2 = 0.55R_2 + 0.5R_2 \tan \theta$$

la cual puede simplificarse a

$$\tan \theta = 0.9$$

o bien

$$\theta = 42^\circ$$

Por lo tanto, el ángulo crítico  $\theta$  es de  $42^\circ$ .

**PROBLEMA A-2-15.** Considérese un disco homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  colocado sobre un plano horizontal. Supóngase que en  $t = 0$  se le da al centro de masa del disco una velocidad inicial  $v_0$  en la dirección  $x$  (pero no se le da velocidad angular inicial) como se muestra en la Fig. 2-45; esto es,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0 > 0$ ,  $\theta(0) = 0$ , y  $\dot{\theta}(0) = 0$ , donde  $\theta$  es el desplazamiento angular del disco respecto al eje de rotación. Determinese el movimiento del disco para  $t > 0$ . Supóngase que no hay fricción viscosa actuando sobre el disco.

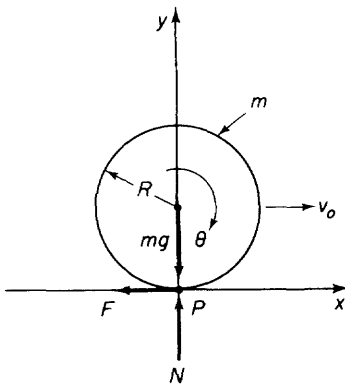


Fig. 2-45. Disco homogéneo colocado sobre un plano horizontal sometido a una velocidad inicial  $v_0$  en la dirección  $x$ .

**Solución.** Cuando se aplica la velocidad inicial  $v_0$ , el disco comienza a deslizarse con rodamiento. (El punto  $P$ , punto de contacto entre el disco y el plano, tiene una velocidad  $\dot{x} - R\dot{\theta} > 0$ .) La fuerza de fricción con su magnitud  $\mu_k N$ , donde  $N$  es la fuerza normal que actúa en el punto de contacto, actúa durante un tiempo mientras el cilindro no comience a rodar sin deslizamiento.

Las ecuaciones de movimiento para este sistema durante el intervalo de tiempo en el cual  $\dot{x} - R\dot{\theta} > 0$  (lo cual significa que el disco se desliza sin rodamiento) son

$$m\ddot{x} = -F$$

$$J\ddot{\theta} = FR$$

donde  $F = \mu_k N = \mu_k mg$  y  $J$  es el momento de inercia del disco alrededor del eje de rotación, o  $J = \frac{1}{2} m R^2$ . Esas dos ecuaciones pueden simplificarse a

$$\ddot{x} = -\mu_k g$$

$$\ddot{\theta} = 2\mu_k \frac{g}{R}$$

Integrándolas con respecto al tiempo, tenemos

$$\dot{x} = v_0 - \mu_k g t \quad (2-39)$$

$$\dot{\theta} = 2\mu_k \frac{g}{R} t \quad (2-40)$$

Nótese que las Ecs. (2-39) y (2-40) se mantienen válidas en el intervalo de tiempo en el cual  $\dot{x} - R\dot{\theta} > 0$ .

A partir de las Ecs. (2-39) y (2-40), vemos que la velocidad  $\dot{x}$  decrece y que la velocidad angular  $\dot{\theta}$  se incrementa a medida que el tiempo  $t$  se incrementa. Así es que en algún tiempo  $t = t_1$ ,  $\dot{x}$  llega a ser igual a  $R\dot{\theta}$ . Este instante particular  $t_1$  puede determinarse igualando  $\dot{x}$  y  $R\dot{\theta}$  y resolviendo para  $t_1$  como sigue:

$$v_0 - \mu_k g t_1 = 2R\mu_k \frac{g}{R} t_1$$

o bien

$$t_1 = \frac{v_0}{3\mu_k g}$$

En  $t < t_1$ , el disco rueda y se desliza. En  $t = t_1$  el disco comienza a rodar sin deslizamiento a la velocidad  $\dot{x}(t_1) = R\dot{\theta}(t_1) = 2v_0/3 = \text{constante}$ .

Una vez que la velocidad del punto de contacto (punto  $P$ ) llega a cero, la fuerza de fricción no actúa más en el sistema y el deslizamiento cesa. Por tanto, ya no se aplica  $F = \mu_k N$ . De hecho, la fuerza de fricción  $F$  llega a ser igual a cero cuando  $T \geq t_1$ , y el disco continúa rodando sin deslizamiento a la velocidad lineal constante de  $2v_0/3$  y a la velocidad angular constante de  $2v_0/(3R)$ .

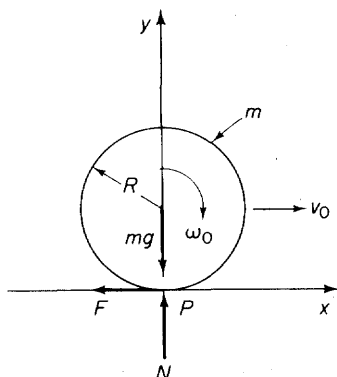
**PROBLEMA A-2-16.** En relación con el problema A-2-15, considérese un disco homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  puesto sobre un plano horizontal. En  $t = 0$  al centro de masa del disco se le aplica una velocidad inicial  $v_0$  en la dirección  $x$  y al mismo tiempo al disco se le da una velocidad angular inicial  $\omega_0$  alrededor del eje de rotación (Fig. 2-46). Determinese el movimiento del disco para  $t > 0$ .

**Solución.** El movimiento del disco depende de si la velocidad del punto de contacto (punto  $P$ ) es positiva, negativa o cero. La velocidad del punto de contacto es

$$u_0 = v_0 - R\omega_0$$

A continuación consideramos tres casos ( $v_0 > R\omega_0$ ,  $v_0 < R\omega_0$ ,  $v_0 = R\omega_0$ ) en forma separada.





**Fig. 2-46.** Disco homogéneo colocado sobre un plano horizontal sometido a una velocidad inicial  $v_0$  en la dirección  $x$  y a una velocidad angular inicial  $\omega_0$  alrededor del eje de rotación.

**Caso 1.**  $v_0 > R\omega_0$ : Inicialmente hay deslizamiento. Las ecuaciones de movimiento son,

$$m\ddot{x} = -F = -\mu_k N = -\mu_k mg$$

$$J\ddot{\theta} = FR$$

donde  $J = \frac{1}{2}mR^2$ . Simplificando, estas ecuaciones se hacen

$$\ddot{x} = -\mu_k g$$

$$\ddot{\theta} = 2\mu_k \frac{g}{R}$$

Por lo tanto,

$$\dot{x} = v_0 - \mu_k g t$$

$$\dot{\theta} = \omega_0 + 2\mu_k \frac{g}{R} t$$

En cierto tiempo  $t = t_1$  la velocidad  $\dot{x}$  se hace igual a  $R\dot{\theta}$ . Este tiempo particular  $t_1$  se encuentra a partir de

$$v_0 - \mu_k g t_1 = R\left(\omega_0 + 2\mu_k \frac{g}{R} t_1\right)$$

o bien

$$t_1 = \frac{1}{3\mu_k g}(v_0 - R\omega_0)$$

En  $t = t_1$  el punto de contacto (punto  $P$ ) tendrá velocidad cero y el deslizamiento cesará. Para  $t \geq t_1$ , el disco rueda sin deslizamiento a la velocidad

$$\dot{x} = R\dot{\theta} = \frac{1}{3}(2v_0 + R\omega_0) = \text{constante}$$

**Caso 2.**  $v_0 < R\omega_0$ : En este caso, el punto de contacto (punto  $P$ ) tiene velocidad  $u_0 = v_0 - R\omega_0 < 0$ . Así es que estará deslizándose inicialmente. La fuerza de fricción actúa en dirección opuesta a la del caso 1. De modo que cambiando  $F$  por  $-F$  en las ecuaciones de movimiento del caso 1, las ecuaciones de movimiento para el presente

caso resultan

$$m\ddot{x} = F$$

$$J\ddot{\theta} = -FR$$

Simplificando

$$\ddot{x} = \mu_k g$$

$$\ddot{\theta} = -2\mu_k \frac{g}{R}$$

Se tiene que

$$\dot{x} = v_0 + \mu_k g t$$

$$\dot{\theta} = \omega_0 - 2\mu_k \frac{g}{R} t$$

Vemos que  $\dot{x}$  se incrementa y  $\dot{\theta}$  decrece en tanto que  $t$  se incrementa. Por lo tanto, podemos esperar que en algún tiempo  $t = t_2$ ,  $\dot{x}(t_2) = R\dot{\theta}(t_2)$  o

$$v_0 + \mu_k g t_2 = R\left(\omega_0 - 2\mu_k \frac{g}{R} t_2\right)$$

Resolviendo para  $t_2$ , encontramos

$$t_2 = \frac{1}{3\mu_k g}(R\omega_0 - v_0)$$

En  $t < t_2$ , el disco rueda y se desliza. En  $t = t_2$  el punto de contacto (punto  $P$ ) tendrá velocidad cero; en  $t > t_2$ , el disco rodará sin deslizamiento a una velocidad constante igual a

$$\dot{x} = R\dot{\theta} = \frac{1}{3}(2v_0 + R\omega_0)$$

**Caso 3.**  $v_0 = R\omega_0$ : En este caso, inicialmente el punto de contacto (punto  $P$ ) tiene velocidad  $u_0 = v_0 - R\omega_0 = 0$ . En consecuencia, no hay deslizamiento en el movimiento y las ecuaciones de movimiento son

$$m\ddot{x} = -F$$

$$J\ddot{\theta} = FR$$

donde  $x = R\theta$ . Eliminando  $F$  de las ecuaciones de movimiento, obtenemos

$$m\ddot{x} + \frac{1}{2}mR\ddot{\theta} = 0$$

Sustituyendo entonces  $\theta = x/R$  en esta última ecuación, da

$$m\ddot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{x} = 0$$

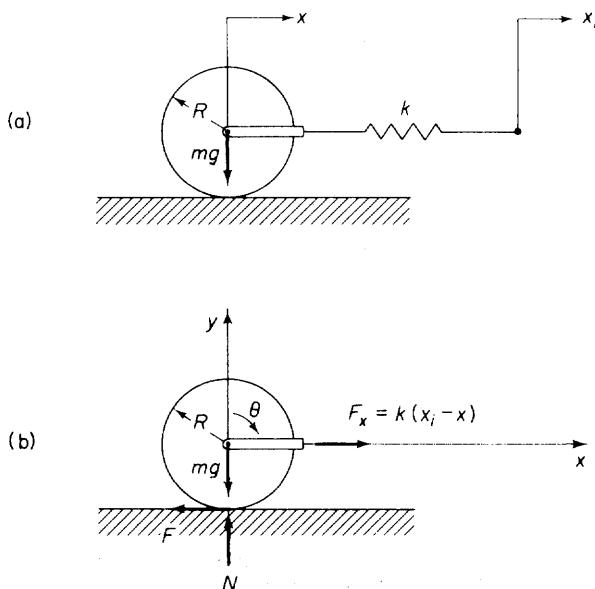
o bien

$$\ddot{x} = 0$$

Así es que para  $t \geq 0$  tenemos

$$\dot{x} = v_0 = \text{constante}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R} = \omega_0 = \text{constante}$$

**PROBLEMA A-2-17.** Considérese el sistema mostrado en la Fig. 2-47(a), donde el cilindro de radio  $R$  y masa  $m$  se jala mediante un resorte desprovisto de masa con constante de resorte  $k$ . Supóngase que el cilindro gira libremente alrededor de su eje y que se conoce el desplazamiento inicial  $x_i$ . ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema? Supóngase que no hay deslizamiento.



**Fig. 2-47.** (a) Cilindro jalado por medio de un resorte; (b) diagrama de fuerzas del sistema del cilindro.

**Solución.** Las fuerzas que actúan sobre el sistema son la fuerza de tracción  $F_x = k(x_i - x)$ , la fuerza gravitacional  $mg$ , la fuerza de fricción  $F$  y la fuerza normal  $N$ , como se muestra en la Fig. 2-47(b). (La fuerza normal  $N$  se balancea con  $mg$ ; es decir,  $N = mg$ .)

La ecuación de movimiento en la dirección  $x$  es

$$m\ddot{x} = F_x - F = k(x_i - x) - F \quad (2-41)$$

Para el movimiento rotacional alrededor del centro de masa,

$$J\ddot{\theta} = FR \quad (2-42)$$

Puesto que no hay deslizamiento,  $\dot{x} = R\dot{\theta}$ . Por lo tanto, la Ec. (2-42) queda

$$J\ddot{x} = FR^2$$

Observando que  $J = \frac{1}{2}mR^2$ , obtenemos

$$F = \frac{J}{R^2}\ddot{x} = \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

La eliminación de  $F$  de la Ec. (2-41) resulta en

$$m\ddot{x} = k(x_i - x) - \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

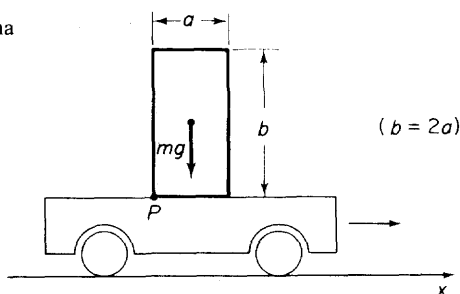
o bien

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = \frac{2k}{3m}x_i$$

La frecuencia natural del sistema es  $\sqrt{2k/(3m)}$ .

**PROBLEMA A-2-18.** Se coloca una caja sobre una carreta como se muestra en la Fig. 2-48. Suponiendo que la carreta se acelera en la dirección  $x$ , encuentre la condición para que la caja se deslice y la condición para que la caja caiga. Supóngase también que  $\mu_s$ , el coeficiente de fricción estática máxima entre la caja y el piso de la carreta es 0.3. Si la aceleración de la carreta se incrementa de cero a  $0.4g$ , donde  $g$  es la constante de aceleración gravitacional, ¿caerá la caja al piso?

Fig. 2-48. Caja colocada sobre una carreta.



**Solución.** La caja comenzará a deslizarse si

$$(\text{fuerza de inercia}) > (\text{fuerza de fricción estática})$$

La caja caerá si

$$\left( \begin{array}{c} \text{momento debido a la fuerza de inercia} \\ \text{respecto al punto } P \end{array} \right) > \left( \begin{array}{c} \text{momento debido a } mg \\ \text{respecto al punto } P \end{array} \right)$$

Si la carreta tiene una aceleración  $\alpha$ , la magnitud de la fuerza de inercia es  $m\alpha$ . La magnitud de la fuerza de fricción máxima es  $\mu_s mg$ . Así pues, la condición para que la caja comience a deslizarse es

$$m\alpha > \mu_s mg$$

o bien

$$\alpha > \mu_s g = 0.3g$$

La condición para que la caja se caiga es

$$m\alpha \frac{b}{2} > mg \frac{a}{2}$$

o bien

$$\alpha > \frac{a}{b} g = 0.5g$$

Puesto que la condición para que la caja comience a deslizarse es  $\alpha = 0.3g$  y la condición para que la caja comience a caer es  $\alpha = 0.5g$ , la caja comenzará a deslizarse a medida que la aceleración de la carreta se incremente de cero a  $0.4g$ . La caja no llegará a caer.

**PROBLEMA A-2-19.** Se hace deslizar una caja de masa  $m$  sobre una superficie horizontal lisa. Si la velocidad inicial de la caja es de  $5 \text{ m/s}$ , ¿qué tan lejos se deslizará? Supóngase que  $\mu_k$ , el coeficiente de fricción entre la caja y la superficie es de  $0.2$ .

**Solución.** La ecuación de movimiento de la caja es

$$m\ddot{x} = -F \quad (2-43)$$

donde  $F$ , la fuerza de fricción, es

$$F = \mu_k mg = 0.2mg$$

Por lo tanto, la Ec. (2-43) se simplifica a

$$\ddot{x} = -0.2g$$

Integrando esta última ecuación y observando que la velocidad inicial es de  $5 \text{ m/s}$ , tenemos

$$\dot{x}(t) = -0.2 \times 9.81t + 5 = -1.962t + 5 \quad (2-44)$$

La velocidad  $\dot{x}$  llega a cero cuando  $t = t_1$ , donde

$$t_1 = \frac{5}{1.962}$$

La integración de la Ec. (2-44) con respecto a  $t$  da

$$x(t) = -0.981t^2 + 5t$$

donde supusimos  $x(0) = 0$ . La distancia que viaja la caja antes de detenerse se obtiene sustituyendo  $t = t_1$  en esta última ecuación.

$$x(t_1) = -0.981\left(\frac{5}{1.962}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{1.962}\right) = 6.37$$

Así pues, la distancia recorrida es de  $6.37$  metros.

**PROBLEMA, A-2-20.** Se coloca una caja de masa  $m$  sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es de  $30^\circ$  (véase la Fig. 2-49). Encuéntrese el trabajo realizado cuando la caja se mueve hacia arriba a una velocidad constante a lo largo del plano inclinado una distancia de  $5 \text{ m}$ . Supóngase que la masa  $m$  es de  $10 \text{ kg}$  y el coeficiente de fricción deslizando  $\mu_k$  es de  $0.3$ .

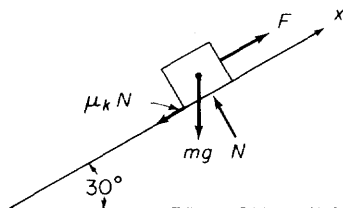


Fig. 2-49. Caja colocada sobre un plano inclinado.

**Solución.** El trabajo realizado es

$$W = Fl$$

donde  $F$  es la fuerza de tracción a lo largo del plano inclinado y  $l$  es la distancia recorrida. La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} = -mg \sin 30^\circ - \mu_k N + F$$

donde  $m$  es la masa de la caja y  $N = -mg \cos 30^\circ$ . Cuando la caja se mueve a lo largo del plano inclinado a velocidad constante,  $\ddot{x} = 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F &= mg \sin 30^\circ + 0.3mg \cos 30^\circ = mg(0.5 + 0.3 \times 0.866) \\ &= 10 \times 9.81 \times 0.760 = 74.5 \text{ N} \end{aligned}$$

Luego el trabajo realizado es

$$W = 74.5 \times 5 = 373 \text{ N-m}$$

**PROBLEMA A-2-21.** Se coloca un tanque de agua circular con radio de 2 m y altura de 5 m, a 20 m de altura sobre el suelo, como se muestra en la Fig. 2-50. Obténgase la energía potencial del agua que llena al tanque. Supóngase que la densidad del agua es de  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

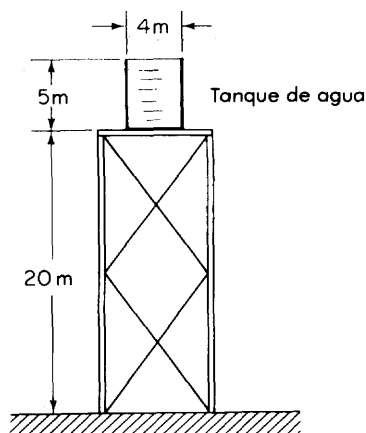


Fig. 2-50. Tanque de agua.

**Solución.** La masa  $m$  del agua en el tanque es

$$2 \times 2 \times 3.14 \times 5 \times 1000 = 62.8 \times 10^3 \text{ kg}$$

La altura  $h$  del centro de gravedad del agua en el tanque es de  $20 + \frac{1}{2} \times 5 = 22.5$  m. Por lo tanto, la energía potencia  $U$  tomando el nivel del suelo como línea de referencia es

$$\begin{aligned} U &= mgh \\ &= 62.8 \times 10^3 \times 9.81 \times 22.5 \\ &= 13.86 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

**PROBLEMA A-2-22.** Un cuerpo de masa  $m$  se lanza verticalmente hacia arriba en el aire con una velocidad inicial de 20 m/s. ¿Qué tan lejos llegará? Encuéntrese la distancia vertical mediante el uso de la ley de conservación de la energía.

**Solución.** Midamos la distancia vertical desde el punto donde el cuerpo se lanza hacia arriba. En el instante en que el cuerpo ha sido lanzado hacia arriba, la energía potencial  $U_1$  es cero y la energía cinética  $T_1$  es

$$T_1 = \frac{1}{2}mv^2(0)$$

En el instante en que el cuerpo alcanza la altura máxima  $h$  la energía potencial  $U_2$  es

$$U_2 = mgh$$

y la energía cinética  $T_2$  es cero.

Aplicando la ley de conservación de la energía, obtenemos

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

o bien

$$\frac{1}{2}mv^2(0) = mgh$$

de la cual obtenemos

$$h = \frac{1}{2} \frac{v^2(0)}{g} = \frac{1}{2} \frac{20^2}{9.81} = 20.39 \text{ m}$$

**PROBLEMA A-2-23.** La salida de una máquina se mide mediante un freno de Prony como se muestra en la Fig. 2-51. La velocidad angular medida es de 4 Hz. Encuéntrese la potencia de salida de la máquina en watts.

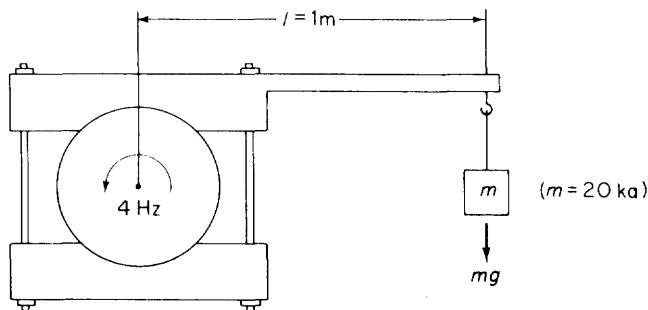


Fig. 2-51. Sistema de freno Prony.

**Solución.** El par  $T$  de la máquina está balanceada con el par de frenado  $mgl$ . Por lo tanto,

$$T = mgl = 20 \times 9.81 \times 1 = 196.2 \text{ N-m}$$

Puesto que la potencia de salida  $P$  es  $T\omega$ , tenemos

$$\begin{aligned} P &= T\omega = 196.2 \times 4 \times 2\pi \\ &= 4930 \text{ N-m/s} \\ &= 4930 \text{ W} \end{aligned}$$

**PROBLEMA A-2-24.** Supóngase que un automóvil con masa de 2000 kg está viajando a velocidad constante de 90 km/h. Cuando se aplica el freno del auto durante un tiempo finito, la velocidad de éste se reduce a 30 km/h. Encuéntrese la energía absorbida por el freno.

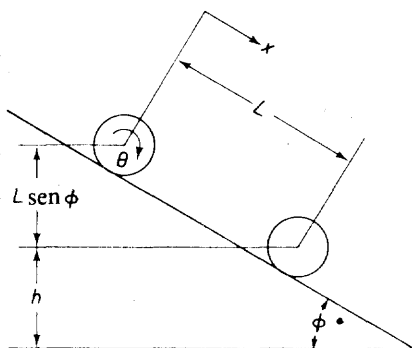
**Solución.** Adviértase que

$$90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}, \quad 30 \text{ km/h} = 8.33 \text{ m/s}$$

La energía absorbida por el freno es

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2000 \times (25^2 - 8.33^2) \\ &= 5.556 \times 10^5 \text{ N-m} \\ &= 5.556 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

**PROBLEMA A-2-25.** Un cilindro homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  rueda hacia abajo, sin deslizamiento, en un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es  $\phi$  (véase la Fig. 2-52). Supóngase que el cilindro está en reposo inicialmente. Aplicando la ley de conservación de la energía, encuéntrese la velocidad lineal del centro de masa del cilindro cuando ha rodado hacia abajo en el plano una distancia  $L$ .



**Fig. 2-52.** Cilindro homogéneo rodando hacia abajo en un plano inclinado.

**Solución.** en  $t = 0$ , la energía cinética potencial del cilindro son

$$\begin{aligned} \text{Energía cinética } T_1 &= 0 \\ \text{Energía potencial } T_1 &= mg(L \sin \phi + h) \end{aligned}$$



donde la energía potencial se mide desde la línea horizontal de referencia mostrada en la Fig. 2-52.

En el instante en que el cilindro ha rodado hacia abajo una distancia lineal  $L$  la energía cinética y la energía potencial son

$$\text{Energía cinética } T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$\text{Energía potencial } U_2 = mgh$$

(La energía cinética consta de la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional.) Mediante la aplicación de la ley de conservación de la energía, tenemos

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

o bien

$$mg(L \sin \phi + h) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgh \quad (2-45)$$

Puesto que el cilindro rueda sin deslizamiento,  $x = R\theta$ . También  $J = \frac{1}{2} m R^2$ . Por lo tanto, la Ec. (2-45) se hace

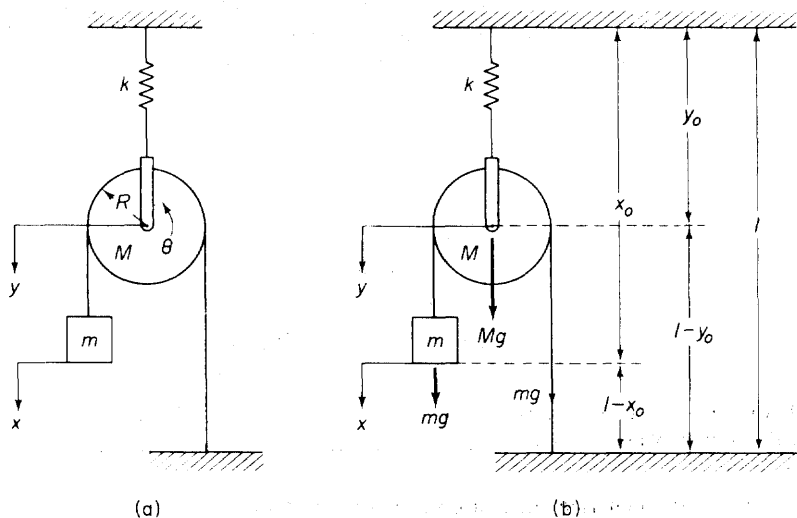
$$mgL \sin \phi = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m \dot{x}^2$$

o bien

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{4}{3} g L \sin \phi}$$

Este valor de  $\dot{x}$  da la velocidad lineal del centro de masa cuando ha rodado hacia abajo en el plano una distancia  $L$ .

**PROBLEMA A-2-26.** Considérese el sistema masa-resorte-polea de la Fig. 2-53(a). Si la masa  $m$  se jala hacia abajo una distancia corta y luego se suelta, vibrará. Obténgase la frecuencia natural del sistema aplicando la ley de conservación de la energía.



**Fig. 2-53.** (a) Sistema masa-resorte-polea; (b) diagrama para explicar la energía potencial del sistema.

**Solución.** Definase  $x$ ,  $y$  y  $\theta$  como el desplazamiento de la masa  $m$ , el desplazamiento de la polea y el ángulo de rotación de la polea, medidos, respectivamente, desde sus posiciones de equilibrio correspondientes. Nótese que  $x = 2y$ ,  $R\theta = x - y = y$ , y  $J = \frac{1}{2}MR^2$ .

La energía cinética  $T$  del sistema es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{16}M\dot{x}^2 \end{aligned}$$

En relación con la Fig. 2-53(b), la energía potencial  $U$  del sistema puede obtenerse como sigue. En el estado de equilibrio la energía potencial  $U_0$  es

$$U_0 = \frac{1}{2}ky_\delta^2 + Mg(l - y_0) + mg(l - x_0)$$

donde  $y_\delta$  es la deflexión estática del resorte debida a las masas colgantes  $M$  y  $m$ . Cuando las masas  $m$  y  $M$  se desplazan en  $x$  y  $y$ , respectivamente, la energía potencial instantánea  $U$  puede obtenerse como

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k(y_\delta + y)^2 + Mg(l - y_0 - y) + mg(l - x_0 - x) \\ &= \frac{1}{2}ky_\delta^2 + ky_\delta y + \frac{1}{2}ky^2 + Mg(l - y_0) - Mgy + mg(l - x_0) - mgx \\ &= U_0 + \frac{1}{2}ky^2 + ky_\delta y - Mgy - mgx \end{aligned}$$

Adviértase que, en relación con la Fig. 2-53(b) otra vez, la fuerza del resorte  $ky_\delta$  debe balancearse con  $Mg + 2mg$  o

$$ky_\delta = Mg + 2mg$$

Por lo tanto,

$$ky_\delta y = Mgy + 2mgy = Mgy + mgx$$

y

$$U = U_0 + \frac{1}{2}ky^2 = U_0 + \frac{1}{8}kx^2$$

donde  $U_0$  es constante.

Aplicando la ley de conservación de la energía a este sistema conservativo,

$$T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{16}M\dot{x}^2 + U_0 + \frac{1}{8}kx^2 = \text{constante}$$

Diferenciando entonces ambos lados de esta última ecuación con respecto a  $T$  da

$$m\dot{x}\ddot{x} + \frac{3}{8}M\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{4}kx\dot{x} = 0$$

o bien

$$[(m + \frac{3}{8}M)\ddot{x} + \frac{1}{4}kx]\dot{x} = 0$$

Puesto que  $\dot{x}$  no siempre es cero, debemos tener

$$(m + \frac{3}{8}M)\ddot{x} + \frac{1}{4}kx = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{2k}{8m + 3M}x = 0$$

Por lo tanto, la frecuencia natural del sistema, es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{8m + 3M}}$$

**PROBLEMA A-2-27.** Considérese el sistema mostrado en la Fig. 2-54 en el cual un cilindro de radio  $r$  y masa  $m$  sin deslizamiento sobre una superficie cilíndrica de radio  $R$ . Suponiendo que la amplitud de la oscilación sea pequeña, encuentrese la frecuencia de oscilación del cilindro utilizando la ley de conservación de la energía.

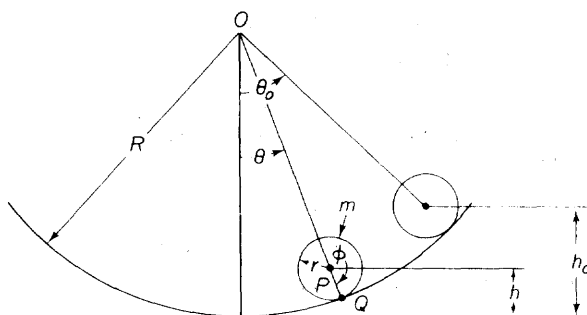


Fig. 2-54. Cilindro que rueda sobre una superficie cilíndrica.

**Solución.** Definamos el ángulo  $\theta$  como el ángulo de rotación de la línea  $OP$  desde la posición vertical. El ángulo  $\phi$  es el ángulo de rotación de la línea  $PQ$ . Cuando el cilindro rueda sin deslizamiento

$$R|\dot{\theta}| = r(|\dot{\theta}| + |\dot{\phi}|)$$

o bien

$$(R - r)|\dot{\theta}| = r|\dot{\phi}|$$

donde  $|\dot{\theta}|$  y  $|\dot{\phi}|$  denotan los valores absolutos de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . (Se usan los valores absolutos porque las direcciones positivas de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son opuestos entre sí.)

Supóngase que el cilindro rueda hacia arriba a una altura  $h_0$  y luego rueda hacia abajo. Entonces la energía potencial en este punto extremo es  $mgh_0$ . La energía cinética es cero, puesto que en este punto el cilindro se detiene. Luego en un tiempo arbitrario  $t$ , la energía potencial que el cilindro posee es  $mgh$  y la energía cinética es  $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2$ , donde  $v$  es la velocidad del centro de gravedad del cilindro y  $J$  es el momento de inercia del cilindro con respecto al eje de rotación en el punto  $P$ . Por lo tanto,  $J = \frac{1}{2}mr^2$ .

Aplicando la ley de la conservación de la energía, tenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 + mgh = mgh_0 \quad (2-46)$$

Puesto que

$$v^2 = (R - r)^2 \dot{\theta}^2 = r^2 \dot{\phi}^2$$

La Ec. (2-46) puede simplificarse a

$$\frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4}m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 = mg(h_0 - h) \quad (2-47)$$

Tomando en cuenta que

$$h_0 = R - (R - r) \cos \theta_0$$

$$h = R - (R - r) \cos \theta$$

La Ec. (2-47) puede escribirse

$$\frac{3}{4}(R - r) \dot{\theta}^2 = g(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Diferenciando esta última ecuación con respecto a  $t$  da

$$\frac{3}{2}(R - r) \dot{\theta} \ddot{\theta} = g(-\sin \theta) \dot{\theta}$$

o bien

$$[\frac{3}{2}(R - r) \ddot{\theta} + g \sin \theta] \dot{\theta} = 0$$

Puesto que  $\dot{\theta}$  no siempre es cero, debemos tener

$$\frac{3}{2}(R - r) \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

Para valores pequeños de  $\theta$ ,  $\sin \theta \doteq \theta$ , y esta última ecuación puede simplificarse a

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3} \frac{g}{(R - r)} \theta = 0$$

la cual es la ecuación de movimiento del sistema cuando  $\theta$  es pequeño. La frecuencia de este movimiento armónico simple es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{g}{(R - r)}}$$

**PROBLEMA A-2-28.** Si en el sistema masa-resorte de la Fig. 2-55 la masa  $m_s$  del resorte es pequeña, pero no tan pequeña que sea despreciable al compararla con la masa suspendida  $m$ , muéstrase que la inercia del resorte puede tomarse en cuenta añadiendo un tercio de su masa  $m_s$  a la masa suspendida  $m$  y después tratando al resorte como un resorte sin masa.

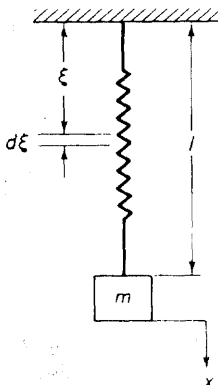


Fig. 2-55. Sistema masa-resorte.

**Solución.** Considérese la vibración libre del sistema. En vibración libre, el desplazamiento  $x$  puede escribirse

$$x = A \cos \omega t$$

Puesto que la masa del resorte es comparativamente pequeña, podemos suponer que el resorte es estirado uniformemente. Entonces, el desplazamiento de un punto del resorte a una distancia  $\xi$  del tope puede darse por  $(\xi/l)A \cos \omega t$ .

En la posición media donde  $x = 0$  y la velocidad de la masa  $m$  es máxima, la velocidad de la masa suspendida es  $A\omega$  y la del resorte a la distancia  $\xi$  respecto al tope es  $(\xi/l)A\omega$ . La energía cinética máxima  $T_{\text{máx}}$  es

$$\begin{aligned} T_{\text{máx}} &= \frac{1}{2} m(A\omega)^2 + \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{m_s}{l} \right) \left( \frac{\xi}{l} A\omega \right)^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2} mA^2\omega^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_s}{l} \right) \left( \frac{A^2\omega^2}{l^2} \right) \frac{1}{3} l^3 \\ &= \frac{1}{2} \left( m + \frac{m_s}{3} \right) A^2\omega^2 \end{aligned}$$

Obsérvese que la masa del resorte no afecta el cambio en energía potencial del sistema y que si el resorte no tuviera masa, la energía cinética máxima podría haber sido  $\frac{1}{2} mA^2\omega^2$ . Por lo tanto, concluimos que la inercia del resorte puede ser tomada en cuenta simplemente añadiendo un tercio de su masa a la masa suspendida y luego tratando al resorte como uno sin masa.

**PROBLEMA A-2-29.** Encuéntrese la aceleración de la masa  $m_1$  en el polipasto de dos poleas mostrado en la Fig. 2-26.

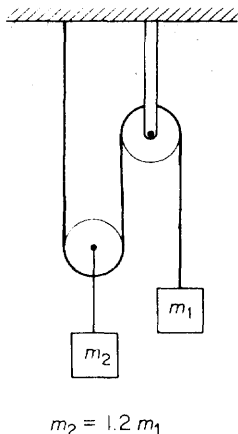


Fig. 2-56. Polipasto de dos poleas.

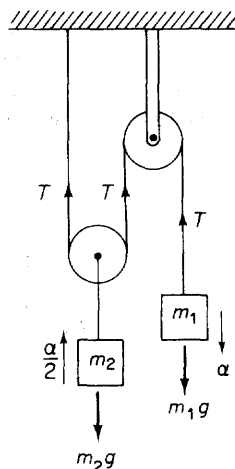


Fig. 2-57. Fuerzas que actúan en el sistema del polipasto de dos poleas mostrado en la Fig. 2-56.

**Solución.** Supóngase que la aceleración de la masa  $m_1$  es  $\alpha$ . En relación con la Fig. 2-57, la ecuación de movimiento de la masa  $m_1$  es

$$m_1 \alpha = m_1 g - T \quad (2-48)$$

Para la masa  $m_2$ ,

$$m_2 \frac{\alpha}{2} = 2T - m_2 g$$

Sustituyendo  $m_2 = 1.2m_1$  en esta última ecuación, tenemos

$$0.6m_1 \alpha = 2T - 1.2m_1 g \quad (2-49)$$

Eliminando  $T$  de las Ecs. (2-48) y (2-49) da

$$2.6m_1 \alpha = 0.8m_1 g$$

De la cual

$$\alpha = \frac{0.8}{2.6}g = \frac{0.8 \times 9.81}{2.6} = 3.02 \text{ m/s}^2$$

**PROBLEMA A-2-30.** Se aplica un par  $T$  a la flecha 1 en el sistema de tren de engranes de la Fig. 2-58. Obténgase la ecuación de movimiento del sistema. Supóngase que los momentos de inercia de los engranes son  $J_1$  y  $J_2$  como se muestra en el diagrama y que el par de carga es  $T_L$ .

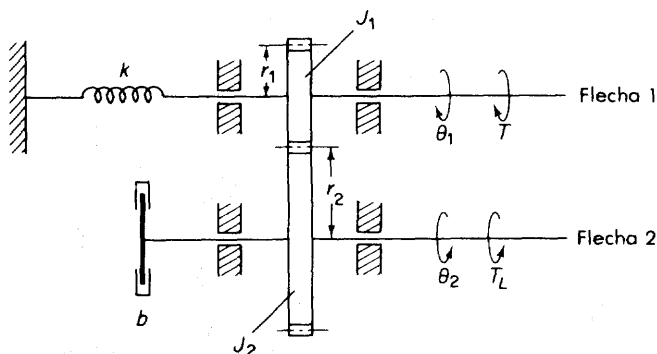


Fig. 2-58. Sistema de tren de engranes.

**Solución.** Para la flecha 1, la ecuación de movimiento es

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -k\theta_1 - T_1 + T \quad (2-50)$$

donde  $T_1$  es el par transmitido a la flecha 2. Para la flecha 2,

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = -b\ddot{\theta}_2 - T_L + T_2 \quad (2-51)$$

donde  $T_2$  es el par aplicado a la flecha 2 a través de los engranes

De las restricciones geométricas,

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2$$

Puesto que el trabajo realizado por el engrane 1 es igual al realizado por el engrane 2,

$$T_1 \dot{\theta}_1 = T_2 \dot{\theta}_2$$

o bien

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2-52)$$

Así pues, de las Ecs. (2-51) y (2-52)

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + b \dot{\theta}_2 + T_L = T_2 = T_1 \frac{r_2}{r_1} \quad (2-53)$$

Si eliminamos  $T_1$  de las Ecs. (2-50) y (2-53), el resultado es

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + k \theta_1 + \frac{r_1}{r_2} (J_2 \ddot{\theta}_2 + b \dot{\theta}_2 + T_L) = T$$

Sustituyendo entonces  $\theta_2 = (r_1/r_2)\theta_1$  en esta última ecuación, da

$$\left[ J_1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 J_2 \right] \ddot{\theta}_1 + b \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\theta}_1 + k \theta_1 = T - \frac{r_1}{r_2} T_L$$

Esta es la ecuación de movimiento del sistema referida a la flecha 1. En términos del ángulo  $\theta_2$ , esta última ecuación se hace

$$\left[ J_1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 J_2 \right] \ddot{\theta}_2 + b \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\theta}_2 + k \theta_2 = \frac{r_1}{r_2} T - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 T_L$$

la cual es la ecuación de movimiento del sistema referida en la flecha 2.

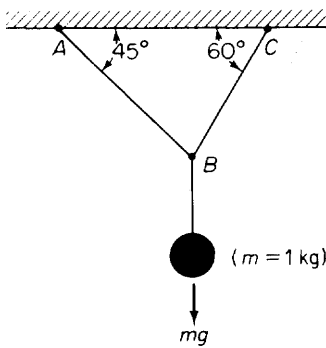


Fig. 2-59. Masa suspendida por dos alambres.

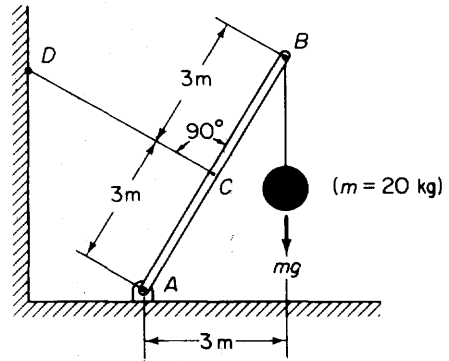


Fig. 2-60. Sistema mecánico.

## PROBLEMAS

**PROBLEMA B-2-1.** En el sistema de la Fig. 2-59 una masa de 1 kg está suspendida de dos alambres AB y BC. Encuentre la tensión en los alambres.

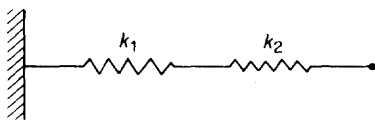
**PROBLEMA B-2-2.** La figura 2-60 muestra una barra de acero articulada en el punto A y una masa de 20 kg suspendida del punto B. La barra está sostenida por un alambre CD. Encuentre la tensión en el alambre CD.

**PROBLEMA B-2-3.** Un disco homogéneo tiene un diámetro de 1 m y una masa de 100 kg. Obtenga el momento de inercia del disco respecto al eje perpendicular al disco que pasa a través de su centro.

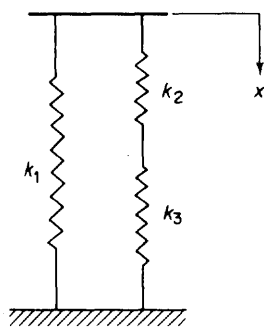
**PROBLEMA B-2-4.** Una bola se deja caer desde un punto 100 m arriba del suelo con una velocidad inicial de 20 m/s. ¿Cuánto tardará la bola en llegar al suelo?

**PROBLEMA B-2-5.** Un volante de momento de inercia  $J = 50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  que inicialmente permanece quieto se somete a un par constante. Si la velocidad angular alcanza 20 Hz en 5 segundos, encuentre el par que se aplica al volante.

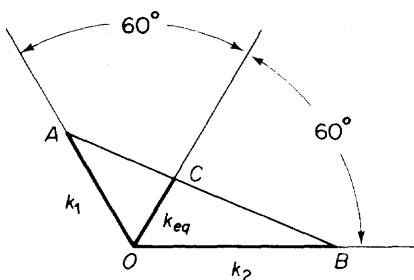
**PROBLEMA B-2-6.** Se aplica un freno a un volante que gira a una velocidad angular de 100 rad/s. Si la velocidad angular se reduce a 20 rad/s en 15 segundos, encuentre la desaceleración dada por el freno y el ángulo total girado en el periodo de 15 segundos.



(a)



**Fig. 2-61.** Sistema consta de tres resortes.



(b)

**Fig. 2-62.** (a) Sistema consta de dos resortes en serie; (b) diagrama que muestra la constante de resorte equivalente.

**PROBLEMA B-2-7.** Obtenga la constante de resorte equivalente  $k_{eq}$  del sistema mostrado en la Fig. 2-61.

**PROBLEMA B-2-8.** Considere los resortes conectados en serie que se muestran en la Fig. 2-62(a). En relación con la Fig. 2-62(b), muestre que la constante de resorte equivalente  $k_{eq}$  puede obtenerse gráficamente como la longitud  $\overline{OC}$  si las longitudes  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$  representan a  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente.

**PROBLEMA B-2-9.** Encuentre la frecuencia natural del sistema mostrado en la Fig. 2-63.

**PROBLEMA B-2-10.** El péndulo de la Fig. 2-64 gira libremente debido a su propia fuerza gravitacional. El momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación es  $J$ . Suponiendo que el ángulo  $\theta$  sea pequeño, obtenga la frecuencia de oscilación.



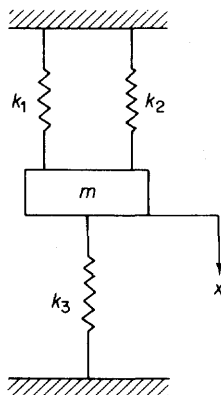


Fig. 2-63. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-2-11.** En relación con el manómetro en forma de U mostrado en la Fig. 2-65, donde se ha llenado parcialmente con líquido el tubo de vidrio en U; suponiendo que la masa total del líquido en el tubo es  $m$ , la longitud total del líquido en el tubo es  $L$  y la viscosidad del líquido es despreciable, ¿cuál es la ecuación de movimiento del líquido? Encuentre la frecuencia de oscilación.

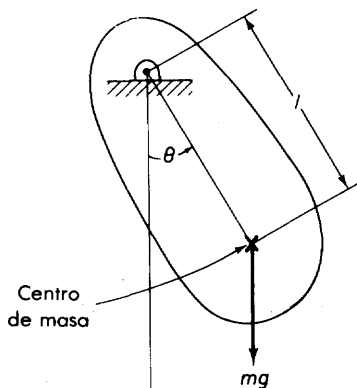
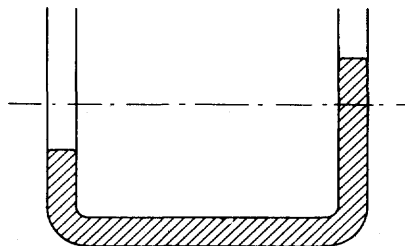


Fig. 2-64. Sistema de péndulo.

Fig. 2-65. Sistema de manómetro en forma de U.



**PROBLEMA B-2-12.** En el sistema mecánico mostrado en la Fig. 2-66, suponga que la barra no tiene masa, es perfectamente rígida y está articulada en el punto  $P$ . El desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio. Suponiendo que el desplazamiento  $x$  sea pequeño, el peso  $mg$  en el extremo de la barra es de 5 N y la constante de resorte  $k$  es de 400 N/m, encuentre la frecuencia natural del sistema.

**PROBLEMA B-2-13.** Obtenga las ecuaciones de movimiento del sistema mostrado en la Fig. 2-67(a), (b) y (c).

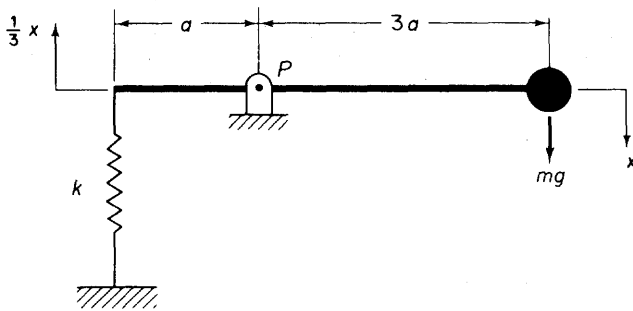


Fig. 2-66. Sistema mecánico.

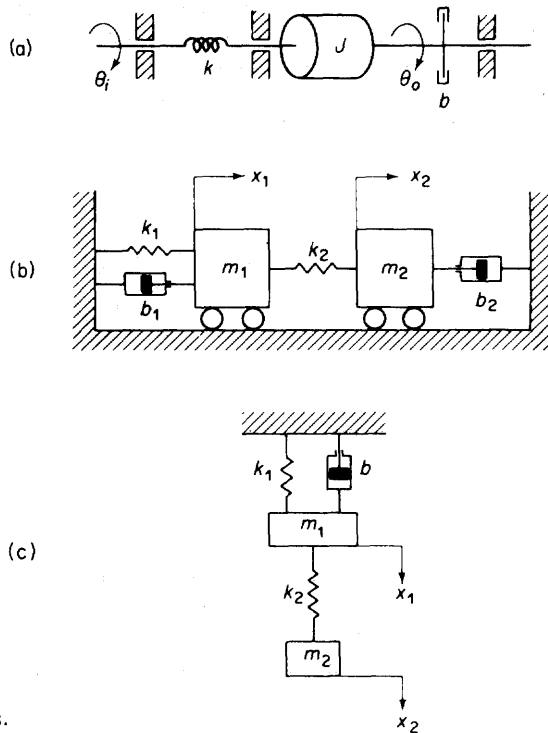
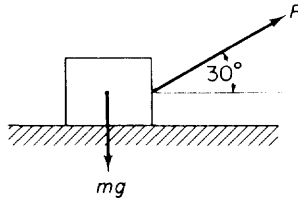


Fig. 2-67. Sistemas mecánicos.

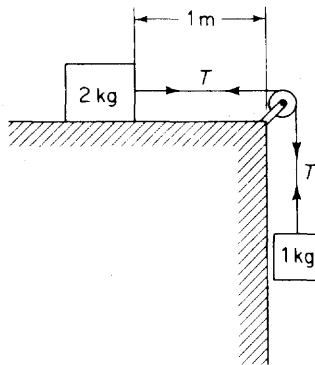
**PROBLEMA B-2-14.** Aplicando la segunda ley de Newton al sistema masa-resorte-polea de la Fig 2-53(a), obtenga el movimiento de la masa  $m$  cuando se jala hacia abajo una corta distancia y se la suelta. El desplazamiento  $x$  de la masa  $m$  se mide desde la posición de equilibrio. (La masa, el radio y el momento de inercia de la polea son  $M$ ,  $R$  y  $J = \frac{1}{2}MR^2$ , respectivamente.)

**PROBLEMA B-2-15.** Un cuerpo de masa  $m$  (donde  $m = 10 \text{ kg}$ ) se jala mediante una fuerza  $F$  en la dirección mostrada en la Fig. 2-68. Si el coeficiente de fricción deslizando entre el cuerpo y el piso es de 0.3, encuentre la magnitud de la fuerza  $F$  necesaria para mantener el cuerpo moviéndose a velocidad constante.



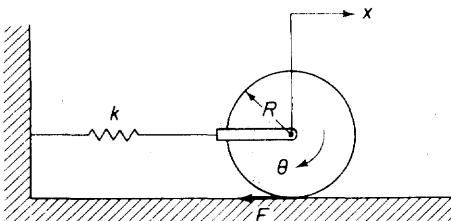
**Fig. 2-68.** Cuerpo colocado sobre un piso y jalado por una fuerza  $F$ .

**PROBLEMA B-2-16.** Un bloque de madera con masa de 2 kg colocado sobre una superficie horizontal áspera está ligado a una masa colgante de 1 kg a través de un alambre sin masa (véase la Fig. 2-69). El alambre pasa horizontalmente sobre una polea sin fricción. Suponga que el alambre es inextensible. El bloque de madera inicialmente se mantiene en reposo y la masa colgante está en reposo. En  $t = 0$  se suelta el bloque de madera. Encuentre la velocidad del bloque cuando se ha movido 0.5 m. Suponga que el coeficiente de fricción deslizando entre el bloque de madera y la superficie horizontal áspera es de 0.2.



**Fig. 2-69.** Sistema de masa colgante.

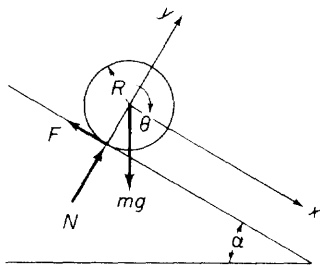
**PROBLEMA B-2-17.** Un cilindro homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  rueda sobre una superficie áspera. Está conectado a la pared a través de un resorte como se muestra en la Fig. 2-70. Suponga que el cilindro rueda sin deslizamiento. Aplicando la segunda ley de Newton, obtenga la frecuencia de oscilación del sistema.



**Fig. 2-70.** Cilindro homogéneo conectado a una pared por medio de un resorte.

**PROBLEMA B-2-18.** Considere un cilindro homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  moviéndose hacia abajo en un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es  $\alpha$  como se muestra en la Fig. 2-71. Cuando el cilindro rueda hacia abajo sin deslizamiento,  $F = \mu_k N = \mu_k mg \cos \alpha$ , y las ecuaciones de movimiento son

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha$$



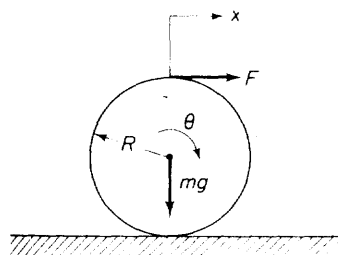
**Fig. 2-71.** Cilindro homogéneo rodando hacia abajo en un plano inclinado.

$$m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + N = 0$$

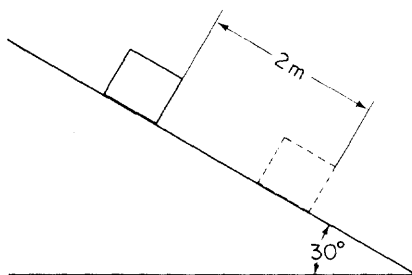
$$J\ddot{\theta} = FR$$

Suponemos que las condiciones iniciales son  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  y  $\dot{\theta}(0) = 0$ . Muestre que cuando el cilindro rueda hacia abajo con deslizamiento, las soluciones  $x(t)$  y  $\theta(t)$  de las ecuaciones de movimiento satisfacen la relación  $x > R\theta$  o  $\dot{x} > R\dot{\theta}$ .

**PROBLEMA B-2-19.** Un cilindro homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal áspera. Se aplica una fuerza externa  $F$  en el borde superior del cilindro (véase la Fig. 2-72). Suponiendo que el cilindro rueda sin deslizamiento, encuentre la magnitud y dirección de la fuerza de fricción estática.



**Fig. 2-72.** Cilindro homogéneo en una superficie horizontal áspera sometido a una fuerza externa  $F$ .



**Fig. 2-73.** Cuerpo colocado sobre un plano inclinado.

**PROBLEMA B-2-20.** Un cuerpo con masa de 1 kg se coloca sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es de  $30^\circ$  como se muestra en la Fig. 2-73. Si el cuerpo se desliza hacia abajo una distancia lineal de 2 m a lo largo del plano inclinado, ¿cuánto

trabajo se hace por la fuerza gravitacional y por la fuerza de fricción? Suponga que el coeficiente de fricción deslizante es de 0.2.

**PROBLEMA B-2-21.** Un cuerpo con masa de 1 kg está en reposo sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es de  $30^\circ$  (Fig. 2-74). Si se jala al cuerpo hacia arriba mediante una fuerza constante  $F$  a lo largo de la superficie inclinada, la velocidad alcanza los 5 m/s en el punto donde el cuerpo se ha movido 6 m. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza  $F$ , por la fuerza gravitacional y por la fuerza de fricción deslizante. Suponga que el coeficiente de fricción deslizante es de 0.2.

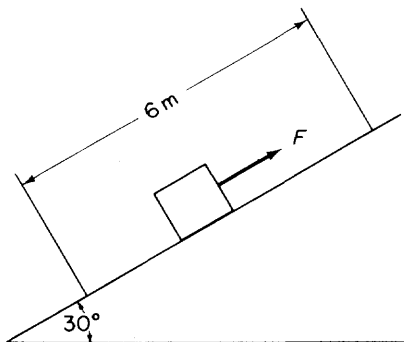


Fig. 2-74. Cuerpo colocado sobre un plano inclinado.

**PROBLEMA B-2-22.** Un resorte requiere una fuerza de 50 N para estirarse 5 cm. Si el resorte se estira 10 cm, ¿cuánta energía potencial posee el resorte debido a su elongación?

**PROBLEMA B-2-23.** Un disco de radio 0.5 m y masa de 10 kg está sometido a una fuerza tangencial de 50 N en su periferia y está girando a la velocidad angular de 100 rad/s. Calcule el par y la potencia en la flecha del disco.

**PROBLEMA B-2-24.** Obtenga la potencia necesaria para jalar un cuerpo con masa de 5 kg verticalmente hacia arriba 10 m en 5 segundos.

**PROBLEMA B-2-25.** Suponiendo que la masa  $m$  de la barra del péndulo mostrado en la Fig. 2-75 es pequeña, pero no despreciable comparada con la masa  $M$ , encuentre la frecuencia natural del péndulo cuando el ángulo  $\theta$  sea pequeño.

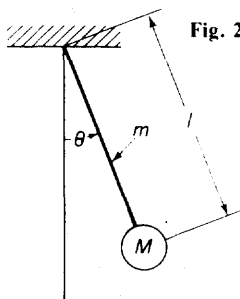


Fig. 2-75. Sistema de péndulo.

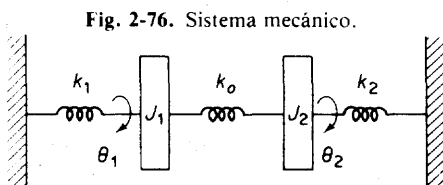


Fig. 2-76. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-2-26.** Utilizando la ley de conservación de la energía, obtenga la ecuación de movimiento del sistema mostrado en la Fig. 2-76.

**PROBLEMA B-2-27.** Una masa  $M$  colocada sobre un plano horizontal liso está unida a una masa colgante  $m$  a través de un alambre sin masa como se muestra en la Fig. 2-77. El alambre pasa horizontalmente sobre una polea de radio  $r$  y masa  $m_p$ . La polea está libre para girar sobre su eje de rotación. Suponga que el alambre es inextensible

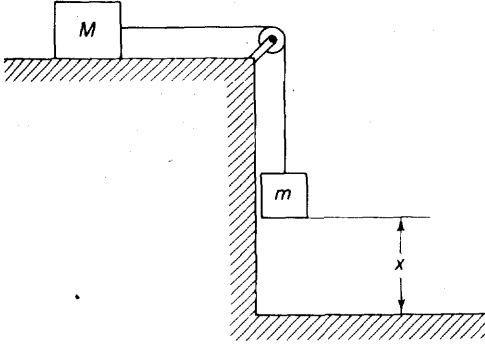


Fig. 2-77. Sistema de masa colgante.

y no se desliza cuando la polea gira. Suponga también que la masa  $M$  se mantiene inicialmente en reposo y que la masa  $m$  está en reposo a una distancia vertical  $x$  del piso. En  $t = 0$ , se suelta la masa  $M$  para que se mueva. Utilizando la ley de conservación de la energía, encuentre la velocidad de la masa  $m$  cuando pega contra el piso. Desprecie la fricción entre la masa  $M$  y el plano horizontal.

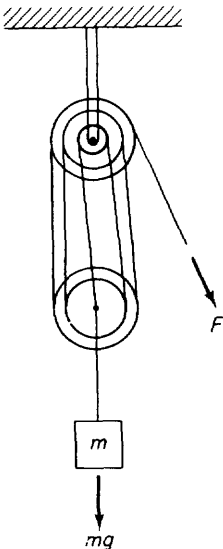


Fig. 2-78. Polipasto.

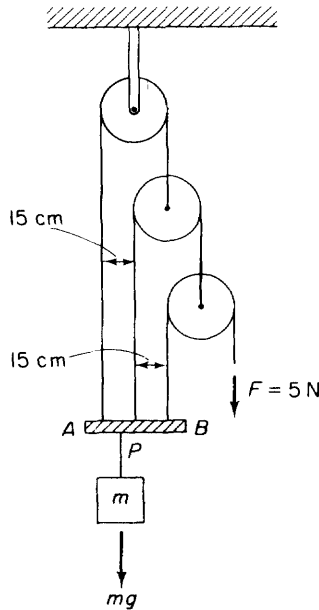


Fig. 2-79. Polipasto.

**PROBLEMA B-2-28.** Un cuerpo de peso  $mg$  (donde  $m = 1000$  kg) se jala verticalmente hacia arriba mediante un polipasto como se muestra en la Fig. 2-78. Encuentre la fuerza necesaria para mover el peso. ¿Cuánta potencia se necesita para mover el peso a una velocidad de  $0.5$  m/s?

**PROBLEMA B-2-29.** En el polipasto mostrado en la Fig. 2-79, encuentre el peso máximo  $mg$  N que puede jalarsse hacia arriba mediante una fuerza  $F$  de  $5$  N. Suponga que la barra  $AB$  pesa  $2$  N. Para mantener la barra  $AB$  horizontal cuando se jala el peso  $mg$  ¿dónde debe posicionarse éste? (Determine la posición del punto  $P$ .)

**PROBLEMA B-2-30.** Se impulsa una flecha mediante un motor eléctrico a través de un tren de engranes reductor de velocidad. La salida y la velocidad del motor son  $1.5$  kW y  $60$  Hz, respectivamente. Suponiendo que la relación de reducción de la velocidad sea  $1:30$ , calcule el par de la flecha impulsada; desprecie las pérdidas en la transmisión de potencia.

# 3

## SISTEMAS ELÉCTRICOS

### 3-1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata de la elaboración de modelos matemáticos (modelado matemático) y el análisis de la respuesta de los sistemas eléctricos. Puesto que los materiales básicos de circuitos eléctricos que normalmente se estudian en el nivel medio superior están cubiertos en la Sec. 3-1, esta sección debe considerarse como material de repaso. En la Sec. 3-2 se presentan las leyes básicas de los circuitos eléctricos, tales como la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff. En seguida la Sec. 3-3 trata de la elaboración de modelos matemáticos y el análisis de problemas de circuitos. La potencia y energía eléctricas se explican en la Sec. 3-4 y los sistemas análogos en la Sec. 3-5, sección final.

Comenzamos con un breve repaso de voltaje, carga, corriente y fuentes de corriente y de voltaje, seguido de una explicación de los tres elementos básicos de los sistemas eléctricos: elementos resistivos, capacitivos e inductivos.

**Voltaje.** El *voltaje* en los sistemas eléctricos es análogo a la presión en los sistemas hidráulicos o neumáticos. Esta es la fuerza electromotriz requerida para producir un flujo de corriente en un alambre, es como la presión que se requiere para producir un flujo de líquido o gas en una tubería. La unidad de voltaje es el volt (V).



**Carga.** La *carga* eléctrica es la integral de la corriente con respecto al tiempo. La unidad de carga es el coulomb (C). Un coulomb es la cantidad de carga transferida en un segundo por una corriente de un ampere; esto es,

$$\text{Coulomb} = \text{ampere-segundo}$$

En unidades métricas, un coulomb es la cantidad de carga que experimenta una fuerza de un newton en un campo eléctrico de un volt por metro o

$$\text{Coulomb} = \text{newton-metro/volt}$$

**Corriente.** La *corriente* se refiere a la razón de cambio del flujo de carga. La unidad de corriente es el ampere. Si una carga de  $dq$  coulombs cruza un área dada en  $dt$  segundos, entonces la corriente  $i$  es

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Así pues, en una corriente de un ampere, la carga es transferida a razón de un coulomb por segundo o

$$\text{Ampere} = \text{coulomb/segundo}$$

Si la carga positiva fluye de izquierda a derecha (o la carga negativa de derecha a izquierda), entonces el flujo de corriente es de izquierda a derecha. En relación con la Fig. 3-1, si  $i$  es positiva, el flujo de corriente es de izquierda a derecha. Si  $i$  es negativa, el flujo de corriente es de derecha a izquierda.

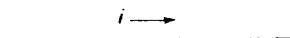
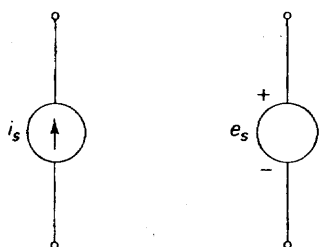


Fig. 3-1. Flujo de corriente.

**Fuentes de corriente y fuentes de voltaje.** Por *fente de corriente* se entiende una fuente de energía que produce un valor específico de corriente, usualmente como función del tiempo. Esta es capaz de suministrar una corriente específica independientemente del voltaje a través de la fuente. Si un generador suministra la corriente en forma casi independiente del circuito conectado, se trata de un *generador de corriente*. Algunas fuentes de corriente comúnmente usadas en los sistemas eléctricos incluyen transistores y otras fuentes de potencia comerciales disponibles, diseñadas para corriente constante.

La *fente de voltaje* es una fuente de energía que suministra un valor específico de voltaje en función del tiempo, en forma completamente independiente de la corriente. En otras palabras, es una fuente de potencia eléctrica en la cual el voltaje es independiente de la corriente consumida. Un generador que suministra una salida de voltaje que es casi independiente del circuito al cual está conectado se llama *generador de voltaje*. Algunos ejemplos de fuentes de voltaje son los generadores rotatorios, las baterías y los suministradores de potencia a voltaje constante, comercialmente dispo-

nibles, para sistemas electrónicos. Los símbolos en circuitos para una fuente de corriente y una fuente de voltaje se muestran en la Fig. 3-2.



Fuente de corriente

Fuente de voltaje

Fig. 3-2. Símbolos en circuitos para fuente de corriente y fuente de voltaje.

Es posible para una batería suministrar un voltaje casi constante en bajas corrientes. Sin embargo, en altas corrientes, el voltaje de salida puede abatirse en forma considerable porque una parte de la energía química se convierte en calor. Así pues, una batería puede representarse mediante una fuente de voltaje pura y una resistencia interna, donde esta última causa las pérdidas por calor.

**Elementos básicos de los circuitos eléctricos.** En la Sec. 2-2 explicamos los modelos matemáticos de los sistemas mecánicos básicos. Existe una situación análoga en los sistemas eléctricos. Se encuentran tres tipos de elementos básicos en los circuitos eléctricos: elementos resistivos, elementos capacitivos y elementos inductivos, que se explican a continuación.

**Elementos resistivos.** La *Resistividad* se define como el cambio en voltaje requerido para producir un cambio unitario en la corriente o

$$\text{Resistencia } R = \frac{\text{cambio en voltaje } V}{\text{cambio en corriente } A}$$

La resistencia  $R$  de un resistor lineal puede entonces darse por

$$R = \frac{e_R}{i}$$

donde  $e_R$  es el voltaje a través del resistor e  $i$  es la corriente que fluye por el resistor. La unidad de resistencia es el Ohm ( $\Omega$ ), donde

$$\text{Ohm} = \frac{\text{volt}}{\text{ampere}}$$

En el resistor mostrado en la Fig. 3-3, un  $e_R$  positivo causa que una corriente  $i$  fluya de izquierda a derecha. En consecuencia, tomamos la dirección positiva de  $i$  hacia la derecha.

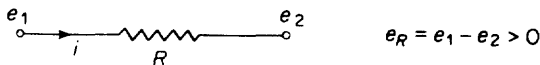


Fig. 3-3. Resistor.

El recíproco de la resistencia se llama *conductancia*. La unidad de conductancia es el siemens (S). ( $1 \text{ S} = 1 \text{ A/V} = \Omega^{-1} = \text{mho}$ )

$$\text{Conductancia} = \frac{1}{R} = G \text{ S}$$

Los resistores no almacenan energía eléctrica en forma alguna pero en su lugar la disipan en forma de calor. Adviértase que los resistores reales pueden ser no lineales y pueden también presentar algunos efectos capacitivos e inductivos.

**Elementos capacitivos.** Dos conductores separados por un medio no conductor (aislante o dieléctrico) forman un capacitor. De modo que dos placas metálicas separadas por un material eléctrico muy delgado forman un capacitor. Algunas veces el área se hace variable, como en un condensador de sintonización de un radio.

La *capacitancia* se define como el cambio en la cantidad de carga eléctrica requerido para producir un cambio unitario en el voltaje o

$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{cambio en cantidad de carga eléctrica}}{\text{cambio en voltaje}} \frac{C}{V}$$

La capacitancia  $C$  es una medida de la cantidad de carga que puede almacenarse para un voltaje dado entre las placas. (Al acercarse las placas entre sí la capacitancia se incrementa y se puede almacenar carga adicional para un voltaje dado entre placas.) La capacitancia  $C$  de un capacitor puede darse entonces por

$$C = \frac{q}{e_c}$$

donde  $q$  es la cantidad de carga almacenada y  $e_c$  es el voltaje a través del capacitor. La unidad de capacitancia es el farad (F), donde

$$\text{Farad} = \frac{\text{ampere-segundo}}{\text{volt}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}}$$

Adviértase que la capacitancia  $C$  se define como un número positivo. Por lo tanto, el signo algebraico de la carga  $q$  es el mismo que el del voltaje  $e_c$  a través del capacitor. En el capacitor mostrado en la Fig. 3-4, un  $e_c$  positivo causa que una corriente  $i$  fluya de izquierda a derecha. Por eso, tomamos la dirección positiva de  $i$  hacia la derecha como lo muestra el diagrama.

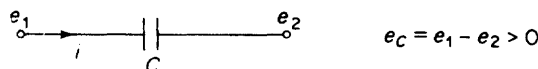


Fig. 3-4. Capacitor.

Puesto que  $i = dq/dt$  y  $e_c = q/C$ , tenemos

$$i = C \frac{de_c}{dt}$$

o bien

$$de_c = \frac{1}{C} i dt$$

Por lo tanto,

$$e_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + e_c(0)$$

Un capacitor que tenga una capacitancia de un farad es muy grande; los que se usan normalmente en dispositivos electrónicos se miden en microfarads ( $10^{-6}$  F). Algunos capacitores se miden en picofarads ( $10^{-12}$  F).

Aunque un capacitor puro almacena energía y puede entregarla toda, los capacitores reales, por otro lado, muestran diferentes pérdidas. Estas pérdidas de energía se indican mediante un *factor de potencia*, el cual es la relación de las pérdidas de energía por ciclo de voltaje de ca con respecto a la energía almacenada por ciclo. Así pues, es deseable un factor de potencia de valor reducido.

**Elementos inductivos.** Alrededor de una carga en movimiento o corriente hay una región de influencia que se llama *campo magnético*. Si el circuito se encuentra en un campo magnético variante con respecto al tiempo, se induce una fuerza electromotriz en el circuito. La relación entre el voltaje inducido y la razón de cambio de la corriente (que significa cambio en corriente por segundo) se define como *inductancia* o

$$\text{Inductancia} = \frac{\text{cambio en voltaje inducido}}{\text{cambio en corriente por segundo}} \quad \frac{\text{V}}{\text{A/s}}$$

Los efectos inductivos pueden clasificarse como autoinductancia e inductancia mutua.

La *autoinductancia* es la propiedad de una bobina particular que ocurre cuando el campo magnético establecido por la corriente de la bobina enlaza a la propia bobina. La magnitud del voltaje inducido es proporcional a la razón de cambio del flujo que enlaza al circuito. Si el circuito no contiene elementos ferromagnéticos (tales como un núcleo de hierro), la razón de cambio del flujo es proporcional a  $di/dt$ . La autoinductancia o simplemente inductancia  $L$ , es la constante de proporcionalidad entre el voltaje inducido  $e_L$  volts y la razón de cambio de la corriente (o cambio en corriente por segundo); esto es,

$$L = \frac{e_L}{di/dt}$$

La unidad de inductancia es el henry (H). (Un circuito eléctrico tiene una inductancia de un henry cuando la razón de cambio de un ampere por segundo inducirá una fem de un volt.)

$$\text{Henry} = \frac{\text{volt}}{\text{ampere/segundo}} = \frac{\text{weber}}{\text{ampere}}$$

En el inductor mostrado en la Fig. 3-5, un  $e_L$  positivo causa que una corriente  $i$  fluya de izquierda a derecha. Luego, tomamos la dirección posi-

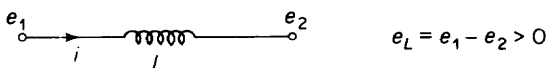


Fig. 3-5. Inductor.

tiva de  $i$  hacia la derecha como en el diagrama. Nótese que para el inductor mostrado

$$e_L = L \frac{di}{dt}$$

o bien

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e_L dt + i_L(0)$$

A causa de que la mayor parte de los inductores son bobinas de alambre, éstos tienen una considerable resistencia. Las pérdidas de energía debidas a la presencia de la resistencia se indican en el *factor de calidad*  $Q$ , el cual muestra la relación entre la energía almacenada y la disipada. Un valor de  $Q$  alto generalmente significa que el inductor posee poca resistencia.

La *inductancia mutua* se refiere a la influencia entre inductores que resulta de la interacción de sus campos. Si dos inductores están involucrados en un circuito eléctrico, cada uno de ellos puede quedar bajo la influencia del campo magnético del otro inductor. Entonces la caída de voltaje en el primer inductor está relacionada con la corriente que fluye por el primer inductor, tanto como con la corriente que fluye por el segundo inductor, cuyo campo magnético influye en el primero. El segundo inductor también está influido por el primero, exactamente de la misma manera. Cuando un cambio de corriente de un ampere por segundo en cualquiera de los dos inductores induce una fem de un volt en el otro inductor, su inductancia mutua  $M$  es de un henry. (Nótese que se acostumbra usar el símbolo  $M$  para denotar la inductancia mutua con el objeto de distinguirla de la autoinductancia  $L$ .) Pospondremos una explicación adicional de la inductancia mutua para la Sec. 2-3.

### 3-2 LEYES BÁSICAS DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En esta sección exponemos la ley de Ohm y las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff. La primera es fundamental para obtener circuitos de resistencia combinadas en serie y en paralelo, las corrientes y los voltajes en

tales circuitos, etcétera. Las leyes de Kirchhoff son básicas para la formulación de las ecuaciones de manejo que caracterizan a los circuitos eléctricos.

**Ley de Ohm.** La *ley de Ohm* establece que la corriente en un circuito es proporcional a la fuerza electromotriz total (fem) que actúa sobre el circuito e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito. Puede expresarse mediante

$$i = \frac{e}{R}$$

donde  $i$  es la corriente (ampere),  $e$  es la fem (volts) y  $R$  la resistencia (ohms).

**Circuitos en serie.** La resistencia combinada de resistores conectados en serie es la suma de las resistencias por separado. La figura 3-6 muestra un circuito en serie simple. El voltaje entre los puntos  $A$  y  $B$  es

$$e = e_1 + e_2 + e_3$$

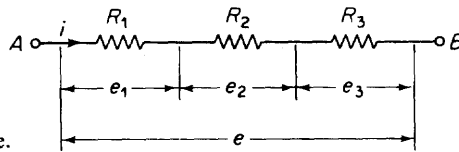


Fig. 3-6. Circuito en serie.

donde

$$e_1 = iR_1, \quad e_2 = iR_2, \quad e_3 = iR_3$$

Por lo tanto,

$$\frac{e}{i} = R_1 + R_2 + R_3$$

La resistencia combinada  $R$  está dada por

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

**Circuitos en paralelo.** En el circuito en paralelo mostrado en la Fig. 3-7,

$$i_1 = \frac{e}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e}{R_2}, \quad i_3 = \frac{e}{R_3}$$

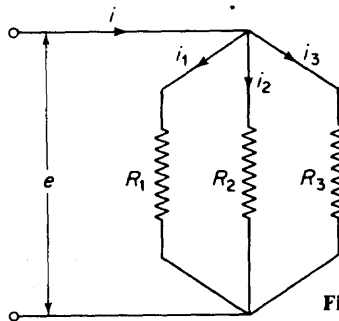


Fig. 3-7. Circuito en paralelo.

Puesto que  $i = i_1 + i_2 + i_3$ , se sigue que

$$i = \frac{e}{R_1} + \frac{e}{R_2} + \frac{e}{R_3} = \frac{e}{R}$$

donde  $R$  es la resistencia combinada. Por eso,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

o bien

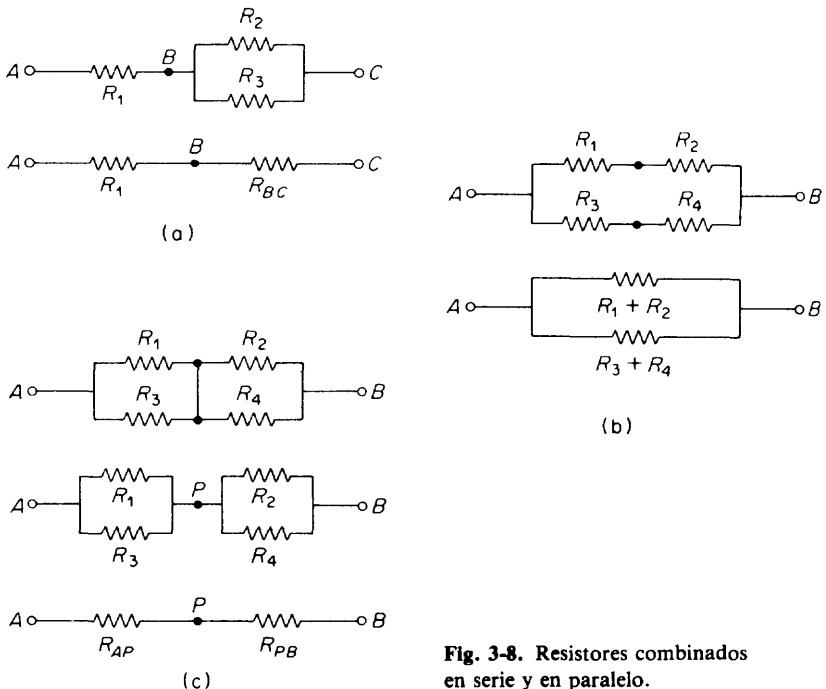
$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

**Resistencia de resistores combinados en serie y paralelo.** Considérese el circuito mostrado en la Fig. 3-8(a). La resistencia combinada  $R_{BC}$  entre los puntos  $B$  y  $C$  es

$$R_{BC} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Luego, la resistencia combinada  $R$  entre los puntos  $A$  y  $C$  es

$$R = R_1 + R_{BC} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



**Fig. 3-8.** Resistores combinados en serie y en paralelo.

El circuito mostrado en la Fig. 3-8(b) puede considerarse como un circuito en paralelo que consta de las resistencias  $(R_1 + R_2)$  y  $(R_3 + R_4)$ . Por lo tanto, la resistencia combinada  $R$  entre los puntos  $A$  y  $B$  es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}$$

o bien

$$R = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

A continuación, considérese el circuito mostrado en la Fig. 3-8(c). Aquí  $R_1$  y  $R_3$  están en paralelo y también  $R_2$  y  $R_4$  están en paralelo. Estas dos resistencias en paralelo están, a su vez, conectadas en serie. Redibujando el circuito como lo muestra la Fig. 3-8(c) obtenemos, por lo tanto,

$$R_{AP} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}, \quad R_{PB} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

Debido a eso, la resistencia combinada  $R$  se hace

$$R = R_{AP} + R_{PB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

**Corrientes y voltajes de circuitos en serie y en paralelo.** En el circuito mostrado en la Fig. 3-9, la caída de voltaje  $e_{BC}$  entre los puntos  $B$  y  $C$  es

$$e_{BC} = i R_{BC}$$

donde

$$R_{BC} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

De donde la corriente  $i_1$  que fluye a través de la resistencia  $R_1$  es

$$i_1 = \frac{e_{BC}}{R_1} = i \frac{R_{BC}}{R_1} = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

En forma similar, la corriente  $i_2$  que fluye por la resistencia  $R_2$  es

$$i_2 = \frac{e_{BC}}{R_2} = i \frac{R_{BC}}{R_2} = i \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

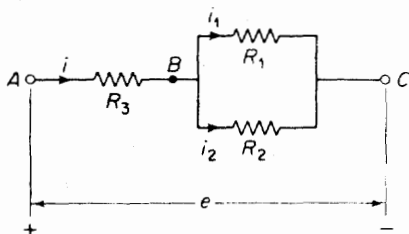


Fig. 3-9. Circuito eléctrico.



Mirando el circuito mostrado a continuación en la Fig. 3-10(a), la corriente  $i$  a través de la resistencia  $R_1 + R_2$  es

$$i = \frac{e}{R_1 + R_2}$$

donde  $e$  es la caída de voltaje entre los puntos  $A$  y  $B$ . Así pues, las caídas de voltaje  $e_1$  y  $e_2$  están dadas por

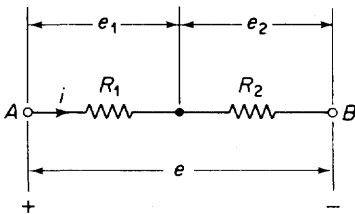
$$e_1 = iR_1 = e \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad e_2 = iR_2 = e \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

de las cuales

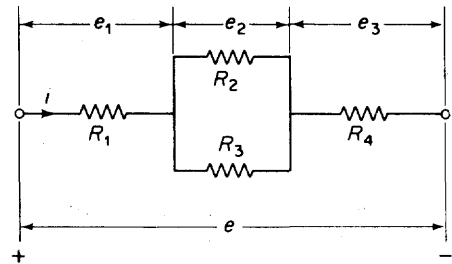
$$e_1 : e_2 = R_1 : R_2$$

En forma similar, para el circuito mostrado en la Fig. 3-10(b),

$$e_1 : e_2 : e_3 = R_1 : \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} : R_4$$



(a)



(b)

Fig. 3-10. Circuitos eléctricos.

**Leyes de Kirchhoff.** En la solución de problemas de circuitos que involucren muchas fuerzas electromotrices, resistencias, capacitancias, inductancias y demás, es necesario a veces el uso de las *leyes de Kirchhoff*. Hay dos leyes: la *ley de corrientes* (ley de nodos) y la *ley de voltajes* (ley de mallas).

**Ley de corrientes de Kirchhoff (ley de nodos).** Un *nodo* en un circuito eléctrico es un punto donde tres o más conductores se unen entre sí. La ley de corrientes de Kirchhoff (ley de nodos) establece que la suma algebraica de todas las corrientes que entran al nodo o salen de él, es cero. (Esta ley puede también expresarse como: la suma de corrientes que entra al nodo es igual a la suma de corrientes que sale del mismo nodo.) Al aplicar la ley a problemas de circuitos, deben observarse las siguientes reglas. Las corrientes que van hacia el nodo deben estar precedidas por un signo más. Las corrientes que van hacia afuera del nodo deben estar precedidas por un signo menos. En relación con la Fig. 3-11, la ley de corrientes de Kirchhoff establece que

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

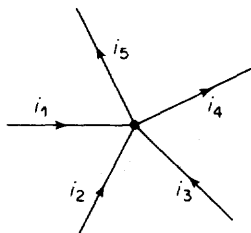


Fig. 3-11. Nodo.

**Ley de voltajes de Kirchhoff (ley de mallas).** La ley de voltajes de Kirchhoff establece que en cualquier instante dado del tiempo la suma algebraica de los voltajes alrededor de una malla cualquiera en un circuito eléctrico es cero. Esta ley puede también expresarse como: la suma de las caídas de voltaje es igual a la suma de elevaciones de voltaje alrededor de una malla. Al aplicar la ley a problemas de circuitos, deben observarse las siguientes reglas. Una elevación en el voltaje [la cual ocurre al ir a través de una fuente de fuerza electromotriz de la terminal negativa a la positiva, como la Fig. 3-12(a), o al ir a través de una resistencia en oposición al flujo de la corriente, como en la Fig. 3-12(b)] debe estar precedida por un signo más. Una caída de voltaje [la cual ocurre al ir a través de una fuerza electromotriz

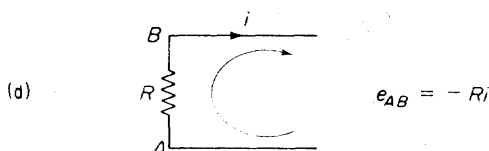
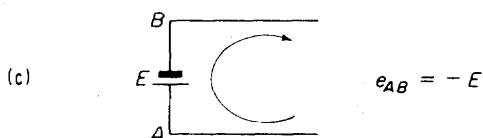
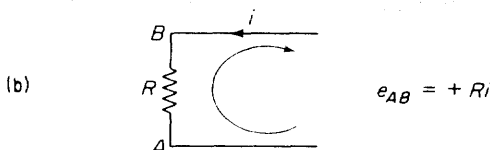
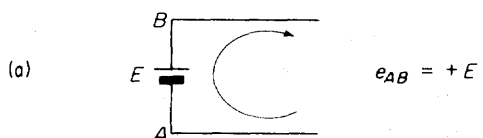


Fig. 3-12. Diagramas que muestran elevaciones de voltaje y caídas de voltaje en circuitos.

de la terminal positiva a la negativa, como en la Fig. 3-12(c), o al ir a través de una resistencia en la dirección del flujo de la corriente, como en la Fig. 3-12(c)] debe estar precedida por un signo menos.

La figura 3-13 muestra un circuito formado por una batería y una resistencia externa. Aquí  $E$  es la fuerza electromotriz,  $r$  la resistencia interna de la batería,  $R$  la resistencia externa e  $i$  la corriente. Si seguimos la malla en la dirección de las manecillas del reloj ( $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ) como se muestra, entonces

$$e_{AB} + e_{BC} + e_{CA} = 0$$

o bien

$$E - iR - ir = 0$$

de la cual

$$i = \frac{E}{R + r}$$

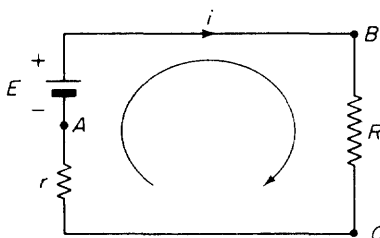


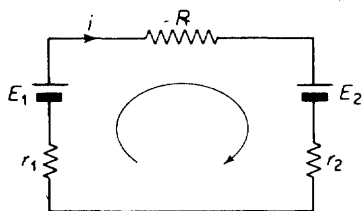
Fig. 3-13. Circuito eléctrico.

Un circuito formado por dos baterías y una resistencia externa aparece en la Fig. 3-14(a), donde  $E_1$  y  $r_1$  ( $E_2$  y  $r_2$ ) son la fuerza electromotriz y la resistencia interna de la batería No. 1 (batería No. 2), respectivamente, y  $R$  es la resistencia externa. Suponiendo que la dirección de la corriente  $i$  es la mostrada y siguiendo también la malla en el sentido de las manecillas del reloj como se muestra, el resultado es

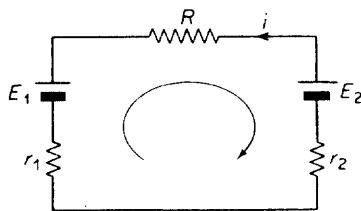
$$E_1 - iR - E_2 - ir_2 - ir_1 = 0$$

o bien

$$i = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2 + R} \quad (3-1)$$



(a)



(b)

Fig. 3-14. Circuitos eléctricos.

Si suponemos que la dirección de la corriente  $i$  se invierte Fig. 3-14(b), entonces, siguiendo la malla en la dirección de las manecillas del reloj, obtenemos

$$E_1 + iR - E_2 + ir_2 + ir_1 = 0$$

o bien

$$i = \frac{E_2 - E_1}{r_1 + r_2 + R} \quad (3-2)$$

Adviértase que, al resolver problemas de circuitos, si suponemos que la corriente fluye hacia la derecha y si el valor de  $i$  se calcula y resulta positivo, la corriente  $i$  realmente fluye hacia la derecha. Si se encuentra que el valor de  $i$  es negativo, la corriente  $i$  realmente fluye hacia la izquierda. En el circuito mostrado en la Fig. 3-14, supóngase que  $E_1 > E_2$ . Entonces la Ec. (3-1) da  $i > 0$ , lo cual significa que la corriente  $i$  fluye en la dirección opuesta. La ecuación (3-2), sin embargo, da  $i < 0$ , lo cual significa que la corriente  $i$  fluye en sentido contrario a la dirección supuesta.

Debe notarse que la dirección utilizada para seguir la malla es arbitraria, así como la dirección de la corriente puede ser supuesta arbitrariamente. Esto es, la dirección utilizada para recorrer la malla puede ser la de las manecillas del reloj o la contraria. El resultado final es el mismo en cualquier caso.

**Circuitos con dos o más mallas.** En circuitos con dos o más mallas, se pueden aplicar tanto la ley de corrientes como la ley de voltajes de Kirchhoff. El primer paso al escribir las ecuaciones del circuito consiste en determinar las direcciones que seguiremos en cada malla.

Considérese el circuito mostrado en la Fig. 3-15, el cual tiene dos mallas. Aquí podemos suponer las direcciones de las corrientes como se muestran en el diagrama. (Nótese que las direcciones de las corrientes supuestas son arbitrarias y pueden diferir de las que se muestran en el diagrama.) Supóngase que recorreremos las mallas en el sentido de las manecillas del reloj, como en la Fig. 3-15. (Otra vez, la dirección puede ser la de las manecillas del reloj o la contraria.)

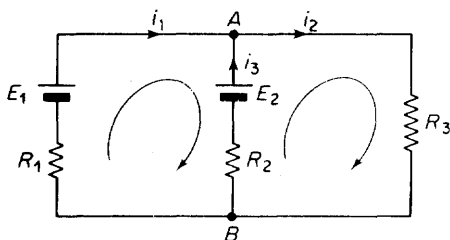


Fig. 3-15. Circuito eléctrico.

Entonces obtenemos las ecuaciones

$$\text{Para el punto A: } i_1 + i_3 - i_2 = 0$$

$$\text{Para la malla de la izquierda: } E_1 - E_2 + i_3 R_2 - i_1 R_1 = 0$$

Para la malla derecha:  $E_2 - i_2 R_3 - i_3 R_2 = 0$

Eliminando primero  $i_2$  de las tres ecuaciones precedentes y resolviendo después para  $i_1$  e  $i_3$ , encontramos

$$i_1 = \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$i_3 = \frac{E_2(R_1 + R_3) - E_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

Por lo tanto,

$$i_2 = i_1 + i_3 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

**Formulación de ecuaciones de malla utilizando corrientes cíclicas.** Con este enfoque suponemos que existe una corriente cíclica en cada malla. Por ejemplo, en la Fig. 3-16 suponemos que las corrientes cíclicas en el sentido

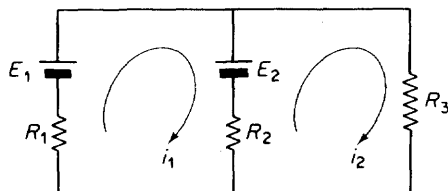


Fig. 3-16. Circuito eléctrico.

de las manecillas del reloj existen en las mallas izquierda y derecha, del circuito, respectivamente.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito, resultan las ecuaciones

Para la malla izquierda:  $E_1 - E_2 - R_2(i_1 - i_2) - R_1 i_1 = 0$

Para la malla derecha:  $E_2 - R_3 i_2 - R_2(i_2 - i_1) = 0$

Nótese que la corriente neta a través de la resistencia  $R_2$  es la diferencia entre  $i_1$  e  $i_2$ . Resolviendo para  $i_1$  e  $i_2$  da

$$i_1 = \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$i_2 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

(Mediante la comparación de los circuitos mostrados en las Figs. 3-15 y 3-16, se verifica que  $i_3$  en la Fig. 3-15 es igual a  $i_2 - i_1$  en la Fig. 3-16.)

### 3-3 ELABORACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS (MODELADO) Y ANÁLISIS DE CIRCUITOS

El primer paso en los problemas de análisis de circuitos consiste en obtener modelos matemáticos de los circuitos. (Aunque los términos *circuitos*

y *red* algunas veces se usan de modo intercambiable, *red* implica una interconexión más complicada que *circuito*.) Un modelo matemático puede constar de ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrodiferenciales y otras semejantes. Tal modelo puede obtenerse aplicando una o ambas leyes de Kirchhoff a un circuito dado. Las variables de interés en el análisis de circuitos son los voltajes y las corrientes en diferentes puntos a lo largo del circuito.

En esta sección exponemos técnicas de modelado matemático e ilustramos soluciones de problemas de circuitos simples. Aunque muchos problemas importantes pueden resolverse utilizando los métodos dados, se entiende que las explicaciones son introductorias e ilustrativas más que profundas.

**Método de nodos para la obtención de modelos matemáticos.** En el método de nodos formulamos ecuaciones por la aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff (ley de nodos) a cada nodo del circuito.

**Ejemplo 3-1.** En el circuito mostrado en la Fig. 3-17, supóngase que en  $t = 0$  se cierra el interruptor  $S$ , de modo que  $e = 12$  volts actúe como entrada al circuito. Encuéntrense los voltajes  $e_A(t)$  y  $e_B(t)$ , donde  $e_A$  y  $e_B$  son voltajes en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Supóngase que el condensador no está cargado inicialmente.

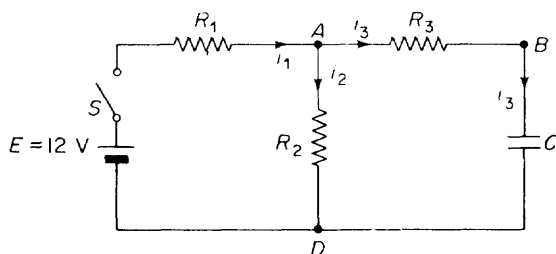


Fig. 3-17. Circuito eléctrico.

En este problema escogemos al nodo  $D$  como referencia ( $e_D = 0$ ) y medimos el voltaje de cada nodo con respecto a ese. (En la práctica, muchos elementos están conectados a una base de metal que a su vez está conectada a tierra. Tal conexión a tierra, representada a menudo como un conductor común en la base del diagrama del circuito, puede servir como una referencia conveniente.)

En el nodo  $A$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0,$$

donde

$$i_1 = \frac{E - e_A}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e_A - e_D}{R_2} = \frac{e_A}{R_2}, \quad i_3 = \frac{e_A - e_B}{R_3}$$

Entonces

$$\frac{E - e_A}{R_1} - \frac{e_A}{R_2} - \frac{e_A - e_B}{R_3} = 0 \quad (3-3)$$

En el punto  $B$ ,  $i_3$  es también igual a  $C d(e_B - e_D)/dt = C de_B/dt$ . Por lo tanto,

$$\frac{e_A - e_B}{R_3} = C \frac{de_B}{dt} \quad (3-4)$$

Los voltajes  $e_A(t)$  y  $e_B(t)$  pueden obtenerse de las Ecs. (3-3) y (3-4) como funciones del tiempo.

Resolvamos las Ecs. (3-3) y (3-4) para  $e_A(t)$  y  $e_B(t)$  en un caso especial donde

$$2R_1 = R_2 = R_3, \quad R_3C = 1$$

Entonces, a partir de la Ec. (3-3) obtenemos

$$2e_A - \frac{1}{2}e_B = E = 12 \quad (3-5)$$

De la Ec. (3-4)

$$\dot{e}_B + e_B = e_A \quad (3-6)$$

Eliminando  $e_A$  de las Ecs. (3-5) y (3-6), tenemos

$$\dot{e}_B + \frac{3}{4}e_B = 6 \quad (3-7)$$

Para resolver esta última ecuación, hagamos

$$\frac{3}{4}e_B - 6 = \frac{3}{4}x$$

o bien

$$x = e_B - 8$$

Por tanto, la Ec. (3-7) puede escribirse

$$\dot{x} + \frac{3}{4}x = 0$$

La solución de esta última ecuación puede encontrarse escribiendo  $x = Ke^{\lambda t}$  y sustituyendo  $\dot{x}$  y  $x$  en la ecuación o

$$K\lambda e^{\lambda t} + \frac{3}{4}Ke^{\lambda t} = 0$$

de la cual

$$\lambda = -\frac{3}{4} = -0.75$$

Se sigue que la solución de la Ec. (3-7) puede escribirse

$$e_B(t) = x(t) + 8 = Ke^{-0.75t} + 8$$

donde  $K$  será determinada por la condición inicial. Puesto que el condensador no está cargado inicialmente,  $e_B(0) = 0$ , o sea

$$e_B(0) = K + 8 = 0$$

Este resultado nos da  $K = -8$ , y  $e_B(t)$  se obtiene como

$$e_B(t) = 8(1 - e^{-0.75t})$$

Entonces de la Ec. (3-6)

$$e_A(t) = \dot{e}_B(t) + e_B(t) = 8 - 2e^{-0.75t}$$

Adviértase que  $e^{-4} = 0.0183$  y  $e^{-6} = 0.00248$ . En consecuencia, para  $t > 8$ , tenemos  $e^{-75t} < 0.00248$  y aproximadamente  $e_A(t) = e_B(t) = 8$  volts. Para  $t > 8$ , por lo tanto,  $R_3$  no disipa potencia alguna. Sin embargo, la potencia se disipa continuamente en las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

**Método de mallas para la obtención de modelos matemáticos.** Al usar este método, primero identificamos las corrientes incógnitas y suponemos arbitrariamente las direcciones de las corrientes alrededor de las mallas; luego escribimos las ecuaciones aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff (ley de mallas).

**Ejemplo 3-2.** Supóngase que el interruptor  $S$  está abierto en  $t < 0$  y se cierra en  $t = 0$  en el circuito de la Fig. 3-18. Solamente está involucrada una malla aquí. Escogien-

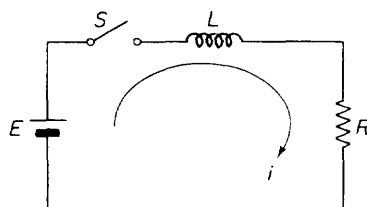


Fig. 3-18. Circuito eléctrico.

do arbitrariamente la dirección de la corriente como se muestra en la figura, obtenemos la ecuación

$$E - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$

o bien

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (3-8)$$

Este es un modelo matemático del circuito dado. Nótese que en el instante en que se cierra el interruptor  $S$  la corriente  $i(0)$  es cero porque la corriente en el inductor no puede cambiar de cero a un valor finito instantáneamente. Así pues,  $i(0) = 0$ .

Resolvamos la Ec. (3-8) para la corriente  $i(t)$ . Nótese que por definición

$$x = i - \frac{E}{R}$$

La Ec. (3-8) puede simplificarse a

$$L \frac{dx}{dt} + Rx = 0$$

Además, suponiendo una solución exponencial, como en el ejemplo 3-1, obtenemos

$$x = Ke^{-(R/L)t}$$

o bien

$$i(t) = x(t) + \frac{E}{R} = Ke^{-(R/L)t} + \frac{E}{R}$$

donde  $K$  se determina a partir de la condición inicial. Observando que  $i(0) = 0$ , tenemos

$$i(0) = K + \frac{E}{R} = 0$$



o bien

$$K = -\frac{E}{R}$$

Por lo tanto, la corriente  $i(t)$  puede encontrarse como

$$i(t) = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]$$

Una gráfica típica de  $i(t)$  contra  $t$  aparece en la Fig. 3-19.

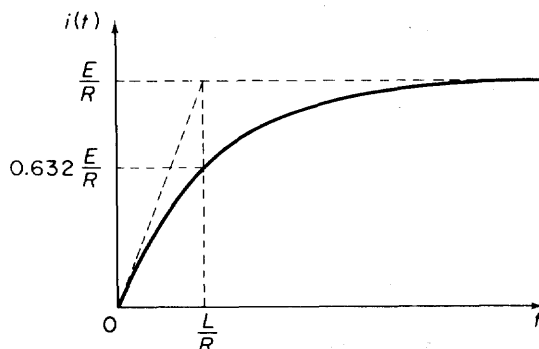


Fig. 3-19. Gráfica de  $i(t)$  contra  $t$  del circuito mostrado en la Fig. 3-18 cuando el interruptor  $S$  está cerrado.

**Ejemplo 3-3.** Utilizando otra vez el circuito mostrado en la Fig. 3-18, supóngase que el interruptor  $S$  está abierto en  $t < 0$ . Se cierra en  $t = 0$  y se vuelve a abrir en  $t = t_1 > 0$ . Encuéntrese la corriente  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

La ecuación del circuito para  $t_1 > t \geq 0$  es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad i(0) = 0$$

En relación con el ejemplo 3-2, la solución de esta ecuación es

$$i(t) = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}] \quad (t_1 > t \geq 0) \quad (3-9)$$

En  $t = t_1$  el interruptor se abre. La ecuación del circuito para  $t \geq t_1$  es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (3-10)$$

donde la condición inicial en  $t = t_1$  está dada por

$$i(t_1) = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t_1}] \quad (3-11)$$

(Nótese que el valor instantáneo de la corriente en el instante de operación del interruptor  $t = t_1$  sirve como condición inicial de la respuesta transitoria para  $t \geq t_1$ .)

La solución de la Ec. (3-10) puede escribirse

$$i(t) = Ke^{-(R/L)t} \quad (3-12)$$

donde la constante  $K$  se determina como sigue. Sustituyendo  $t = t_1$  en la Ec. (3-12) e igualando el resultado con la Ec. (3-11) da

$$i(t_1) = Ke^{-(R/L)t_1} = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t_1}]$$

de la cual

$$K = \frac{E}{R} [1 - e^{-(R/L)t_1}] e^{(R/L)t_1} \quad (3-13)$$

Usando luego las Ecs. (3-12) y (3-13), tenemos

$$i(t) = \frac{E}{R} [1 - e^{-(R/L)t_1}] e^{-(R/L)(t-t_1)} \quad (t \geq t_1) \quad (3-14)$$

Por lo tanto, en relación con las Ecs. (3-9) y (3-14), la corriente  $i(t)$  para  $t \geq 0$  puede escribirse así:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{R} [1 - e^{-(R/L)t}] & (t_1 > t \geq 0) \\ &= \frac{E}{R} [1 - e^{-(R/L)t_1}] e^{-(R/L)(t-t_1)} & (t \geq t_1) \end{aligned}$$

Una gráfica típica de  $i(t)$  contra  $t$  para este caso se da en la Fig. 3-20.

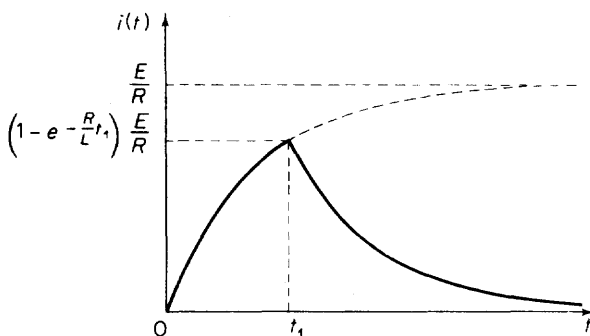


Fig. 3-20. Gráfica de  $i(t)$  contra  $t$  del circuito mostrado en la Fig. 3-18 cuando el interruptor  $S$  está cerrado y se abre en  $t = t_1$ .

**Ejemplo 3-4.** La figura 3-21 muestra un circuito que consta de un capacitor, un resistor y una batería. El capacitor está cargado a un voltaje de 12 volts y en  $t = 0$  el interruptor lo conecta al resistor. Así pues,  $e_C(0) = 12$  volts. Obténgase la corriente  $i(t)$  en función del tiempo.

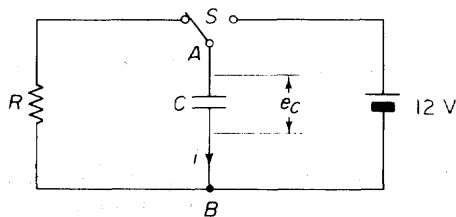


Fig. 3-21. Circuito eléctrico.

Para  $t > 0$ , hay una malla en el circuito. Suponiendo arbitrariamente la dirección de la corriente como se muestra en la figura, encontramos

$$\frac{1}{C} \int i \, dt + Ri = 0$$

o bien

$$\frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + \frac{1}{C} q(0) + Ri = 0$$

Adviértase que  $q(0)/C = e_A(0) - e_B(0) = e_C(0)$ . Por lo tanto, se sigue que

$$\frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + Ri = -e_C(0) \quad (3-15)$$

Diferenciando ambos miembros de la Ec. (3-15) con respecto al tiempo resulta en

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

La solución de esta última ecuación puede escribirse como

$$i(t) = Ke^{-t/RC} \quad (3-16)$$

donde  $K$  es una constante que se determina a partir de la condición inicial,  $e_C(0) = 12$  volts. Sustituyendo  $t = 0+$  en la Ec. (3-15) da

$$\frac{1}{C} \int_0^{0+} i \, dt + Ri(0+) = -e_C(0)$$

Puesto que

$$\frac{1}{C} \int_0^{0+} i \, dt = 0$$

obtenemos

$$i(0+) = -\frac{e_C(0)}{R}$$

De la Ec. (3-16) tenemos

$$i(0+) = K$$

Por lo tanto,

$$K = -\frac{e_C(0)}{R} = -\frac{12}{R}$$

La corriente  $i(t)$ , por lo tanto, se obtiene como

$$i(t) = -\frac{12}{R} e^{-t/RC}$$

Puesto que la corriente  $i(t)$  resultó negativa, la corriente fluye realmente en sentido contrario a la dirección supuesta.

**Puente de Wheatstone.** El puente de Wheatstone mostrado en la Fig. 3-22 consta de cuatro resistores, una batería (o fuente de bajo voltaje de corriente directa), y un galvanómetro. La resistencia  $R_x$  es una resistencia desconocida. Las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  son las ramas de relación y pueden ha-

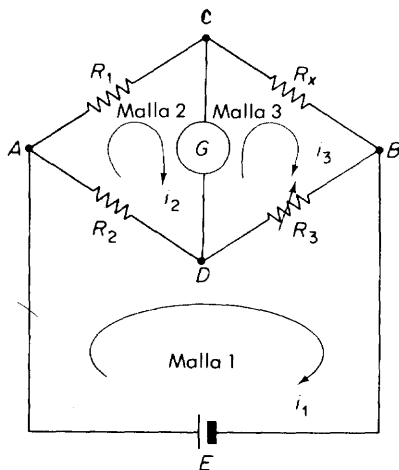


Fig. 3-22. Puente de Wheatstone.

cerse iguales. Las posiciones de la batería y el galvanómetro pueden intercambiarse. Mediante el uso de un puente como este, se pueden medir con precisión resistores desde una fracción de ohm hasta de 100 000 ohms o más. Se usan numerosas modificaciones del puente para medir resistencias muy bajas y voltajes de ca.

En el diagrama el puente de Wheatstone tiene tres mallas. Identifiquémoslas como malla 1, malla 2 y malla 3 e identifiquemos a las corrientes cíclicas de cada malla como  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ . La condición de equilibrio en un puente de Wheatstone es que la corriente a través del galvanómetro sea cero, o  $i_2 - i_1 = 0$ . Esta condición es equivalente a la condición de  $e_c = e_d$ . De modo que si el puente está balanceado, tenemos

$$R_1 i_2 = R_2 (i_1 - i_2)$$

$$R_x i_3 = R_3 (i_1 - i_3)$$

$$i_2 = i_3$$

de las cuales

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_3} \quad \text{Si el puente está balanceado}$$

Si el puente no está balanceado, a través del galvanómetro fluye una corriente. Las ecuaciones del puente son como sigue

$$\text{Para la malla 1: } E - R_2(i_1 - i_2) - R_3(i_1 - i_3) = 0$$

$$\text{Para la malla 2: } R_1 i_2 + R_G(i_2 - i_3) + R_2(i_2 - i_1) = 0$$

$$\text{Para la malla 3: } R_x i_3 + R_3(i_3 - i_1) + R_G(i_3 - i_2) = 0$$

donde  $R_G$  es la resistencia del galvanómetro. Reescribiendo, obtenemos

$$\begin{aligned}
 (R_2 + R_3)i_1 - R_2i_2 - R_3i_3 &= E \\
 -R_2i_1 + (R_1 + R_G + R_2)i_2 - R_Gi_3 &= 0 \\
 -R_3i_1 - R_Gi_2 + (R_x + R_3 + R_G)i_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Consideremos un caso especial donde  $R_1 = R_2 = 20 \, \Omega$ ,  $R_3 = 10 \, \Omega$ ,  $R_x = 5 \, \Omega$  y  $R_G = 50 \, \Omega$  y encontremos la corriente que fluye a través del galvanómetro. Puesto que  $R_1/R_2 \neq R_x/R_3$ , el puente no está balanceado. Sustituyendo estos valores numéricos en las tres últimas ecuaciones da

$$\begin{aligned}
 30i_1 - 20i_2 - 10i_3 &= E \\
 -20i_1 + 90i_2 - 50i_3 &= 0 \\
 -10i_1 - 50i_2 + 65i_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Y resolviendo para  $i_2$ , tenemos

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & E & -10 \\ -20 & 0 & -50 \\ -10 & 0 & 65 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -20 & -10 \\ -20 & 90 & -50 \\ -10 & -50 & 65 \end{vmatrix}} = \frac{1800E}{45\,500} = 0.03956E$$

En forma semejante, resolviendo para  $i_3$ ,

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & -20 & E \\ -20 & 90 & 0 \\ -10 & -50 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -20 & -10 \\ -20 & 90 & -50 \\ -10 & -50 & 65 \end{vmatrix}} = \frac{1900E}{45\,500} = 0.04176E$$

Por lo tanto, la corriente que fluye por el galvanómetro es

$$i_2 - i_3 = 0.03956E - 0.04176E = -0.0022E$$

Puesto que  $i_2 - i_3$  es negativa, la corriente  $0.0022E$  fluye en dirección del punto  $D$  al punto  $C$ .

**Circuitos con inductancia mutua.** Consideremos dos bobinas (inductores) que están mutuamente acoplados (Fig. 3-23). El voltaje inducido en la bobina 1 debido al cambio de corriente en la bobina 2 puede ser sumado o restado del voltaje autoinducido en la bobina 1. Que el voltaje inducido debido a la inductancia mutua  $M$  se sume al voltaje autoinducido depende de la dirección de las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  y a la orientación de las bobinas. La di-

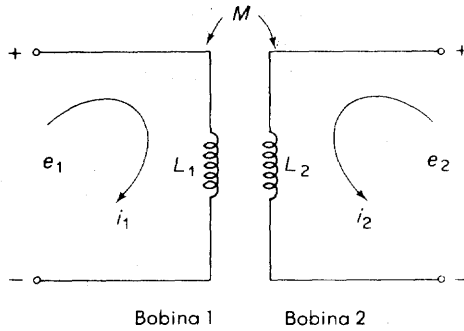


Fig. 3-23. Bobinas mutuamente acopladas.

rección de las corrientes puede escogerse arbitrariamente. La orientación de las bobinas generalmente está fija, sin embargo, se acostumbra especificar esta orientación (basada en pruebas experimentales o en arreglos físicos) en el diagrama del circuito colocando un punto en un extremo de cada bobina de un par mutuo como se muestra en la Fig. 3-24(a) y (b).

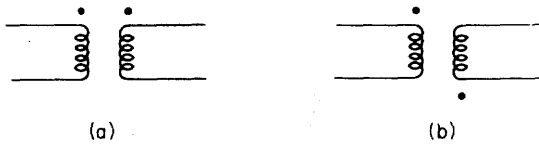


Fig. 3-24. Diagramas que muestran la orientación de bobinas mutuamente acopladas.

Definiremos  $L_1$  y  $L_2$  como las autoinductancias de las bobinas 1 y 2, respectivamente, y  $M$  como la inductancia mutua. Si ambas corrientes  $i_1$  e  $i_2$  entran (o salen) a través de un punto, entonces la caída de voltaje debida a la inductancia mutua tendrá el mismo signo que la caída de voltaje debida a la autoinductancia. Por ejemplo, en el circuito mostrado en la Fig. 3-25(a),

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

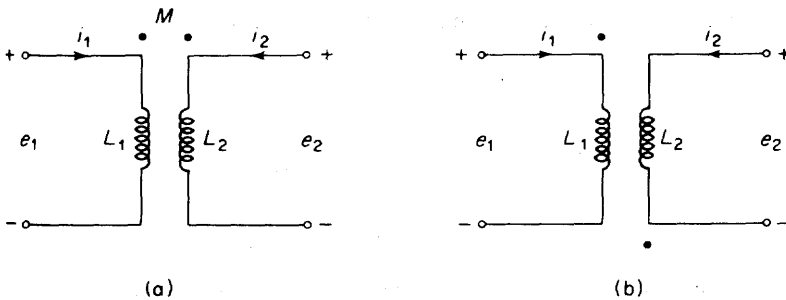


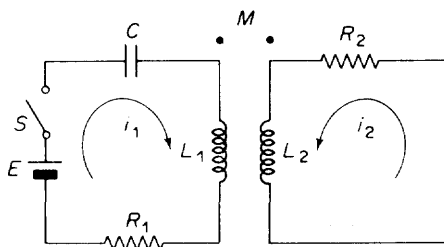
Fig. 3-25. Bobinas mutuamente acopladas.

Si una corriente entra por un punto y la otra corriente sale por otro, la caída de voltaje debida a la inductancia mutua tendrá el signo opuesto a la caída de voltaje debida a la autoinductancia. Para ilustrar lo anterior, en el sistema de la Fig. 3-25(b),  $i_1$  entra por un punto e  $i_2$  sale por otro. De modo que para este caso

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

**Ejemplo 3-5.** El sistema de la Fig. 3-26 es una red de dos circuitos acoplados por la inductancia mutua de un par de bobinas con un campo magnético común. Suponiendo que el interruptor  $S$  se cierra en  $t = 0$  y que no hay carga inicial en el capacitor, encuentrese un modelo matemático del sistema.



**Fig. 3-26.** Circuito mutuamente acoplado.

Definamos las corrientes cíclicas  $i_1$  e  $i_2$  como en el diagrama. Entonces para el circuito 1 (malla izquierda), obtenemos

$$E - \frac{1}{C} \int i_1 dt - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} - R_1 i_1 = 0$$

Para el circuito 2 (malla derecha), tenemos

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 = 0$$

Reescribiendo las dos últimas ecuaciones y observando que  $q_1(0) = 0$  y que

$$\int i_1 dt = \int_0^t i_1 dt + q_1(0) = \int_0^t i_1 dt$$

obtenemos

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt = E$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = 0$$

Estas dos ecuaciones constituyen un modelo matemático del sistema.

Si un modelo matemático involucra a una ecuación integrodiferencial, como en este caso, ésta se puede diferenciar para obtener una ecuación diferencial. La solu-

ción de un conjunto de ecuaciones diferenciales puede expresarse en términos de funciones exponenciales con constantes no determinadas. Estas constantes pueden, a su vez, evaluarse a partir de las condiciones iniciales.

### 3-4 POTENCIA Y ENERGÍA

En la Sec. 2-5 expresamos trabajo, energía y potencia en relación con los sistemas mecánicos. Aquí trataremos de la energía y la potencia eléctricas. Como se estableció anteriormente en la sección 2-5,

$$\begin{aligned}\text{Energía} &= \text{capacidad de hacer trabajo} \\ \text{Potencia} &= \text{energía por unidad de tiempo}\end{aligned}$$

Las unidades del SI de energía y potencia son el joule y el watt, respectivamente.

$$\frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = \text{watt} = \text{volt-ampere} = \frac{\text{volt-coulomb}}{\text{segundo}} = \frac{\text{newton-metro}}{\text{segundo}}$$

**Potencia y energía.** Considérese un elemento de dos terminales como se muestra en la Fig. 3-27. La potencia de entrada, es decir, la razón a la cual está fluyendo energía a este elemento, es

$$P = \frac{dW}{dt}$$

donde

$P$  = potencia, W

$dW$  = energía que entra al elemento en  $dt$  segundos, J

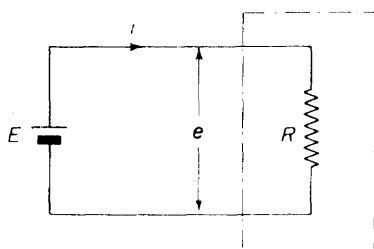


Fig. 3-27. Elemento de dos terminales en un circuito.

Elemento de dos terminales

Puesto que el voltaje es la energía por unidad de carga (o  $e = dW/dq$ ) y la corriente es la razón de cambio del flujo de carga (o  $i = dq/dt$ ), obtenemos

$$P = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = ei \quad (3-17)$$



Así pues el elemento resistivo  $R$  en la Fig. 3-27 consume una potencia de  $ei$  watts.

Además, adviértase que la Ec. (3-17) es análoga a la ecuación de potencia de un sistema mecánico, reescrita entonces

$$P = F\dot{x}$$

donde  $F$  es la fuerza y  $\dot{x}$  es la velocidad. En el sistema SI de unidades, la potencia  $P$  se mide en watts, la fuerza  $F$  en newtons y la velocidad  $\dot{x}$  en metros por segundo. Por tanto,

$$\text{Watt} = \frac{\text{newton-metro}}{\text{segundo}}$$

En el sistema eléctrico, si  $e$  y/o  $i$  son variantes en el tiempo, entonces la potencia  $P$  se hace una función del tiempo y se llama *potencia instantánea*. La cantidad total de energía que ha entrado al elemento durante un intervalo de tiempo  $t_0 \leq t \leq t_f$  es

$$W = \int_{t_0}^{t_f} P dt = \int_{t_0}^{t_f} ei dt$$

**Energía disipada por resistores.** La energía disipada o consumida por un resistor por unidad de tiempo (segundo), es

$$ei = i^2 R = \frac{e^2}{R}$$

Esta energía disipada se transforma en calor. Si se evita el flujo de calor hacia los alrededores, la temperatura del resistor se elevará siempre que a través de ésta fluya corriente, hasta que se queme o se funda. La resistencia es una medida de la capacidad de un dispositivo para disipar potencia de modo irreversible.

**Ejemplo 3-6.** En el circuito mostrado en la Fig. 3-28, dos baterías alimentan una carga de  $2 \Omega$ . Supóngase que la batería  $A$  tiene un voltaje de circuito abierto de  $12 \text{ V}$  y una resistencia interna de  $3 \Omega$  y que la batería  $B$  tiene un voltaje de circuito abierto de

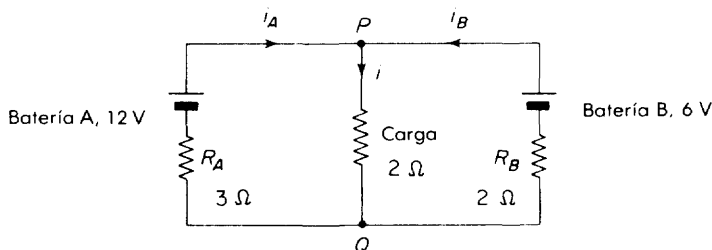


Fig. 3-28. Circuito eléctrico.

6 V y una resistencia interna de  $2 \Omega$ . Determinese la potencia disipada por la resistencia interna de  $2 \Omega$  de la batería  $B$ .

La ecuación del nodo  $P$  es  $i_A + i_B - i = 0$ , donde  $i_A = (12 - e_p)/3$ ,

$i_B = (6 - e_p)/2$ , e  $i = (e_p - e_Q)/2 = e_p/2$ . (Suponemos  $e_Q = 0$ .) Por lo tanto,

$$\frac{12 - e_p}{3} + \frac{6 - e_p}{2} - \frac{e_p}{2} = 0$$

Resolviendo para  $e_p$  da

$$e_p = \frac{21}{4}$$

Entonces, la corriente  $i_B$  está dada por

$$i_B = \frac{6 - e_p}{2} = \frac{3}{8} \text{ A}$$

Por lo tanto, la potencia disipada en la resistencia interna de  $2 \Omega$  de la batería  $B$  es

$$P = i_B^2 R_B = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times 2 = \frac{9}{32} \text{ W}$$

**Energía almacenada en capacitores.** Puesto que existe un campo electrostático entre las placas de un capacitor, en él se almacena energía cuando se aplica un voltaje entre las placas.

El trabajo realizado para transferir una carga  $dq$  a través de una diferencia de potencial (voltaje)  $e$  es  $e dq$ . La cantidad de energía almacenada en un capacitor durante un intervalo de tiempo  $t_0 \leq t \leq t_f$  es

$$\begin{aligned} \text{Energía almacenada} &= \int_{t_0}^{t_f} e \frac{dq}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_f} eC \frac{de}{dt} dt = \int_{e_0}^{e_f} Ce de \\ &= \frac{1}{2} Ce_f^2 - \frac{1}{2} Ce_0^2 \end{aligned}$$

La capacitancia es una medida de la capacidad de un elemento para almacenar energía en forma de carga separada o en forma de un campo eléctrico.

La energía suministrada al capacitor durante el proceso de carga se almacena en el capacitor y puede recuperarse conectando el capacitor cargado a algún dispositivo usuario de energía y dejando que el capacitor se descargue en él. A causa de pérdidas diferentes, no toda la energía suministrada a los capacitores reales puede liberarse. (La energía consumida se transforma en calor.) En el proceso de descarga, la polaridad del voltaje permanece igual que durante la carga, pero la corriente se invierte. Así pues, la potencia alimentada al capacitor se hace negativa, lo cual significa que se está extrayendo potencia del capacitor.

**Energía almacenada en inductores.** Un inductor almacena energía eléctrica como resultado del campo magnético que se produce cuando la

corriente fluye por él. La cantidad de potencia  $P$  almacenada en el inductor durante un intervalo de tiempo  $t_0 \leq t \leq t_f$  es

$$\begin{aligned}\text{Energía almacenada} &= \int_{t_0}^{t_f} ei \, dt = \int_{t_0}^{t_f} L \frac{di}{dt} i \, dt = L \int_{t_0}^{t_f} i \, di \\ &= \frac{1}{2} Li_f^2 - \frac{1}{2} Li_0^2\end{aligned}$$

La inductancia es una medida de la capacidad de un elemento para almacenar energía en forma de carga de movimiento o en forma de un campo magnético.

**Potencia generada y potencia consumida.** Una carga de un coulomb recibe o entrega una energía de un joule al moverse a través de un voltaje de un volt. Por lo tanto, una corriente de un ampere genera una potencia de un watt (joule por segundo) al moverse a través de un voltaje de un volt.

Considérese otra vez el circuito de la Fig. 3-27. Si despreciamos la resistencia de la batería, entonces la potencia generada por la batería es  $P_1 = Ei$  watts. La potencia consumida por el resistor es  $P_2 = ei$  watts. Puesto que  $P_1 = P_2$  en este sistema, tenemos que  $E = e$ . (Nótese que despreciamos la resistencia interna de la batería en esta exposición.) •

Debe notarse que la potencia  $P_1$  difiere de la potencia  $P_2$  en que, para la primera, la corriente  $i$  fluye de un punto de bajo voltaje a un punto de alto voltaje a través de la batería (la dirección de la elevación del voltaje y la dirección del flujo de corriente son las mismas, lo cual significa que se está generando potencia eléctrica), mientras que en el caso de la potencia  $P_2$ , la corriente  $i$  fluye de un punto de alto voltaje a un punto de bajo voltaje a través del resistor (la dirección de la elevación de voltaje y la dirección del flujo de corriente son opuestas, lo cual significa que se está consumiendo potencia eléctrica).

**Ejemplo 3-7.** En la figura 3-29 la batería tiene un voltaje de circuito abierto de  $E$  volts y una resistencia interna de  $r$  ohms. Encuéntrese la potencia disipada por la resistencia de carga  $R$ . Si la resistencia  $R$  es variable, ¿a qué valor de  $R$  la potencia disipada por  $R$  se hace máxima?

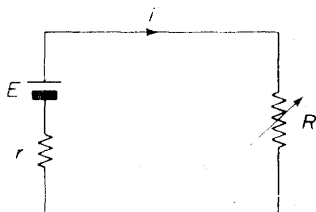


Fig. 3-29. Circuito eléctrico.

La corriente es

$$i = \frac{E}{R + r}$$

La potencia disipada por la resistencia  $R$  es

$$P = i^2 R = \left( \frac{E}{R + r} \right)^2 R$$

Para encontrar el valor de  $R$  en el cual la potencia  $P$  se hace máxima, escribamos la expresión de la potencia como sigue

$$P = \left( \frac{E}{R + r} \right)^2 R = \frac{E^2}{[\sqrt{R} + (r/\sqrt{R})]^2} \quad (3-18)$$

El valor de  $P$  se hace máximo cuando el denominador del segundo miembro de la Ec. (3-18) se hace mínimo.

Obsérvese que para dos números positivos  $a$  y  $b$ , si  $ab = \text{constante}$ , entonces la suma  $a + b$  se hace mínima cuando  $a = b$ , puesto que

$$(a + b) = \sqrt{(a - b)^2 + 4ab}$$

De la Ec. (3-18) nótese que

$$\sqrt{R} \cdot \frac{r}{\sqrt{R}} = r = \text{constante}$$

Por lo tanto, el denominador del lado derecho de la Ec. (3-18) se hace mínimo cuando

$$\sqrt{R} = \frac{r}{\sqrt{R}}$$

o bien

$$R = r$$

En consecuencia, cuando la carga  $R$  es igual a la resistencia interna  $r$  de la batería, la potencia disipada por  $R$  se hace máxima. La potencia máxima disipada es

$$P_{\text{máx}} = \left( \frac{E}{2r} \right)^2 r = \frac{E^2}{4r}$$

**Conversión entre unidades de energía eléctrica y energía térmica.** La energía eléctrica se mide en J (joule), W-s (watt-segundo), kWh (kilowatt hora), etcétera. La energía térmica se mide en J, kcal, Btu y unidades semejantes. Estas unidades están relacionadas entre sí como sigue:

$$1 \text{ J} = 0.2389 \text{ cal} = 9.480 \times 10^{-4} \text{ Btu}$$

$$1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J} = 3.968 \text{ Btu}$$

$$1 \text{ W-s} = 1 \text{ J}$$

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh} = 1000 \times 3600 \text{ W-s} = 1000 \times 3600 \text{ J} = 860 \text{ kcal}$$

$$1 \text{ kcal} = 1.163 \text{ Wh}$$

### 35 SISTEMAS ANALÓGOS

Los sistemas que pueden representarse mediante el mismo modelo ma-

temático pero que son diferentes físicamente se llaman sistemas *análogos*. Así pues, los sistemas análogos se describen mediante las mismas ecuaciones diferenciales o integrodiferenciales o conjuntos de ecuaciones.

El concepto de sistema análogo es muy útil en la práctica por las siguientes razones.

1. La solución de la ecuación que describe un sistema físico puede aplicarse directamente al sistema análogo en otro campo.
2. Puesto que un tipo de sistema puede ser más fácil de manejar experimentalmente que otro, en lugar de construir y estudiar un sistema mecánico (o sistema hidráulico, sistema neumático, etc.), podemos construir y estudiar su análogo eléctrico, porque los sistemas eléctricos o electrónicos son en general, mucho más fáciles de tratar experimentalmente. (En particular, las computadoras analógicas electrónicas son bastante útiles para simular sistemas mecánicos tanto como otros sistemas físicos. Para la simulación por computadora analógica electrónica, véase la Sec. 7-7.)

Esta sección expone analogías entre sistemas mecánicos y eléctricos, sin embargo, es aplicable a cualquier otro sistema, y las analogías entre sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, neumáticos y térmicos se exponen en los capítulos 4, 5 y 7.

**Analogías mecánico-eléctricas.** Los sistemas mecánicos pueden estudiarse mediante el uso de sus análogos eléctricos, los cuales pueden construirse más fácilmente que los modelos del sistema mecánico correspondiente. Hay dos analogías eléctricas para los sistemas mecánicos: la analogía fuerza-voltaje y la analogía fuerza-corriente.

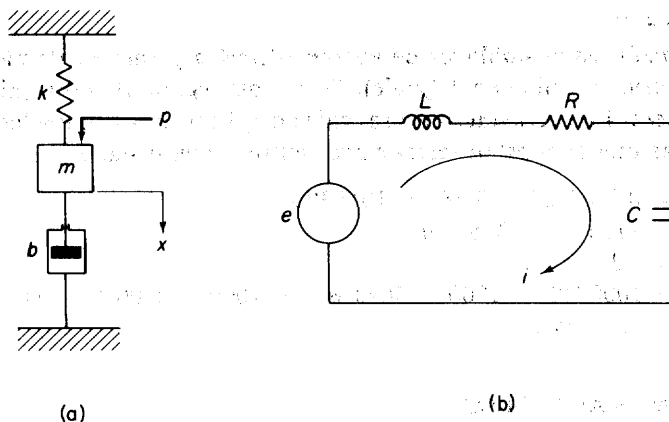


Fig. 3-30. Sistemas mecánico y eléctrico análogos.

**Analogía fuerza-voltaje.** Considérese el sistema mecánico de la Fig. 3-30(a) y el sistema eléctrico de la Fig. 3-30(b). La ecuación del sistema para el primero es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (3-19)$$

en tanto que la ecuación del sistema para el sistema eléctrico es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e$$

En términos de la carga eléctrica  $q$  la última ecuación se hace

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e \quad (3-20)$$

Comparando las Ecs. (3-19) y (3-20), vemos que las ecuaciones diferenciales de los dos sistemas son idénticas. Así pues, estos dos sistemas son sistemas análogos. Los términos que ocupan las posiciones correspondientes en las ecuaciones diferenciales se llaman *cantidades análogas*, una lista de ellas aparece en la tabla 3-1. Aquí la analogía se llama *analogía fuerza-voltaje* (o analogía masa-inductancia).

**Tabla 3-1. ANALOGÍA FUERZA-VOLTAJE**

Sistemas mecánicos	Sistemas eléctricos
Fuerza $p$ (par $T$ )	Voltaje $e$
Masa $m$ (momento de inercia $J$ )	Inductancia $L$
Coefficiente de fricción viscosa $b$	Resistencia $R$
Constante de resorte $k$	Recíproco de la capacitancia, $1/C$
Desplazamiento $x$ (desplazamiento angular $\theta$ )	Carga $q$
Velocidad $\dot{x}$ (velocidad angular $\dot{\theta}$ )	Corriente $i$

**Analogía fuerza-corriente.** Otra analogía entre los sistemas eléctricos y mecánicos se basa en la analogía fuerza-corriente. Considérese el sistema mecánico mostrado en la Fig. 3-31(a). La ecuación del sistema puede obtenerse como

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (3-21)$$

Considérese a continuación el sistema eléctrico mostrado en la Fig. 3-31(b). La aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff da

$$i_L + i_R + i_C = i_s \quad (3-22)$$

donde

$$i_L = \frac{1}{L} \int e dt, \quad i_R = \frac{e}{R}, \quad i_C = C \frac{de}{dt}$$

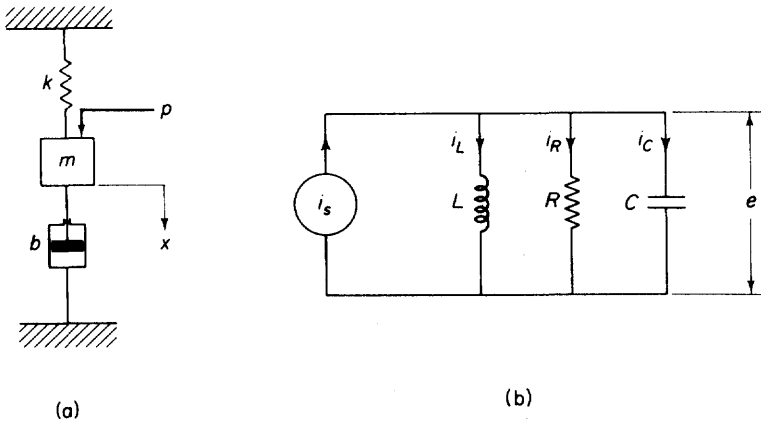


Fig. 3-31. Sistemas mecánico y eléctrico análogos.

La ecuación (3-22) puede escribirse

$$\frac{1}{L} \int e \, dt + \frac{e}{R} + C \frac{de}{dt} = i, \quad (3-23)$$

Puesto que el enlace de flujo  $\psi$  está relacionado con el voltaje  $e$  mediante la ecuación

$$\frac{d\psi}{dt} = e$$

en términos de  $\psi$ , la Ec. (3-23) puede escribirse

$$C \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{L} \psi = i, \quad (3-24)$$

Comparando las Ecs. (3-21) y (3-24), encontramos que los dos sistemas son análogos. Las cantidades análogas están enlistadas en la tabla 3-2. Aquí la analogía se llama *analogía fuerza-corriente* (o analogía masa-capacitancia).

Tabla 3-2. ANALOGÍA FUERZA-CORRIENTE

Sistemas mecánicos	Sistemas eléctricos
Fuerza $p$ (par $T$ )	Corriente $i$
Masa $m$ (momento de inercia $J$ )	Capacitancia $C$
Coefficiente de fricción viscosa $b$	Recíproco de la resistencia, $1/R$
Constante de resorte $k$	Recíproco de la inductancia, $1/L$
Desplazamiento $x$ (desplazamiento angular $\theta$ )	Acoplamiento por flujo magnético $\psi$
Velocidad $\dot{x}$ (velocidad angular $\dot{\theta}$ )	Voltaje $e$

**Comentarios.** Debe advertirse que las analogías entre dos sistemas se desvirtúan si las regiones de operación se extienden demasiado. En otras palabras, puesto que los modelos matemáticos (por ejemplo, las ecuaciones diferenciales) sobre los cuales se basan las analogías son solamente aproximaciones a las características dinámicas de los sistemas físicos, la analogía puede desvirtuarse si la región de operación de un sistema es muy amplia. No obstante, si la región de operación de un sistema mecánico es amplia, puede dividirse en dos o más subregiones y pueden construirse sistemas eléctricos análogos para cada subregión.

## BIBLIOGRAFÍA

- 3-1 D'AZZO, J. J., AND C. J. HOUPIS, *Principles of Electrical Engineering*, Columbus, Ohio: Charles E. Merrill Publishing Co., 1968.
- 3-2 GUILLEMIN, E. A., *Introductory Circuit Theory*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1953.
- 3-3 RESWICK, J. B., AND C. K. TAFT, *Introduction to Dynamic Systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1967.
- 3-4 SEELY, S., *Dynamic Systems Analysis*, New York: Reinhold Publishing Corp., 1964.
- 3-5 SMITH, R. J., *Circuits, Devices, and Systems*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966

## EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

**PROBLEMA A-3-1.** El circuito mostrado en la Fig. 3-32 consta de una batería con una fem  $E$ , un resistor  $R$  y un interruptor  $S$ . La resistencia interna de la batería se indica como resistencia  $r$ . Encuéntrese el voltaje  $e$  que aparecerá entre las terminales del resistor cuando se cierre el interruptor  $S$ .

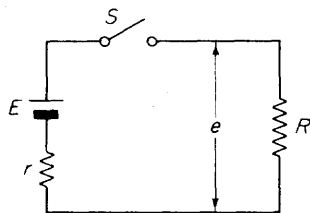


Fig. 3-32. Circuito eléctrico.

**Solución.** Puesto que la resistencia combinada del circuito es  $R + r$ , la corriente  $i$  cuando el interruptor  $S$  se cierra es

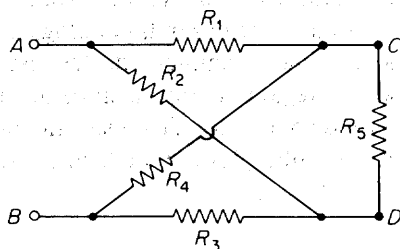
$$i = \frac{E}{R + r}$$

Por lo tanto,

$$e = Ri = \frac{R}{R + r} E$$



**PROBLEMA A-3-2.** Obténgase la resistencia entre los puntos  $A$  y  $B$  del circuito dado en la Fig. 3-33.

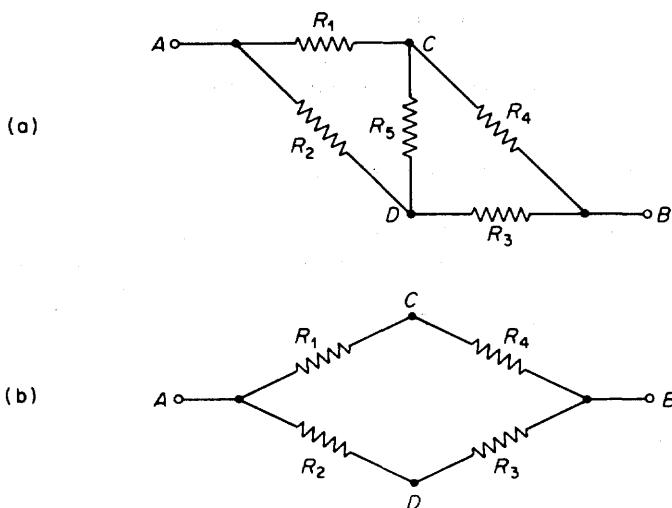


$$R_1 = R_4 = 10 \, \Omega, \quad R_2 = R_3 = 20 \, \Omega$$

$$R_5 = 100 \, \Omega$$

**Fig. 3-33.** Circuito eléctrico.

**Solución.** Este circuito es equivalente al mostrado en la Fig. 3-34(a). Puesto que  $R_1 = R_4 = 10 \, \Omega$  y  $R_2 = R_3 = 20 \, \Omega$ , los voltajes en los puntos  $C$  y  $D$  son iguales y por lo tanto, no fluye corriente a través de  $R_5$ . Puesto que la resistencia  $R_5$  no afecta el valor de la



**Fig. 3-34.** Circuitos equivalentes del que se muestra en la Fig. 3-33.

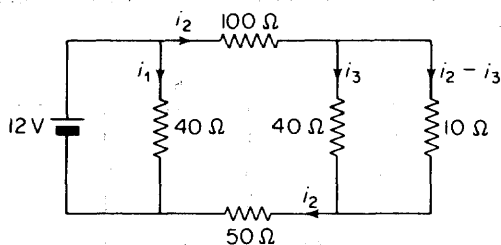
resistencia total entre los puntos  $A$  y  $B$ , puede removerse del circuito como se muestra en la Fig. 3-34(b). Entonces,  $R_{AB}$  se obtiene de

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1 + R_4} + \frac{1}{R_2 + R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \frac{3}{40}$$

como

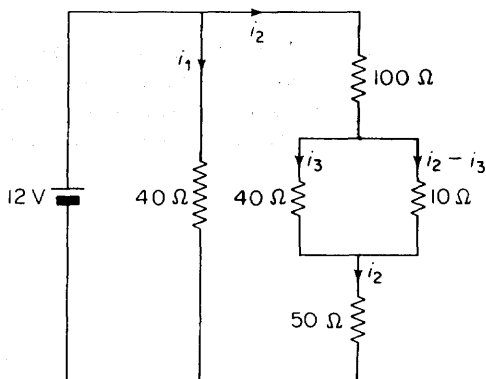
$$R_{AB} = \frac{40}{3} = 13.3 \, \Omega$$

**PROBLEMA A-3-3.** Dado el circuito de la Fig. 3-35, calcúlese las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ .



**Fig. 3-35.** Circuito eléctrico.

**Solución.** El circuito puede redibujarse como en la Fig. 3-36. La resistencia combinada de la trayectoria por donde fluye la corriente  $i_2$  es



**Fig. 3-36.** Circuito equivalente al que se muestra en la Fig. 3-35.

$$R = 100 + \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{40}} + 50 = 158 \Omega$$

La resistencia combinada  $R_0$  vista desde la batería es

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{40} + \frac{1}{158}$$

o bien

$$R_0 = 31.92 \Omega$$

En consecuencia,

$$i_1 + i_2 = \frac{12}{R_0} = \frac{12}{31.92} = 0.376 \text{ A}$$

Observando que  $40i_1 = 158i_2$ , obtenemos

$$i_1 = 0.300 \text{ A}, \quad i_2 = 0.076 \text{ A}$$

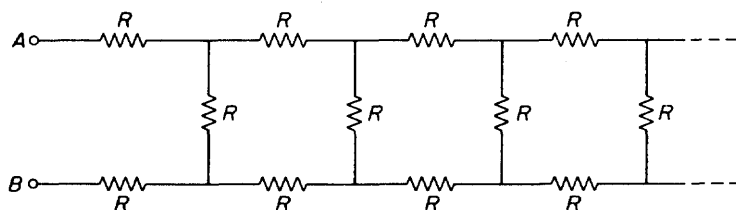
Para determinar  $i_3$ , nótese que

$$40i_3 = 10(i_2 - i_3)$$

Entonces,

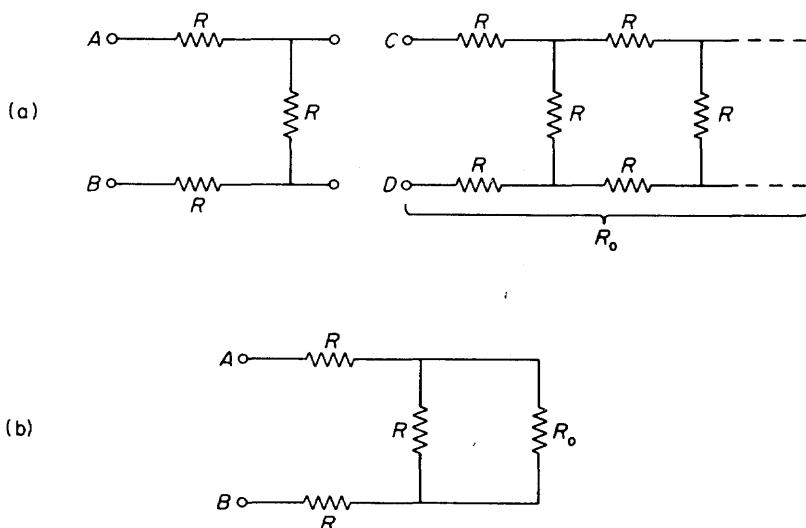
$$i_3 = \frac{10}{50} i_2 = 0.0152 \text{ A}$$

**PROBLEMA A-3-4.** Obténgase la resistencia combinada entre los puntos  $A$  y  $B$  del circuito mostrado en la Fig. 3-37, el cual consta de un número infinito de resistores conectados en forma de escalera.



**Fig. 3-37.** Circuito eléctrico que consta de un número infinito de resistores conectados en forma de escalera.

**Solución.** Definase la resistencia combinada entre los puntos  $A$  y  $B$  como  $R_0$ . Separemos los tres primeros resistores del resto [véase la Fig. 3-38(a)]. Puesto que el circuito está formado por un número infinito de resistores, la remoción de los tres primeros resistores no afecta el valor de la resistencia combinada. Por lo tanto, la resis-



**Fig. 3-38.** Circuitos equivalentes al que se muestra en la Fig. 3-37.

tencia combinada entre los puntos  $C$  y  $D$  es la misma,  $R_0$ . Por eso, el circuito mostrado en la Fig. 3-37 puede redibujarse como en la Fig. 3-38(b) y  $R_0$ , la resistencia entre los puntos  $A$  y  $B$ , puede obtenerse como

$$R_0 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}} = 2R + \frac{RR_0}{R_0 + R}$$

Reescribiendo,

$$R_0^2 - 2RR_0 - 2R^2 = 0$$

Resolviendo para  $R_0$ , encontramos

$$R_0 = R \pm \sqrt{3} R$$

Finalmente, al despreciar el valor negativo de la resistencia, obtenemos

$$R_0 = R + \sqrt{3} R = 2.732R$$

**PROBLEMA A-3-5.** Encuéntrense las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  del circuito mostrado en la Fig. 3-39.

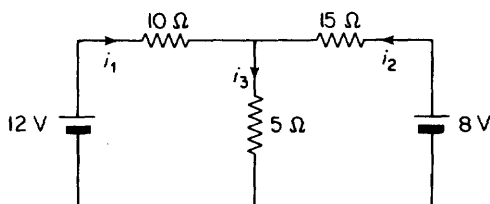


Fig. 3-39. Circuito Eléctrico.

**Solución.** Al aplicar la ley de voltajes y la ley de corrientes de Kirchhoff, tenemos

$$12 - 10i_1 - 5i_3 = 0$$

$$8 - 15i_2 - 5i_3 = 0$$

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Resolviéndolas por  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  dan

$$i_1 = \frac{8}{11} \text{ A}, \quad i_2 = \frac{12}{55} \text{ A}, \quad i_3 = \frac{52}{55} \text{ A}$$

Puesto que todos los valores de  $i$  resultaron positivos, las corrientes fluyen en las direcciones mostradas en el diagrama.

**PROBLEMA A-3-6.** Dado el circuito que se muestra en la Fig. 3-40, obténgase un modelo matemático. Aquí las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  son corrientes cíclicas.

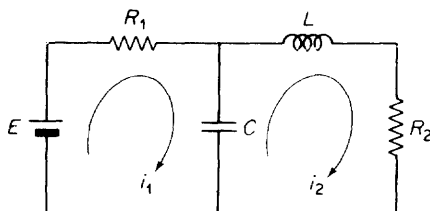


Fig. 3-40. Circuito eléctrico.

**Solución.** La aplicación de la ley de voltajes de Kirchhoff da

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = E$$

$$L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C} \int (i_2 - i_1) dt = 0$$

Estas dos ecuaciones constiuyen un modelo matemático del circuito.

**PROBLEMA A-3-7.** En el circuito de la Fig. 3-41, supóngase que en  $t < 0$ , el interruptor  $S$  está conectado hacia la fuente de voltaje  $E$  y la corriente en la bobina  $L$  se encuentra en estado estable. En  $t = 0$  el interruptor  $S$  desconecta la fuente y simultáneamente pone a la bobina en corto circuito. ¿Cuál es la corriente  $i(t)$  en  $t > 0$ ?

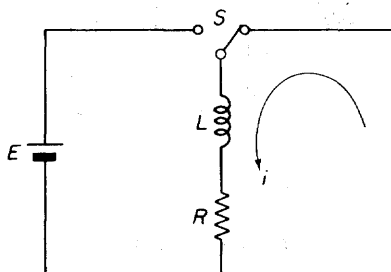


Fig. 3-41. Circuito eléctrico.

**Solución.** Para  $t > 0$ , la ecuación del circuito es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad i(0) = \frac{E}{R}$$

[Nótese que hay una corriente inicial diferente de cero  $i(0^-) = E/R$ . Puesto que la inductancia  $L$  almacena energía, la corriente en la bobina no puede ser cambiada instantáneamente. Por lo tanto,  $i(0^+) = i(0^-) = i(0) = E/R$ .]

Suponiendo una solución exponencial

$$i(t) = Ke^{\lambda t}$$

obtenemos la ecuación característica

$$L\lambda + R = 0$$

de la cual se determina  $\lambda$  como

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

Observando que  $i(0) = E/R$ .

$$i(0) = K = \frac{E}{R}$$

Por lo tanto,

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-(R/L)t}$$

**PROBLEMA A-3-8.** Considérese el circuito mostrado en la Fig. 3-42 y supóngase que el capacitor está inicialmente cargado con  $q_0$ . En  $t = 0$  el interruptor  $S$  se desconecta

de la batería y simultáneamente conecta al inductor  $L$ . La capacitancia tiene un valor de  $50 \mu F$ .

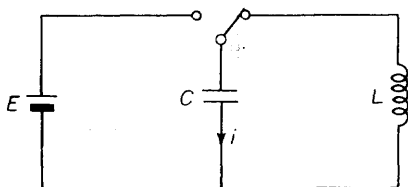


Fig. 3-42. Circuito eléctrico.

Calcúlese el valor de la inductancia  $L$  que hará ocurrir la oscilación a la frecuencia de 200 Hz.

**Solución.** La ecuación del circuito para  $t > 0$  es

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

o sustituyendo  $q = \int i dt$  en esta última ecuación

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

donde  $q(0) = q_0$  y  $\dot{q}(0) = 0$ . La frecuencia  $\omega_n$  de oscilaciones es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Puesto que

$$200 \text{ Hz} = 200 \text{ cps} = 200 \times 6.28 \text{ rad/s} = 1256 \text{ rad/s}$$

obtenemos

$$\omega_n = 1256 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{L \times 50 \times 10^{-6}}}$$

Así

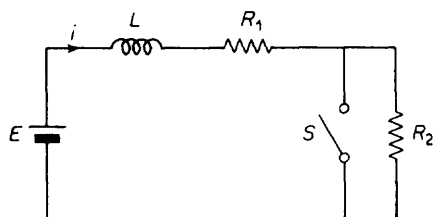
$$L = \frac{1}{1256^2 \times 50 \times 10^{-6}} = 0.0127 \text{ H}$$

**PROBLEMA A-3-9.** En la Fig. 3-43(a) supóngase que el interruptor  $S$  está abierto en  $t < 0$  y que el sistema se encuentra en estado estable. El interruptor  $S$  se cierra en  $t = 0$ . Encuéntrese la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$ .

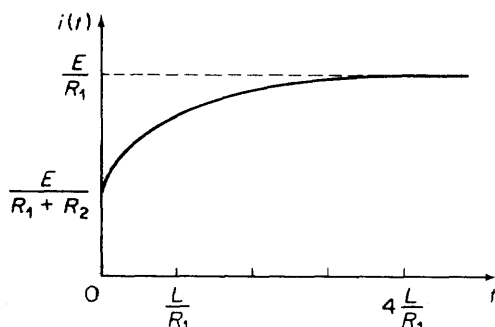
**Solución.** Nótese que, para  $t < 0$ , la resistencia del circuito es  $R_1 + R_2$ , y por lo tanto, hay una corriente inicial  $i(0^-)$  diferente de cero, donde

$$i(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Para  $t \geq 0$ , la resistencia del circuito se hace  $R_1$ . Nótese que a causa de la presencia de la inductancia  $L$ , cuando el interruptor  $S$  se cierra, no hay un cambio instantáneo



(a)



(b)

Fig. 3-43. (a) Circuito eléctrico: (b) gráfica de  $i(t)$  contra  $t$  del circuito cuando el interruptor  $S$  se cierra en  $t = 0$ .

en la corriente del circuito. Por eso,

$$i(0+) = i(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = i(0)$$

Entonces la ecuación del circuito para  $t \geq 0$  es

$$L \frac{di}{dt} + R_1 i = E, \quad i(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad (3-25)$$

Definamos

$$x = i - \frac{E}{R_1}$$

De allí que la Ec. (3-25) se hace

$$L \frac{dx}{dt} + R_1 x = 0$$

donde

$$x(0) = i(0) - \frac{E}{R_1} = -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)R_1} E \quad (3-26)$$

Suponiendo una solución exponencial

$$x(t) = K e^{\lambda t}$$

obtenemos la ecuación característica como

$$L\lambda + R_1 = 0$$

la cual da

$$\lambda = -\frac{R_1}{L}$$

Se infiere que

$$x(t) = Ke^{-(R_1/L)t}$$

donde  $K$  se determina mediante el uso de la Ec. (3-26) como sigue:

$$x(0) = K = -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)R_1}E$$

Por lo tanto,

$$x(t) = -\frac{R_2 E}{(R_1 + R_2)R_1} e^{-(R_1/L)t}$$

y

$$\begin{aligned} i(t) &= x(t) + \frac{E}{R_1} \\ &= \frac{E}{R_1} \left[ 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-(R_1/L)t} \right] \end{aligned}$$

Una gráfica típica de  $i(t)$  contra  $t$  se muestra en la Fig. 3-43(b).

**PROBLEMA A-3-10.** En el circuito de la Fig. 3-44(a), supóngase que el interruptor  $S$  está cerrado en  $t < 0$  y que el sistema se encuentra en estado permanente. El interruptor se abre en  $t = 0$ . Obténgase la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$ .

**Solución.** La ecuación del circuito es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (3-27)$$

donde  $L = L_1$  para  $t < 0$  y  $L = L_1 + L_2$  para  $t > 0$ . Integrando ambos miembros de la Ec. (3-27) entre  $t = 0^-$  y  $t = 0^+$ , tenemos

$$\int_{0^-}^{0^+} L \frac{di}{dt} dt + \int_{0^-}^{0^+} Ri dt = \int_{0^-}^{0^+} E dt$$

Observando que

$$\int_{0^-}^{0^+} (E - Ri) dt = 0$$

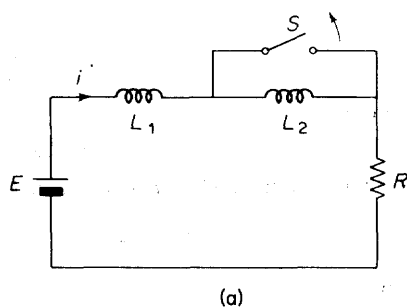
obtenemos

$$(L_1 + L_2)i(0^+) - L_1 i(0^-) = 0$$

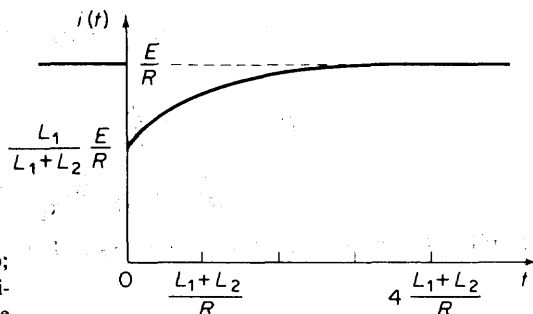
Por lo tanto,

$$i(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i(0^-)$$





(a)



(b)

**Fig. 3-44.** (a) Circuito eléctrico; (b) gráfica de  $i(t)$  contra  $t$  del circuito cuando el interruptor  $S$  se abre en  $t = 0$ .

Vemos que la corriente en estado estable para  $t < 0$  es  $i = E/R$ , de modo que, tenemos  $i(0^-) = E/R$ . Por lo tanto,

$$i(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{E}{R}$$

La ecuación del circuito para  $t \geq 0^+$  puede escribirse ahora

$$(L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad i(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{E}{R} \quad (3-28)$$

Con el objeto de resolver la Ec. (3-28), definase una nueva variable  $x$  tal que

$$x = i - \frac{E}{R} \quad (3-29)$$

En términos de la nueva variable  $x$ , la Ec. (3-28) se hace

$$(L_1 + L_2) \frac{dx}{dt} + Rx = 0, \quad x(0^+) = -\frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{E}{R}$$

Suponiendo que la solución  $x(t)$  sea

$$x(t) = Ke^{\lambda t}$$

la ecuación característica está dada por

$$(L_1 + L_2)\lambda + R = 0$$

o bien

$$\lambda = -\frac{R}{L_1 + L_2}$$

Por lo tanto,

$$x(t) = Ke^{-[R/(L_1+L_2)]t}$$

Puesto que

$$x(0+) = K = -\frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{E}{R}$$

se infiere que

$$x(t) = -\frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{E}{R} e^{-[R/(L_1+L_2)]t}$$

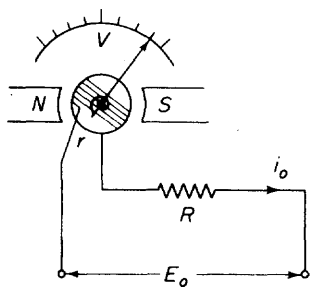
Luego, de la Ec. (3-29) obtenemos

$$\begin{aligned} i(t) &= x(t) + \frac{E}{R} \\ &= \frac{E}{R} \left\{ 1 - \frac{L_2}{L_1 + L_2} e^{-[R/(L_1+L_2)]t} \right\} \end{aligned}$$

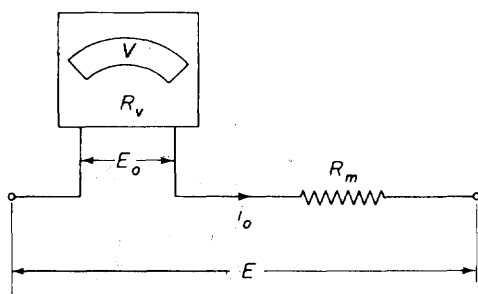
Una gráfica típica de  $i(t)$  contra  $t$  aparece en la Fig. 3-44(b).

**PROBLEMA A-3-11.** Considérese el diagrama esquemático del voltmetro (voltímetro) de cd de bobina móvil de d'Arsonval que se muestra en la Fig. 3-45(a). Supóngase que cuando se aplica el voltaje  $E_0$  al medidor, éste presenta una deflexión a escala completa con una corriente  $i_0$ , donde

$$i_0 = \frac{E_0}{r + R} = \frac{E_0}{R_v} \quad (R_v = r + R)$$



(a)



(b)

**Fig. 3-45.** (a) Diagrama esquemático de un voltmetro (voltímetro) de cd de bobina móvil de d'Arsonval; (b) voltmetro conectado en serie con el resistor.

La escala de medición puede ampliarse si se conecta una resistencia  $R_m$  en serie como en la Fig. 3-45(b). Determine la resistencia  $R_m$  de modo que el medidor pueda usarse para medir voltajes hasta de  $E$  volts, donde  $E = mE_0$  y  $m > 1$ .

**Solución.** Nótese que la corriente máxima a través del voltmetro debe limitarse a  $i_0$ . Por lo tanto,

$$\frac{E}{R_v + R_m} = \frac{mE_0}{R_v + R_m} = i_0 = \frac{E_0}{R_v}$$

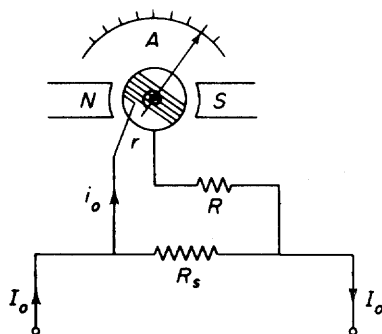
de la cual

$$mR_v = R_v + R_m$$

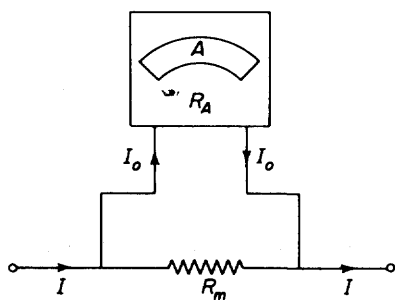
o bien

$$R_m = (m - 1)R_v$$

**PROBLEMA A-3-12.** La figura 3-46(a) muestra un diagrama esquemático de un amperímetro (amperímetro) de cd. Supóngase que la corriente  $I_0$  es la corriente máxima que puede aplicarse a este amperímetro. Gran parte de la corriente  $I_0$  se deriva a través de  $R_s$  y solamente una pequeña parte de la corriente fluye a través de la bobina móvil. (Por ejemplo, para una deflexión a escala completa con una corriente de medidor de 3 A, la corriente en la  $R_s$  de derivación puede ser de 2.999 A y la corriente a



(a)



(b)

**Fig. 3-46.** (a) Diagrama esquemático de un amperímetro (amperímetro); (b) amperímetro conectado en paralelo con un resistor.

través de la bobina móvil puede ser de 1 mA.) Definase la corriente disponible máxima a través de la bobina móvil (la cual corresponde a la deflexión de plena escala) como  $i_0$ . Así que del diagrama

$$i_0 = \frac{R_s}{r + R + R_s} I_0$$

La escala de medición puede ampliarse si se conecta una resistencia  $R_m$  en paralelo como se muestra en la Fig. 3-46(b).

Determinese la resistencia  $R_m$  de modo que el medidor pueda utilizarse para medir corrientes hasta de  $I$  ampere, donde  $I = mI_0$  y  $m > 1$ .

**Solución.** Definamos la resistencia del ampermetro como  $R_A$ . Entonces,

$$\frac{1}{r + R} + \frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_A}$$

o bien

$$R_A = \frac{(r + R)R_s}{r + R + R_s}$$

La corriente máxima hacia el ampermetro debe limitarse a  $I_0$ . Por lo tanto,

$$I_0 R_A = (I - I_0) R_m = (m - 1) I_0 R_m$$

o bien

$$R_m = \frac{1}{m - 1} R_A$$

Si esta resistencia  $R_m$  se conecta en paralelo con el ampermetro como en la Fig. 3-46(b), el medidor puede usarse para medir hasta  $mI_0$  amperes, donde  $m > 1$ .

**PROBLEMA A-3-13.** Una corriente  $I$  fluye por un resistor cuya resistencia es  $R$  ohms (véase la Fig. 3-47). Con el objeto de medir la corriente  $I$  de cd, la caída de voltaje en la resistencia  $R$  se mide alternativamente por medio de dos vóltmetros de cd. La lec-

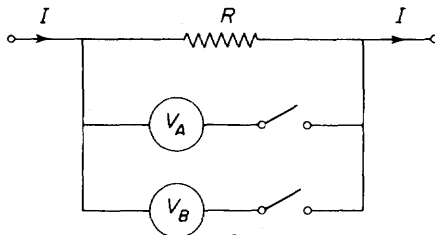


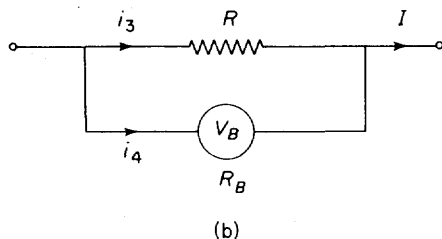
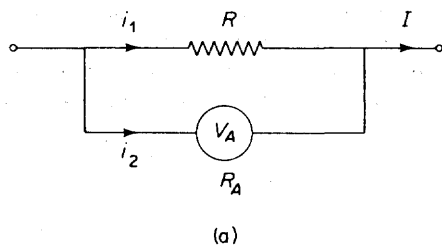
Fig. 3-47. Circuito para la medición de corriente.

tura del voltaje es de 61 V cuando se mide con el vóltmetro A, cuya resistencia interna es de 15 000  $\Omega$ . La lectura del voltaje es de 60 V cuando se mide con el vóltmetro B, cuya resistencia interna es de 10 000  $\Omega$ . Determinense la corriente  $I$  y la resistencia  $R$ . Supóngase que la corriente  $I$  no cambia cuando se conecta un vóltmetro.

**Solución.** Redibujemos el diagrama del sistema como en la Fig. 3-48(a) y (b). Definamos las corrientes a través de la resistencia  $R$  y el vóltmetro A como  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente, como en la Fig. 3-48(a). De igual manera, definamos las corrientes a través de la resistencia  $R$  y el vóltmetro B como  $i_3$  e  $i_4$ , respectivamente, como en la Fig. 3-48(b). Entonces,

$$i_1 R = i_2 R_A = 61, \quad i_1 + i_2 = I$$

$$i_3 R = i_4 R_B = 60, \quad i_3 + i_4 = I$$



**Fig. 3-48.** Circuitos para la medición de corrientes.

De aquí,

$$i_1 = \frac{61}{R}, \quad i_3 = \frac{60}{R}$$

Puesto que  $R_A = 15\,000\ \Omega$  y  $R_B = 10\,000\ \Omega$ , tenemos

$$i_2 = \frac{61}{15\,000}, \quad i_4 = \frac{60}{10\,000}$$

Por lo tanto,

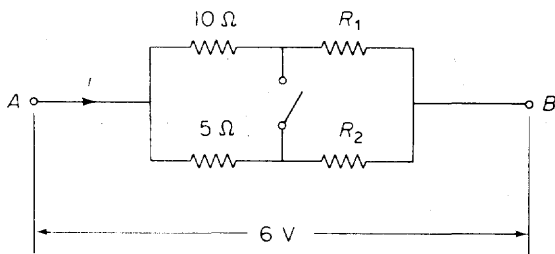
$$i_1 + i_2 = \frac{61}{R} + \frac{61}{15\,000} = I$$

$$i_3 + i_4 = \frac{60}{R} + \frac{60}{10\,000} = I$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para  $I$  y  $R$ , obtenemos

$$I = 0.122\ \text{A}, \quad R = 517.2\ \Omega$$

**PROBLEMA A-3-14.** Se aplica un voltaje de 6 V entre los puntos A y B del circuito de la Fig. 3-49. Supóngase que la corriente  $i$  es de 0.5 A, independientemente de que el interruptor esté abierto o cerrado. Encuéntrense los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .



**Fig. 3-49.** Circuito eléctrico.

**Solución.** Adviértase que este circuito es un puente de Wheatstone. El hecho de que la corriente  $i$  sea constante, independientemente de que el interruptor esté abierto o cerrado, implica que el puente está balanceado. Así es que

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{10}{5}$$

o bien

$$R_1 = 2R_2$$

La resistencia combinada  $R$  entre los puntos  $A$  y  $B$  es  $6/0.5 = 12 \Omega$ . En términos de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  la resistencia combinada  $R$  puede escribirse

$$R = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{50}{15} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} R_2$$

En consecuencia,

$$R = 12 = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} R_2$$

de la cual

$$R_2 = 13 \Omega$$

Puesto que  $R_1 = 2R_2$ , tenemos

$$R_1 = 26 \Omega$$

**PROBLEMA A-3-15.** En la Fig. 3-50 dos baterías de 6 V idénticas en paralelo están conectadas a una resistencia de carga de  $0.6 \Omega$ . La resistencia interna de cada batería es de  $0.3 \Omega$ . Suponiendo que las baterías suministran un voltaje aproximadamente constante de 6 V durante un periodo de tiempo limitado, encuentrese la potencia consumida por la resistencia de carga durante este periodo.

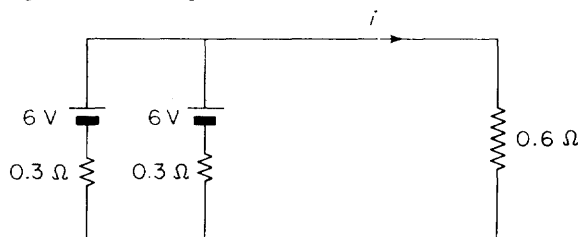


Fig. 3-50. Circuito eléctrico.

**Solución.** La corriente  $i$  se obtiene como

$$i = \frac{6}{0.6 + (0.3/2)} = 8 \text{ A}$$

Por lo tanto, la potencia consumida por la resistencia de carga es

$$P = i^2 R = 8^2 \times 0.6 = 38.4 \text{ W}$$

**PROBLEMA A-3-16.** La resistencia  $R_1$  es variable en el circuito de la Fig. 3-51. ¿A qué valor de  $R_1$  será máxima la potencia consumida por esta resistencia?

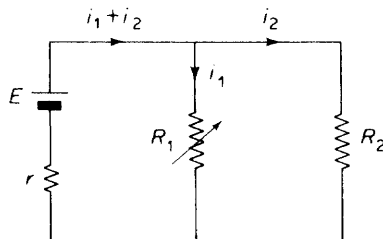


Fig. 3-51. Circuito eléctrico.

**Solución.** La corriente  $i_1$  puede obtenerse como sigue. Primero observando que la resistencia equivalente  $R$  de las resistencias en paralelo  $R_1$  y  $R_2$  es

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

obtenemos

$$i_1 + i_2 = \frac{E}{r + R} = \frac{E}{r + [R_1 R_2 / (R_1 + R_2)]}$$

Puesto que  $i_1 R_1 = i_2 R_2$ , tenemos

$$i_1 = \frac{E R_2}{(r + R_2) R_1 + r R_2}$$

La potencia consumida por la resistencia  $R_1$  es

$$\begin{aligned} P = i_1^2 R_1 &= \left[ \frac{E R_2}{(r + R_2) R_1 + r R_2} \right]^2 R_1 \\ &= \frac{E^2 R_2^2}{[(r + R_2) \sqrt{R_1} + (r R_2 / \sqrt{R_1})]^2} \end{aligned}$$

La potencia  $P$  se hace máxima cuando el denominador del lado derecho de esta última ecuación es mínimo. Observando que el producto de  $(r + R_2) \sqrt{R_1}$  y  $r R_2 / \sqrt{R_1}$  es constante, la suma de esos dos términos se hace nula cuando ambos son iguales entre sí; esto es,

$$(r + R_2) \sqrt{R_1} = \frac{r R_2}{\sqrt{R_1}}$$

Por lo tanto,

$$R_1 = \frac{r R_2}{r + R_2} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R_2}}$$

Por consiguiente, vemos que cuando  $R_1$  es igual a la resistencia combinada de las dos resistencias en paralelo  $r$  y  $R_2$ , la potencia consumida por la resistencia  $R_1$  se hace máxima. La potencia máxima consumida por la resistencia  $R_1$  es

$$P_{\max} = \frac{E^2 R_2^2}{[2(r + R_2) \sqrt{R_1}]^2} = \frac{E^2 R_2}{4r(r + R_2)}$$

**PROBLEMA A-3-17.** Muéstrase que los sistemas mecánico y eléctrico dados en la Fig. 3-52 son análogos. Supóngase que el desplazamiento  $x$  en el sistema mecánico se mide desde la posición de equilibrio y que se suelta la masa  $m$  desde el desplazamiento inicial  $x(0) = x_0$  con velocidad inicial cero o  $\dot{x}(0) = 0$ . Supóngase también que en el sis-

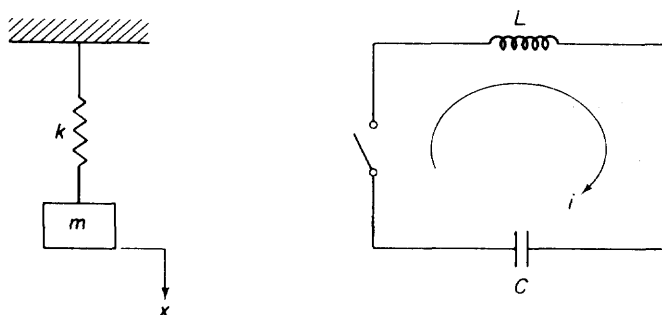


Fig. 3-52. Sistemas mecánico y eléctrico análogos.

tema eléctrico el capacitor tiene la carga inicial  $q(0) = q_0$  y que el interruptor se cierra en  $t = 0$ . Nótese que  $\dot{q}(0) = i(0) = 0$ . Obténgase  $x(t)$  y  $q(t)$ .

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema mecánico es

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3-30)$$

Para el sistema eléctrico,

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

y sustituyendo  $i = dq/dt = \dot{q}$  en esta última ecuación

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (3-31)$$

Puesto que las Ecs. (3-30) y (3-31) son de la misma forma, estos dos sistemas son análogos. (Aquí la analogía se basa en la analogía fuerza-voltaje.)

La solución de la Ec. (3-30) con las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  es un movimiento armónico simple dado por

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

En forma semejante, la solución de la Ec. (3-31) con las condiciones iniciales  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = 0$  es

$$q(t) = q_0 \cos \sqrt{\frac{1}{LC}} t$$

**PROBLEMA A-3-18.** Obténganse los modelos matemáticos de los sistemas mostrados en la Fig. 3-53(a) y (b) y muéstrese que son sistemas análogos.

**Solución.** Para el sistema de la Fig. 3-53(a), las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= 0 \\ b_2 \dot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones constituyen un modelo matemático del sistema mecánico.



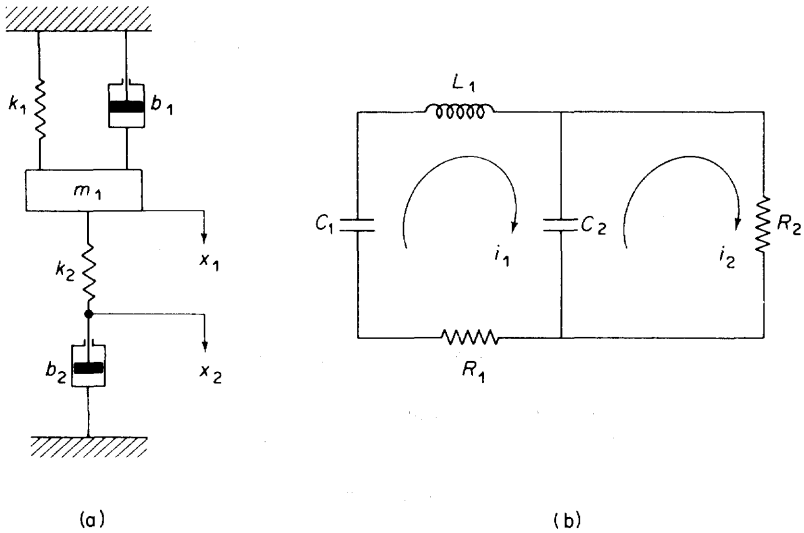


Fig. 3-53. Sistemas mecánico y eléctrico análogos.

Para el sistema de la Fig. 3-53(b), las ecuaciones de voltaje de las mallas son

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = 0$$

$$R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt = 0$$

Escribamos  $i_1 = \dot{q}_1$  e  $i_2 = \dot{q}_2$ . Entonces, en términos de  $q_1$  y  $q_2$ , las dos ecuaciones precedentes pueden escribirse

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C_2} (q_1 - q_2) = 0$$

$$R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_2} (q_2 - q_1) = 0$$

Comparando estos dos modelos matemáticos, vemos que los dos sistemas son análogos. (La analogía se basa en la analogía fuerza-voltaje.)

**PROBLEMA A-3-19.** Utilizando la analogía fuerza-voltaje, obténgase un análogo eléctrico del sistema mecánico mostrado en la Fig. 3-54.

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico son

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = 0$$

Mediante el uso de la analogía fuerza-voltaje, las ecuaciones de un sistema eléctrico

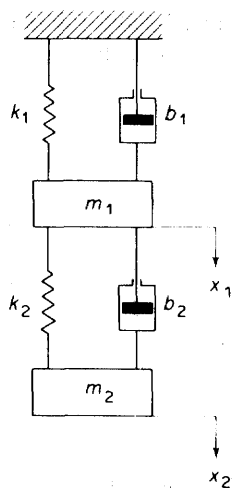


Fig. 3-54. Sistema mecánico.

análogo pueden escribirse

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + R_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{1}{C_2} (q_1 - q_2) = 0$$

$$L_2 \ddot{q}_2 + R_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \frac{1}{C_2} (q_2 - q_1) = 0$$

Sustituyendo  $\dot{q}_1 = i_1$  y  $\dot{q}_2 = i_2$  en las dos últimas ecuaciones da

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_2 (i_1 - i_2) + \frac{1}{C_2} \int (i_1 - i_2) dt = 0 \quad (3-32)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 (i_2 - i_1) + \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt = 0 \quad (3-33)$$

Estas dos ecuaciones son ecuaciones de voltaje de mallas. De la Ec. (3-32) obtenemos el diagrama mostrado en la Fig. 3-55(a). De igual forma, a partir de la Ec. (3-33) ob-

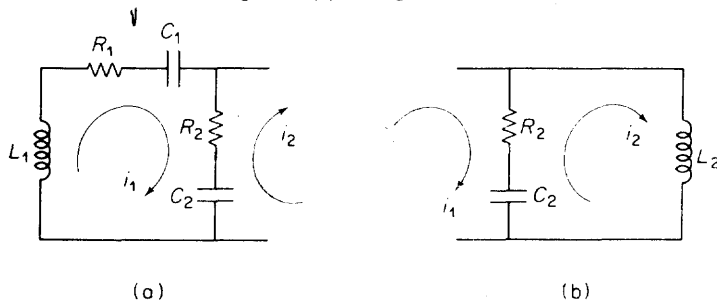
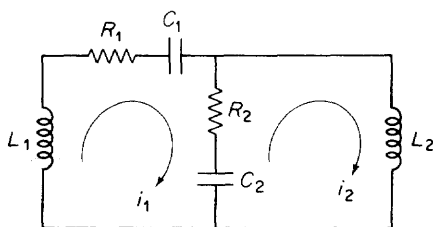


Fig. 3-55. (a) Circuito eléctrico correspondiente a la Ec. (3-32); (b) circuito eléctrico correspondiente a la Ec. (3-33).

tenemos el correspondiente a la Fig. 3-55(b). Combinando estos dos diagramas producimos el sistema eléctrico análogo deseado (Fig. 3-56).



**Fig. 3-56.** Sistema eléctrico análogo al sistema mecánico mostrado en la Fig. 3-54. (Analogía fuerza-voltaje.)

**PROBLEMA A-3-20.** Considérese otra vez el sistema mecánico mostrado en la Fig. 3-54. Utilizando la analogía fuerza-corriente, obténgase un sistema eléctrico análogo.

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico son

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando la analogía fuerza-corriente podemos encontrar las ecuaciones de un sistema eléctrico análogo.

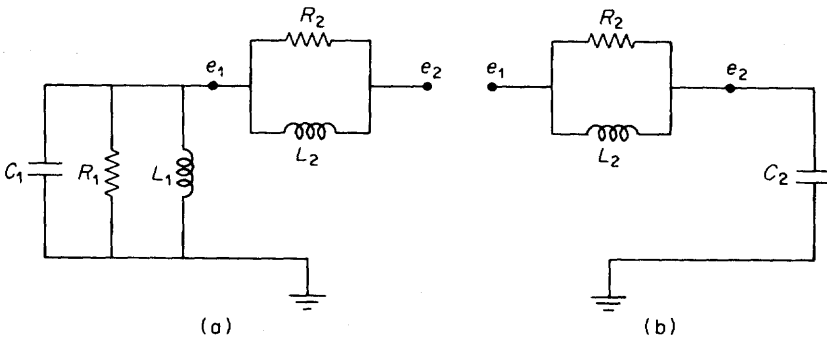
$$\begin{aligned} C_1 \ddot{\psi}_1 + \frac{1}{R_1} \dot{\psi}_1 + \frac{1}{L_1} \psi_1 + \frac{1}{R_2}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) + \frac{1}{L_2}(\psi_1 - \psi_2) &= 0 \\ C_2 \ddot{\psi}_2 + \frac{1}{R_2}(\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1) + \frac{1}{L_2}(\psi_2 - \psi_1) &= 0 \end{aligned}$$

Observando que  $\dot{\psi} = e$ , las dos últimas ecuaciones dan

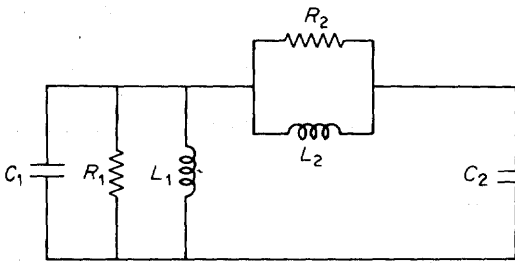
$$C_1 \dot{e}_1 + \frac{1}{R_1} e_1 + \frac{1}{L_1} \int e_1 dt + \frac{1}{R_2}(e_1 - e_2) + \frac{1}{L_2} \int (e_1 - e_2) dt = 0 \quad (3-34)$$

$$C_2 \dot{e}_2 + \frac{1}{R_2}(e_2 - e_1) + \frac{1}{L_2} \int (e_2 - e_1) dt = 0 \quad (3-35)$$

Las ecuaciones (3-34) y (3-35) son ecuaciones de nodo. En correspondencia con la ecuación del primer nodo o Ec. (3-34), obtenemos el diagrama mostrado en la Fig. 3-57(a). En forma similar, a partir de la ecuación del segundo nodo, Ec. (3-35), derivamos el diagrama mostrado en la Fig. 3-57(b). Si combinamos los dos diagramas, el resultado es el sistema eléctrico análogo deseado (Fig. 3-58).



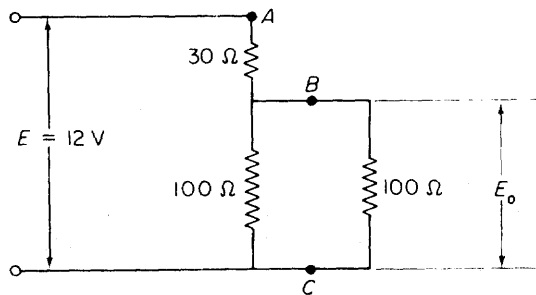
**Fig. 3-57.** (a) Circuito eléctrico correspondiente a la Ec. (3-34); (b) circuito eléctrico correspondiente a la Ec. (3-35).



**Fig. 3-58.** Sistema eléctrico análogo al sistema mecánico mostrado en la Fig. 3-54. (Analogía fuerza-corriente.)

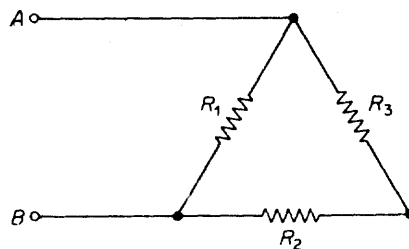
## PROBLEMAS

**PROBLEMA B-3-1.** Una fuente de voltaje  $E = 12 \text{ V}$  se aplica entre los puntos  $A$  y  $C$  de la Fig. 3-59. Encuentre el voltaje  $E_0$  entre los puntos  $B$  y  $C$ .



**Fig. 3-59.** Circuito eléctrico.

**PROBLEMA B-3-2.** Tres resistores  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  están conectados en un arreglo triangular (Fig. 3-60). Obtenga la resistencia combinada entre los puntos  $A$  y  $B$ .



**Fig. 3-60.** Tres resistores conectados en un arreglo triangular.

**PROBLEMA B-3-3.** Calcule la resistencia entre los puntos  $A$  y  $B$  en el circuito de la Fig. 3-61.

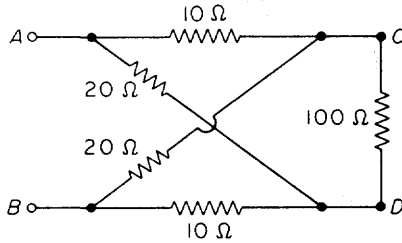
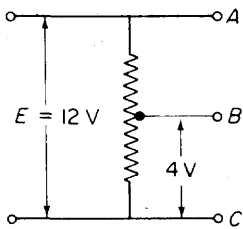
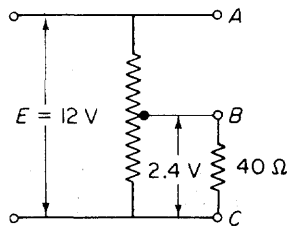


Fig. 3-61. Circuito eléctrico.

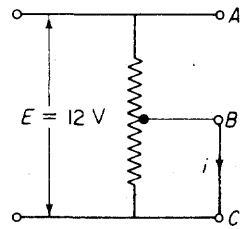
**PROBLEMA B-3-4.** Una fuente de voltaje  $E = 12\text{ V}$  está conectada a un resistor como se muestra en la Fig. 3-62(a). Se encuentra que el voltaje entre las terminales  $B$  y  $C$  es de  $4\text{ V}$ . Cuando un resistor de  $40\ \Omega$  se conecta entre las terminales  $B$  y  $C$  como en la Fig. 3-62(b), observamos que el voltaje entre las terminales  $B$  y  $C$  es de  $2.4\text{ V}$ . Si las terminales  $B$  y  $C$  se ponen en corto circuito, como se muestra en la Fig. 3-62(c), ¿cuál será el valor de la corriente  $i$ ?



(a)



(b)



(c)

Fig. 3-62. Circuitos eléctricos.

**PROBLEMA B-3-5.** En el circuito de la Fig. 3-63, suponga que se aplica un voltaje  $E$  entre los puntos  $A$  y  $B$  y que la corriente  $i$  es  $i_0$  al abrir el interruptor  $S$ . Cuando el interruptor  $S$  está cerrado, la corriente  $i$  se hace igual a  $2i_0$ . Encuentre el valor de la resistencia  $R$ .

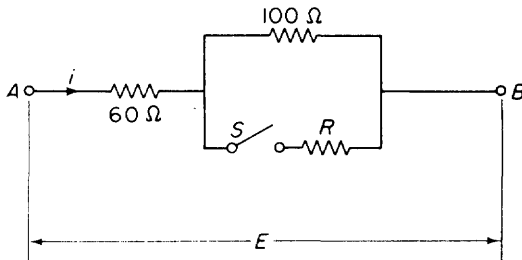
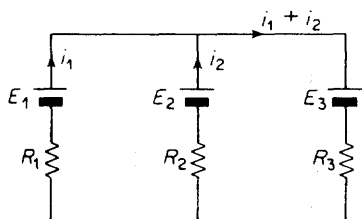


Fig. 3-63. Circuito eléctrico.

**PROBLEMA B-3-6.** En relación con el circuito mostrado en la Fig. 3-64, calcule las corrientes en los resistores  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Desprecie la resistencia interna de las baterías.



$$E_1 = 6 \text{ V}$$

$$R_1 = 15 \, \Omega$$

$$E_2 = 4 \text{ V}$$

$$R_2 = 5 \, \Omega$$

$$E_3 = 2 \text{ V}$$

$$R_3 = 10 \, \Omega$$

Fig. 3-64. Circuito eléctrico.

**PROBLEMA B-3-7.** Obtenga un modelo matemático del circuito mostrado en la Fig. 3-65.

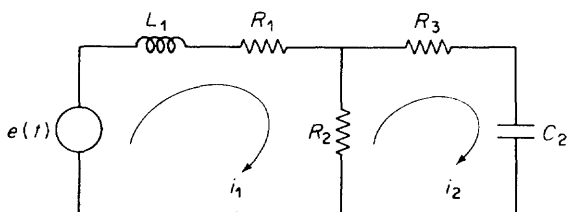


Fig. 3-65. Circuito eléctrico.

**PROBLEMA B-3-8.** Considere el circuito mostrado en la Fig. 3-66. Suponga que el interruptor  $S$  está abierto cuando  $t < 0$  y que el capacitor  $C$  está inicialmente cargado de modo que aparece el voltaje inicial  $q(0)/C = e_0$  en el capacitor. Calcule las corrientes cíclicas  $i_1$  e  $i_2$  cuando el interruptor se cierra en  $t = 0$ .

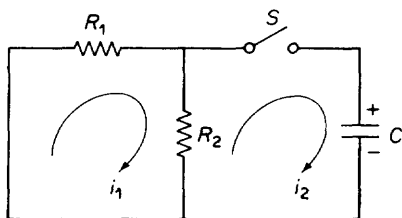


Fig. 3-66. Circuito eléctrico.

**PROBLEMA B-3-9.** En el circuito mostrado en la Fig. 3-67, suponga que el capacitor no está cargado inicialmente y el interruptor  $S$  se cierra en  $t = 0$ . Determine las corrientes cíclicas  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  para un caso especial donde

$$2R_1 = R_2 = R_3, \quad R_3 C = 1$$

Además, determine  $e_B(t)$ , que es el voltaje en el punto  $B$ . (Suponga  $E = 12\text{ V}$  y compare este resultado con el del ejemplo 3-1.)

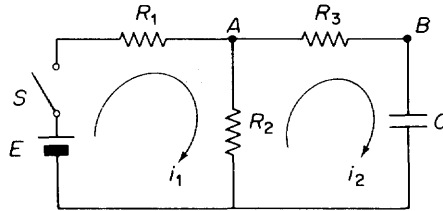


Fig. 3-67. Circuito eléctrico.

**PROBLEMA B-3-10.** El circuito mostrado en la Fig. 3-68 se encuentra en estado estable con el interruptor  $S$  cerrado. Luego se abre el interruptor  $S$  en  $t = 0$ . Obtenga  $i(t)$ .

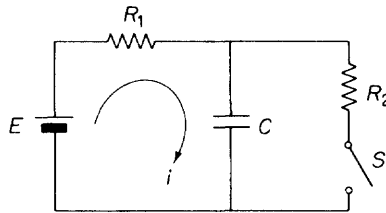


Fig. 3-68. Circuito eléctrico.

**PROBLEMA B-3-11.** Suponga que el interruptor  $S$  está en  $t < 0$  y el sistema se encuentra en estado estable (Fig. 3-69). En  $t = 0$  el interruptor se cierra. Obtenga la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$ . Grafique una curva típica  $i(t)$  contra  $t$ .

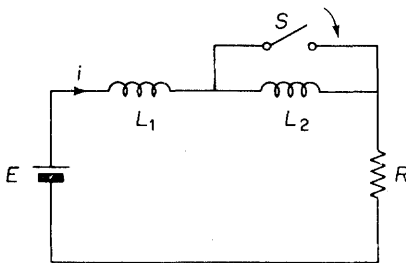
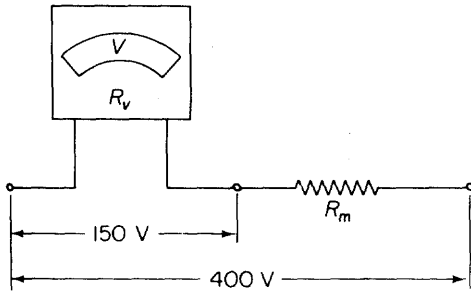


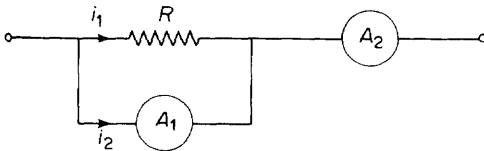
Fig. 3-69. Circuito eléctrico.

**PROBLEMA B-3-12.** Un voltmetro de cd mide voltaje entre 0 y 150 V. Suponga que la resistencia interna de este voltmetro es de  $15\,000\ \Omega$ . Este voltmetro de cd se usará para medir voltajes hasta de 400 V como se muestra en la Fig. 3-70. Determine la resistencia  $R_m$  necesaria para conectarla en serie.



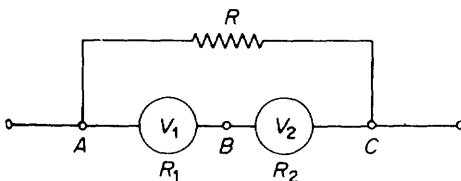
**Fig. 3-70.** Voltmetro conectado en serie con un resistor.

**PROBLEMA B-3-13.** El circuito de la Fig. 3-71 tiene un ampermetro de dc en paralelo con la resistencia  $R$  y otro ampermetro de dc conectado en serie. Suponga que las lecturas del ampermetro  $A_1$  y el ampermetro  $A_2$  son 20 A y 30 A, respectivamente. La resistencia  $R$  es de  $0.1 \Omega$ . Determine la resistencia interna del ampermetro  $A_1$ .

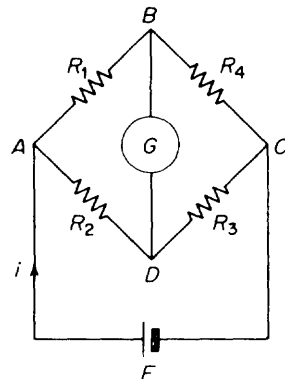


**Fig. 3-71.** Circuito eléctrico que consta de un resistor y dos ampermetros de cd.

**PROBLEMA B-3-14.** Dos voltmetros de cd  $V_1$  y  $V_2$  tienen las resistencias internas  $R_1 = 15\,000 \Omega$  y  $R_2 = 13\,000 \Omega$ , respectivamente. Ambos están diseñados para medir voltajes entre 0 y 150 V. Si estos dos voltmetros de cd se conectan en serie como se muestra en la Fig. 3-72, ¿cuál es el voltaje máximo que puede medirse?



**Fig. 3-72.** Circuito eléctrico que consta de un resistor y dos voltmetros de cd.



**Fig. 3-73.** Puente de Wheatstone.



**PROBLEMA B-3-15.** La figura 3-73 muestra un puente de Wheatstone. Encuentre la corriente  $i$  cuando el puente está balanceado.

**PROBLEMA B-3-16.** Considere el circuito puente mostrado en la Fig. 3-74 y suponga que el puente está balanceado de modo que no fluye corriente del galvanómetro; es decir  $i_g = 0$ . Obtenga  $E_2$  en términos de  $E_1$ ,  $R_1$  y  $R_2$ .

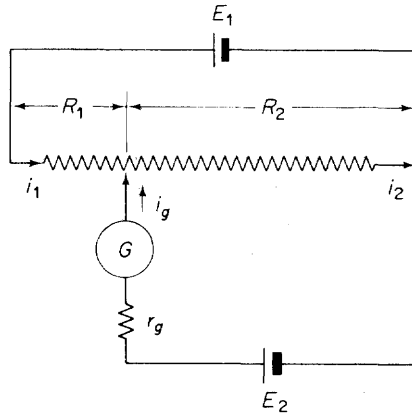


Fig. 3-74. Circuito puente

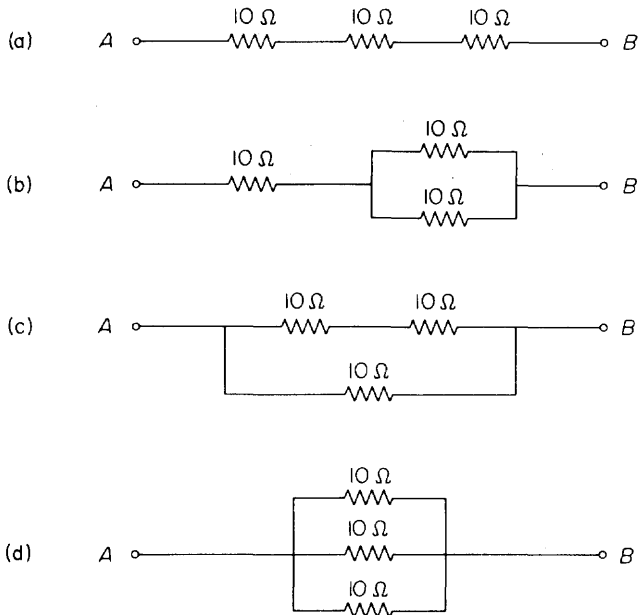


Fig. 3-75. Circuitos que constan de tres resistores de  $10\ \Omega$  conectados en diferente forma.

**PROBLEMA B-3-17.** Un resistor consume una potencia de 500 W si se aplican 110 V a sus terminales. Calcule la potencia consumida por este resistor cuando el voltaje aplicado a las terminales es de 100 V.

**PROBLEMA B-3-18.** Tres resistores de  $10\ \Omega$  están conectados de diferentes formas como se muestra en la Fig. 3-75(a), (b), (c) y (d). Calcule los valores de la resistencia combinada para estos casos. Si se aplican 12 V entre las terminales A y B, ¿cuál es la potencia disipada? Calcule la potencia disipada en los cuatro circuitos mostrados.

**PROBLEMA B-3-19.** Determine un sistema eléctrico análogo del sistema mecánico mostrado en la Fig. 3-76, donde  $p(t)$  es la fuerza de entrada al sistema.

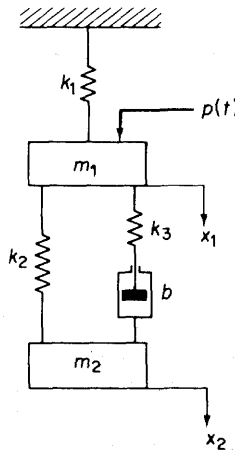


Fig. 3-76. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-3-20.** Obtenga un sistema mecánico análogo del sistema eléctrico mostrado en la Fig. 3-77.

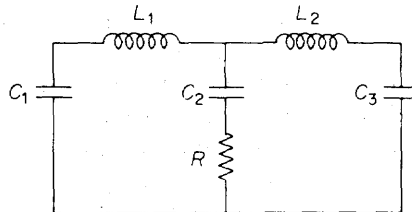


Fig. 3-77. Sistema eléctrico.

# 4

## SISTEMAS HIDRÁULICOS

### 4-1 INTRODUCCIÓN

Como el más versátil de los medios de la transmisión de señales y de potencia, los fluidos, ya sean líquidos o gases, tienen un extenso uso en la industria. Los líquidos y los gases pueden diferenciarse básicamente por sus incomprensibilidades relativas y el hecho de que un líquido puede tener una superficie libre, en tanto que un gas se expande para llenar su recipiente. En el campo de la ingeniería el término *hidráulica* describe sistemas fluidos que usan líquidos y *neumática* se aplica a aquellos que usan aire o gases. En este capítulo se exponen los sistemas hidráulicos y en el capítulo 5 los sistemas neumáticos.

Debido a su frecuencia en la industria, los circuitos hidráulicos y los sistemas hidráulicos constituyen una parte necesaria en la educación de un ingeniero. Muchos de los sistemas hidráulicos son no lineales. Sin embargo, algunas veces es posible linealizar sistemas no lineales de modo que se reduzca su complejidad y se obtengan soluciones que sean suficientemente exactas para muchos propósitos. En consecuencia, aquí se presenta una técnica de linealización útil para tratar a los sistemas no lineales que se expondrán. Sin embargo, se pospone para el capítulo 8 un análisis detallado de sistemas de control hidráulico linealizados.

Antes de proceder, definamos las unidades de presión y las presiones manométrica y absoluta.

**Unidades de presión.** La *presión* se define como fuerza por unidad de área. Las unidades de presión son  $\text{N/m}^2$ ,  $\text{kg}_f/\text{cm}^2$ ,  $\text{lb}_f/\text{in}^2$ , etcétera. En el sistema SI la unidad de presión es el  $\text{N/m}^2$ . A esta unidad se le ha dado el nombre de *pascal* (abreviado Pa).

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Los kilopascals ( $10^3 \text{ Pa} = \text{kPa}$ ) y megapascals ( $10^6 \text{ Pa} = \text{MPa}$ ) pueden usarse para expresar presión hidráulica. Nótese que

$$1 \text{ lb}_f/\text{in}^2 = 6895 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 = 14.22 \text{ lb}_f/\text{in}^2 = 0.9807 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 0.09807 \text{ MPa}$$

**Presión manométrica y presión absoluta.** La lectura de un barómetro estándar al nivel del mar es de 760 mm de mercurio a  $0^\circ\text{C}$  (29.92 in de mercurio a  $32^\circ\text{F}$ ). La *presión manométrica* se refiere a aquella presión que se mide con respecto a la atmosférica. Es la presión indicada por un manómetro sobre la atmosférica. La *presión absoluta* es la suma de las presiones manométrica y barométrica. Nótese que en mediciones de ingeniería la presión se expresa como presión manométrica. En cálculos teóricos, sin embargo, debe usarse la presión absoluta. Adviértase también que

$$760 \text{ mm Hg} = 1.0332 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 = 1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 14.7 \text{ lb}_f/\text{in}^2$$

$$0 \text{ N/m}^2 \text{ manométrica} = 1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs}$$

$$0 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 \text{ manométrica} = 1.0332 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 \text{ abs}$$

$$0 \text{ lb}_f/\text{in}^2 \text{ manométrica} = 0 \text{ psig} = 14.7 \text{ lb}_f/\text{in}^2 \text{ abs} = 14.7 \text{ psia}$$

**Sistemas hidráulicos.** El amplio uso de los circuitos hidráulicos en aplicaciones de máquinas herramientas, sistemas de control en aviación y operaciones similares, tiene lugar a causa de factores tales como la positividad, la exactitud, la flexibilidad, la alta relación de potencia (hp)-(peso, arranque rápido, paro y reversa con suavidad y precisión y simplicidad de operaciones).

En muchas aplicaciones de máquinas herramientas, por ejemplo, los ciclos transversal y de alimentación requeridos se manejan mejor mediante circuitos hidráulicos. Estos ciclos (donde el pistón avanza rápidamente en la carrera de trabajo, hasta hacer contacto con la pieza, avanza lentamente bajo presión mientras se realiza el trabajo y después se retrae rápidamente al final de la carrera de alimentación lenta de la herramienta) se manejan fácilmente mediante el uso de dos bombas (una de gran capacidad y baja presión y la otra de pequeña capacidad y alta presión) y algunos dispositivos de control de flujo. La bomba de gran capacidad y baja presión se usa sólo durante el avance y regreso del cilindro. La bomba de pequeña capacidad y alta presión suministra el fluido hidráulico para la carrera de compresión. Una válvula de alivio mantiene la presión alta mientras la bom-

ba de baja presión se descarga al depósito. (La válvula de alivio descarga la aportación de la bomba de gran capacidad y baja presión durante la fase de pequeña capacidad y alta presión de un ciclo.) Esa válvula de alivio está diseñada para la descarga rápida del fluido hidráulico a una presión cercana a la atmosférica, después de permitir la elevación de la presión a un valor prefijado.

Generalmente, la presión de operación en los sistemas hidráulicos se encuentra entre los  $10^6 \text{ N/m}^2$  (1 MPa) y  $35 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  (35 MPa) (aproximadamente entre  $10 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  y  $350 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ ; o entre  $145 \text{ lb}_f/\text{in}^2$  y  $5,000 \text{ lb}_f/\text{in}^2$ ). En algunas aplicaciones especiales, la presión de operación puede llegar hasta  $70 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  (70 MPa) (aproximadamente  $700 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  o  $10,000 \text{ lb}_f/\text{in}^2$ ). Para la misma necesidad de potencia, el peso y el tamaño de la unidad hidráulica pueden reducirse al incrementarse la presión de suministro.

**Esquema del capítulo.** Nuestro propósito no es dar un análisis completo de los sistemas hidráulicos sino más bien exponer un breve esquema de tales sistemas, así como las técnicas de modelado matemático correspondientes. Después del material introductorio de la Sec. 4-1, sigue una breve descripción de los componentes de los sistemas hidráulicos sin análisis matemático en la Sec. 4-2. A continuación se explican las propiedades de los fluidos hidráulicos en la Sec. 4-3 y las leyes y ecuaciones básicas del flujo de fluidos en la Sec. 4-4. El modelado matemático de sistemas hidráulicos se cubre en la Sec. 4-5. Finalmente, la Sec. 4-6 trata de una técnica de linealización para obtener modelos matemáticos linealizados de componentes no lineales utilizando una válvula hidráulica como ejemplo de componentes no lineales.

El material dado en este capítulo constituye el mínimo absoluto requerido para un ingeniero. El lector que desee detalles adicionales de sistemas hidráulicos podría consultar libros especializados; por ejemplo, los que aparecen en la bibliografía 4-4 y 4-7.

## 4-2 SISTEMAS HIDRÁULICOS

En esta sección, la cual introduce conceptos generales sobre sistemas hidráulicos, presentamos breves descripciones de circuitos hidráulicos, unidades de potencia, actuadores, válvulas y dispositivos similares.

**Circuitos hidráulicos.** Los circuitos hidráulicos son capaces de producir muchas combinaciones diferentes de movimiento y fuerza. Sin embargo, en esencia son lo mismo, independientemente de su aplicación. Tales circuitos están formados por cuatro componentes básicos: un depósito para guardar el fluido hidráulico, una bomba o unas bombas para forzar al fluido a través del circuito, válvulas para controlar la presión del fluido y su flujo, y un actuador o unos actuadores para convertir la energía hidráulica en

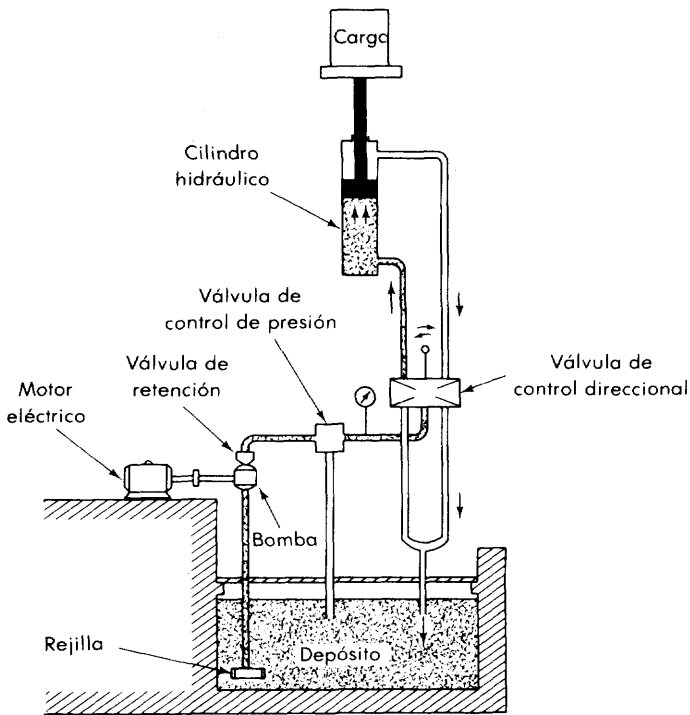


Fig. 4-1. Circuito hidráulico.

energía mecánica para hacer el trabajo. La figura 4-1 muestra un circuito simple formado por un depósito, una bomba, válvulas, un cilindro hidráulico, etcétera.

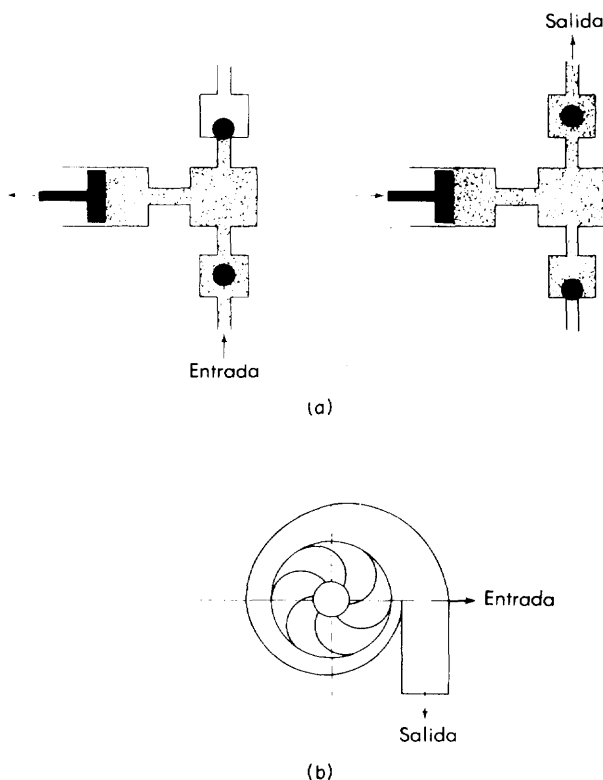
**Unidad de potencia hidráulica.** Una *unidad de potencia hidráulica* incluye componentes tales como un depósito, filtros, un motor eléctrico para impulsar una bomba o unas bombas y una válvula de control de presión máxima.

El depósito, que funciona como fuente de fluido hidráulico, debe ser lo suficientemente grande para almacenar el mayor volumen de líquido que el sistema pueda necesitar. Además, debe estar completamente cerrado con el objeto de mantener el fluido limpio. Con frecuencia, el motor eléctrico, la bomba y las válvulas están montados sobre el depósito.

Para remover partículas extrañas del fluido hidráulico, se utilizan rejillas, filtros y bujías magnéticas, asegurando de ese modo la larga vida y el funcionamiento sin dificultades del sistema hidráulico. (Las bujías magnéticas localizadas usualmente en el depósito atraparán las partículas de hierro o acero del fluido hidráulico.)

Utilizadas para convertir energía mecánica en energía hidráulica, las bombas hidráulicas pueden clasificarse como *bombas de desplazamiento positivo* y *bombas de desplazamiento no positivo*. La figura 4-2(a) y (b) muestran diagramas esquemáticos de cada una de ellas. Una característica de la bomba de desplazamiento positivo es que su salida no se ve afectada por las variaciones de la presión del sistema a causa de la presencia de un sello interno positivo contra fugas. Casi todas las bombas usadas en sistemas hidráulicos de potencia son del tipo de desplazamiento positivo. (Debido a la ausencia de un sello interno positivo, la salida de una bomba de desplazamiento no positivo varía considerablemente con la presión.)

Las bombas de desplazamiento positivo pueden clasificarse como *unidades de desplazamiento fijo* o *variable*. En las primeras, con objeto de variar la salida volumétrica, debe variarse la velocidad de la bomba. La salida volumétrica puede variarse en una bomba de desplazamiento variable ajustando las relaciones físicas de las partes operativas de la bomba.



**Fig. 4-2.** (a) Bomba de desplazamiento positivo; (b) bomba de desplazamiento no positivo.

Hay cuatro tipos básicos de bombas de desplazamiento positivo comúnmente usadas en los sistemas hidráulicos.

1. Bombas de pistón axial
2. Bombas de pistón radial
3. Bombas de aspas
4. Bombas de engranes

Debido a la semejanza en su construcción mecánica, las bombas hidráulicas pueden usarse como motores hidráulicos. La tabla 4-1 muestra las características de funcionamiento de las bombas y motores hidráulicos.

**Tabla 4-1.** CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONAMIENTO DE LAS BOMBAS Y MOTORES HIDRÁULICOS

	Presión (MPa)	Salida (m <sup>3</sup> /s)	Eficiencia total
Bombas de pistón axial	7 ~ 70	$3 \times 10^{-5} \sim 2 \times 10^{-2}$	85 ~ 95
Bombas de pistón radial	5 ~ 50	$3 \times 10^{-4} \sim 1.2 \times 10^{-2}$	80 ~ 90
Bombas de aspas	2 ~ 18	$3 \times 10^{-5} \sim 1.6 \times 10^{-2}$	80 ~ 90
Bombas de engranes	2 ~ 18	$1 \times 10^{-4} \sim 1 \times 10^{-2}$	75 ~ 90
	Presión (MPa)	Frecuencia angular (Hz)	Eficiencia total
Motores de pistón axial	1 ~ 70	0.2 ~ 50	85 ~ 95
Motores de pistón radial	1 ~ 50	0.2 ~ 30	80 ~ 90
Motores de aspas	1 ~ 18	2 ~ 50	80 ~ 90
Motores de engranes	1 ~ 18	2 ~ 50	70 ~ 90

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 10.197 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 = 145 \text{ lb}_f/\text{in}^2$$

$$1 \text{ m}^3/\text{s} = 10^6 \text{ cm}^3/\text{s} = 10^3 \text{ l/s} = 6 \times 10^4 \text{ l/min}$$

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ cps} = 60 \text{ cpm} = 60 \text{ rpm}$$

**Bombas de pistón axial.** La figura 4-3 es un diagrama esquemático de una *bomba de pistón axial*. El bloque del cilindro rotatorio contiene pistones que tienen libertad para moverse hacia adentro y hacia afuera de sus orificios. La flecha impulsora está colocada formando un ángulo con respecto al bloque de cilindros. La rotación de la flecha impulsora causa rotación de los pistones y del bloque de cilindros a la misma velocidad. Al moverse cada pistón adentro y afuera en sus orificios, la longitud del recorrido es  $2R \tan$



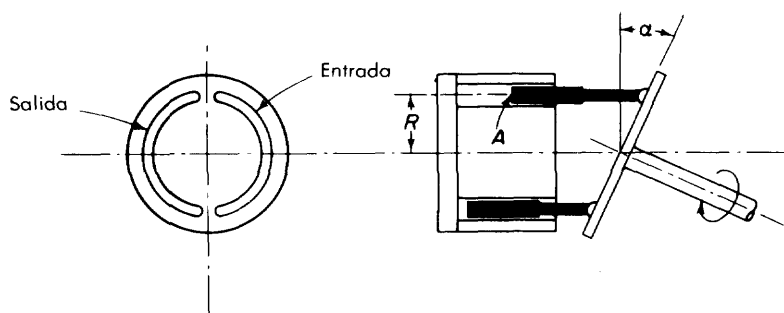


Fig. 4-3. Bomba de pistón axial.

$\alpha$ . ( $R$  está definido en la Fig. 4-3.) Esta longitud depende del ángulo  $\alpha$ , el ángulo de inclinación del bloque de cilindros. Al moverse cada pistón hacia afuera, el fluido hidráulico es absorbido a través de la válvula. En la carrera de retorno, el fluido es expulsado a través de la válvula bajo presión. En un ciclo, el flujo volumétrico es  $2ZAR \tan \alpha$ , donde  $Z$  es el número de pistones (una bomba típica tiene nueve pistones) y  $A$  es el área del pistón.

**Bombas de pistón radial.** Se ilustra una *bomba de pistón radial* en la Fig. 4-4(a). Consta de un perno estacionario con lumbreras de entrada y salida del flujo, un bloque de cilindro que da vueltas alrededor del perno y alberga los pistones y un rotor que controla la carrera del pistón. El eje central del rotor está desviado del eje central del bloque del cilindro.

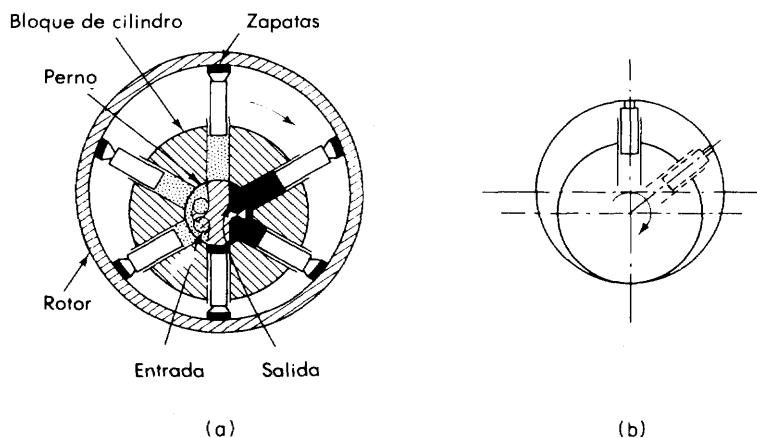
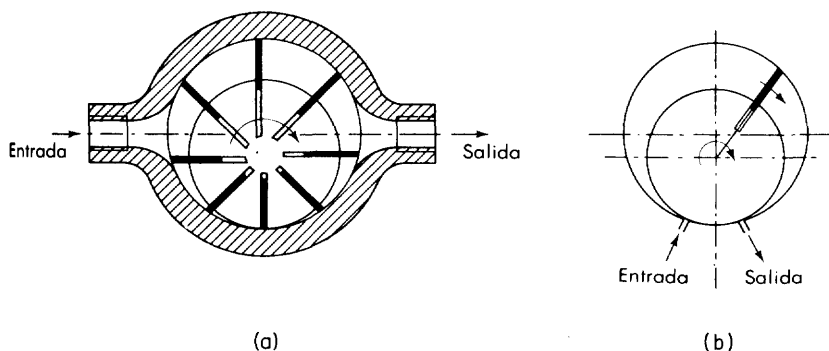


Fig. 4-4. (a) Bomba de pistón radial; (b) diagrama esquemático de una bomba de pistón radial.

La figura 4-4(b) es un diagrama esquemático de una bomba de pistón radial en la cual sólo se muestra un pistón. Aquí, a medida que la flecha impulsora hace girar al bloque del cilindro, la fuerza centrífuga impulsa al émbolo sumergido hacia afuera de modo que presiona contra el rotor. Puesto que el eje central no coincide con el eje central del bloque del cilindro, el pistón se mueve hacia adentro durante la mitad de una revolución del bloque del cilindro y hacia afuera durante la otra mitad. El perno incluye lumbreras de entrada y salida que conectan los extremos abiertos de los orificios de los cilindros. Durante la rotación, el pistón alimenta fluido hidráulico en el orificio del cilindro a medida que pasa por el lado de entrada del perno, y fuerza al fluido hacia afuera del orificio a medida que pasa por el lado de salida del perno. La salida volumétrica depende de la excentricidad entre los ejes centrales del rotor y del cilindro.

**Bombas de aspas.** En la Fig. 4-5(a) aparece un diagrama esquemático de una *bomba de aspas* simple. Un rotor cilíndrico con aspas móviles en ranuras radiales gira en una carga circular. El diagrama de la Fig. 4-5(b) ilustra el principio de operación. Para simplificar la exposición, sólo se



**Fig. 4-5.** (a) Bomba de aspas: (b) diagrama esquemático de una bomba de aspas.

muestra un aspa. A medida que el rotor da vuelta, la fuerza centrífuga impulsa al aspa hacia afuera de modo que esté siempre en contacto con la superficie interna de la carcasa. El aspa divide el área entre el rotor y la carcasa en dos cámaras. (La bomba de aspas real incluye muchas aspas, que dividen el área entre el rotor y la carcasa en muchas cámaras que varían en tamaño, dependiendo de su posición alrededor de la carcasa.) La entrada a la bomba se localiza en un punto donde la cámara está expandiendo su tamaño. Un vacío parcial originado por la expansión alimenta fluido hidráulico dentro de la bomba. Luego el fluido es transportado a la salida de la bomba, donde la cámara lo toma y lo fuerza a través de la lumbrera de salida. Esta bomba se llama bomba de aspas *desbalanceada* porque la alta presión se genera solamente en un lado del rotor y la flecha.

Una bomba de aspas *balanceada* tiene una carcasa elíptica que forma dos cámaras de bombeo separadas en lados opuestos del rotor, de modo que las cargas laterales se cancelan mutuamente. Una bomba balanceada como la descrita se muestra en la Fig. 4-6. Las ventajas de este tipo consisten en que se incrementa la vida de los cojinetes y permite más altas presiones de operación.

**Bombas de engranes.** La figura 4-7 presenta un diagrama esquemático de una *bomba de engranes*, la cual consta de un engrane impulsor y un engrane impulsado, encerrados dentro de una carcasa bien empaçada. Los engranes impulsor e impulsado giran en direcciones opuestas y se engranan en un punto dentro de la carcasa entre las lumbreras de entrada y de salida. El fluido hidráulico es alimentado por la entrada a la cámara *A*, al separarse los dientes de los engranes impulsor e impulsado. El fluido hidráulico queda atrapado entre los dientes del engrane y la carcasa y es transportado a través de dos trayectorias separadas alrededor de la cámara de salida *B*. A medida que los dientes vuelven a engranar, el fluido es forzado a través de la lumbrera de salida. Nótese que el buen empaque de los dientes de engrane dentro de la carcasa se necesita para hacer mínimo el escurrimiento interno.

**Resumen sobre las bombas de desplazamiento positivo.** En razón de su bajo costo, su mantenimiento más simple y su gran tolerancia a la contaminación del fluido, la bomba de engranes se utiliza mucho en las industrias.

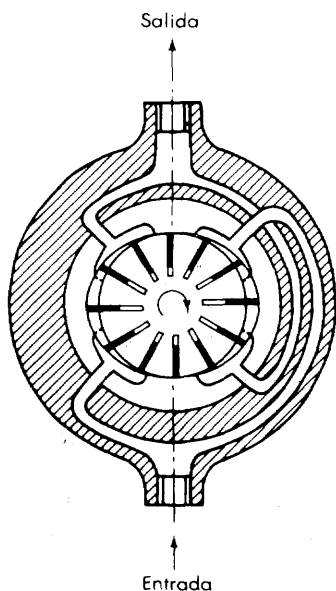


Fig. 4-6. Bomba de aspas balanceada.

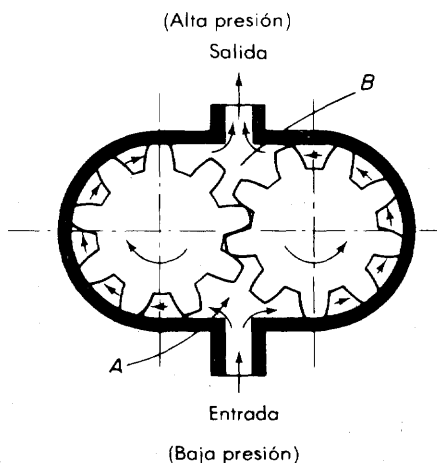


Fig. 4-7. Bomba de engranes.

La bomba de aspas tiene amplias aplicaciones industriales, tales como las máquinas herramientas y la maquinaria automática. Las bombas de pistón axial y radial son más utilizadas donde se necesitan altas presiones.

**Acumuladores.** El *acumulador* almacena fluido a presión proveniente de una bomba hidráulica. Esta componente se usa a menudo en circuitos hidráulicos para tener disponible el fluido a presión ante la demanda y para suavizar las pulsaciones en el flujo.

**Actuadores.** Los *actuadores hidráulicos* realizan la función opuesta que las bombas hidráulicas en el sentido de que convierten la energía hidráulica en energía mecánica con el objeto de permitir el trabajo útil. Enlazado mecánicamente a la carga de trabajo, este dispositivo es actuado por el fluido a presión de la bomba. Los actuadores pueden clasificarse como lineales y rotatorios.

**Actuadores lineales.** Los *actuadores lineales* vienen en la forma de un ariete o cilindro. La figura 4-8(a) y (b) muestra unos cilindros de doble acción. En un cilindro de doble acción la presión hidráulica puede aplicarse en cualquiera de los lados de pistón. (El pistón puede moverse en una u otra dirección. El tipo mostrado en la Fig. 4-8(a) se llama cilindro *diferencial* porque el área del pistón a la izquierda es mayor, proporcionando así una carrera de trabajo más lenta y más potente cuando se aplica la presión por el lado izquierdo. La carrera de retorno es más rápida debido al área del pistón más pequeña. La figura 4-8(b) muestra un tipo de cilindro *no diferencial*. Se necesitan fuerzas iguales en ambas direcciones.

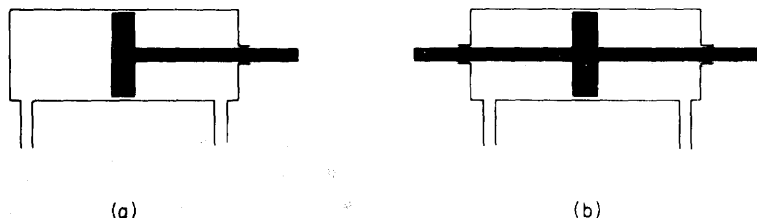


Fig. 4-8. Cilindros de doble acción.

**Actuadores rotatorios.** Los *actuadores rotatorios* incluyen motores de pistón, motores de aspas y motores de engranes. Muchas de las bombas hidráulicas (como las bombas de pistón, las bombas de aspas y las bombas de engranes) pueden usarse como motores con una modificación pequeña o sin modificación.

La figura 4-9 es un diagrama esquemático de un motor de pistón axial. El pistón en el lado de alta presión es empujado hacia afuera por la fuerza

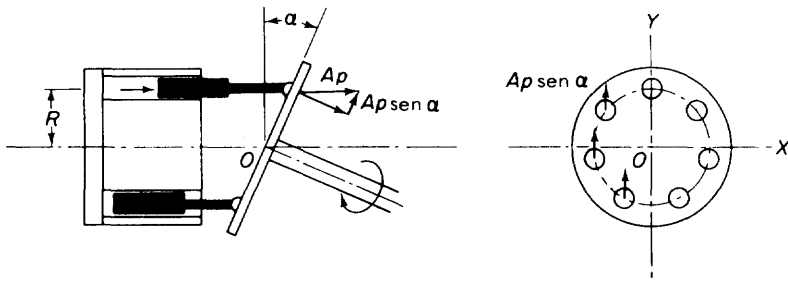


Fig. 4-9. Motor de pistón axial.

$Ap$ , donde  $A$  es el área del pistón y  $p$  la presión del fluido. Esta fuerza puede descomponerse en la fuerza normal y la paralela al plato impulsado. Para cada pistón, la fuerza paralela al plato es  $Ap \sen \alpha$ . Por lo tanto, el par  $T$  que actúa sobre la flecha es

$$T = \sum_i Ap \sen \alpha \cdot R \sen \theta_i$$

donde  $\theta_i$  es el ángulo entre la línea  $OY$  y la línea que conecta al punto  $O$  y el centro del  $i$ -ésimo émbolo sumergido y  $R$  está definido en la Fig. 4-9.

En un motor de pistón radial, el fluido a presión entra en la mitad de los orificios del bloque del cilindro, forzando radialmente los pistones respectivos desde el eje del bloque del cilindro. Estos pistones pueden moverse radialmente girando a un punto donde el contorno del rotor está más alejado del perno. Así pues, al impulsar los pistones radialmente se hace que el bloque del cilindro y los pistones giren. Este principio de operación se ilustra en la Fig. 4-10. El bloque del cilindro está conectado a la flecha de salida.

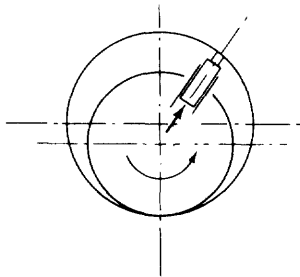


Fig. 4-10. Motor de pistón radial.

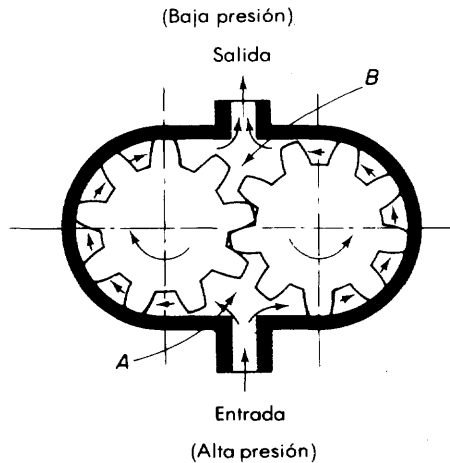


Fig. 4-11. Motor de engranes.

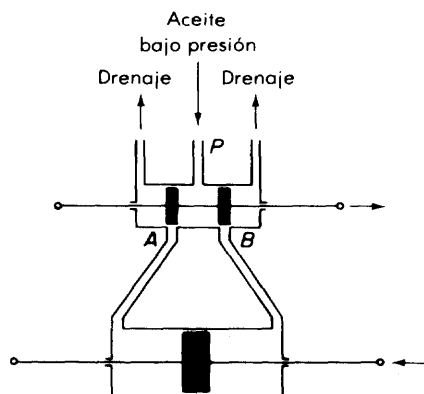
La figura 4-11 ilustra un motor de engranes. Puesto que este dispositivo es un motor, ambos engranes son engranes impulsados, pero sólo uno está conectado a la flecha de salida. La operación es esencialmente la inversa de la bomba de engranes. El fluido hidráulico de la bomba entra a la cámara *A* y fluye en una y otra dirección alrededor de la superficie interna de la carcasa hacia la cámara *B*, forzando a los engranes a girar como se indica. Así, el movimiento rotatorio queda entonces disponible para el trabajo en la flecha de salida.

**Válvulas hidráulicas de control.** La *válvula hidráulica de control* es un dispositivo que utiliza movimiento mecánico para controlar la dirección del flujo del fluido hacia el actuador. Las válvulas hidráulicas de control comúnmente usadas pueden dividirse en cuatro tipos: de carretes deslizantes, de batidor o aleta, de tubo de chorro y de disco.

**Válvulas de carretes deslizantes.** Usadas bastante en los sistemas hidráulicos, las *válvulas de carretes deslizantes* usualmente se clasifican por el número de vías por donde el flujo puede entrar a la válvula o salir de ella.

En la figura 4-12 se muestra una válvula de cuatro vías de carretes deslizantes (o válvula deslizante de cuatro vías) conectada a un cilindro de potencia (o actuador). El principio de operación es el siguiente. El carrete puede ser corrido en una dirección o en la otra. Si se cambia a la derecha, como se muestra, el puerto *B* se abre a la entrada de presión *P* y el puerto *A* se abre al drenaje. El pistón de potencia (o actuador) se mueve a la izquierda. En forma similar, si el carrete se cambia a la izquierda, el punto *A* se abre a la entrada de presión *P*, el puerto *B* se abre al drenaje y el pistón de potencia se mueve hacia la derecha.

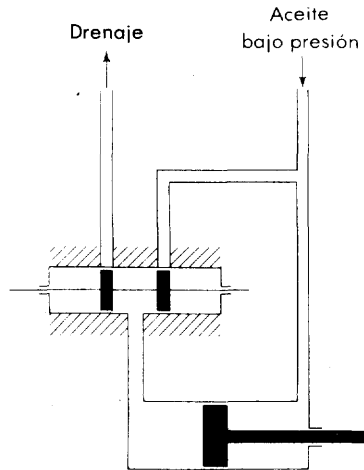
Esta válvula de cuatro vías tiene dos discos en el carrete. (En las válvulas de carrete, el número de discos varía de uno hasta tres o cuatro.) Si el ancho del disco es menor que el puerto en la manga de la válvula, se dice que



**Fig. 4-12.** Válvula de carretes deslizantes de cuatro vías conectada a un cilindro de potencia.

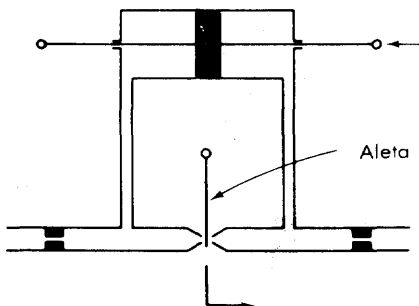
la válvula es *subtraslapada*. Las válvulas *sobretraslapadas* tienen un ancho de disco mayor que el ancho del puerto cuando la manga está en posición neutral. Una válvula de traslape cero tiene un ancho de disco que es idéntico al ancho del puerto.

La figura 4-13 muestra una válvula de tres vías conectada a un cilindro de potencia. Requiere una presión sesgada actuando en un lado de un pistón de potencia de área desigual para invertir la dirección.



**Fig. 4-13.** Válvula de tres vías conectada a un cilindro de potencia.

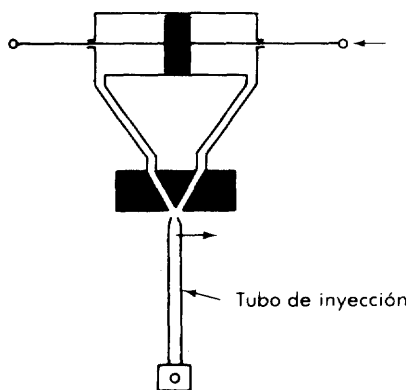
**Válvulas de aleta.** Las *válvulas de aleta* también son llamadas *válvulas de tobera o aleta*. Una aleta se coloca entre dos toberas opuestas (Fig. 4-14). Si la aleta se mueve ligeramente hacia la derecha, ocurre un desbalance en la presión en las toberas y el pistón de potencia se mueve a la izquierda, y viceversa.



**Fig. 4-14.** Válvula de aleta conectada a un cilindro de potencia.

Estos dispositivos se usan frecuentemente en servos hidráulicos como válvula de primera etapa en servoválvulas de dos etapas. Esto es así porque puede necesitarse de una fuerza considerable para la carrera de las grandes válvulas de carretes que resulta de la fuerza que fluye en estado permanente. Para reducir o compensar esta fuerza a menudo se emplea una configuración de válvula de dos etapas; se usa una válvula de aleta en la primera etapa para proporcionar la fuerza necesaria para la carrera de la segunda válvula de carrete.

**Válvulas de tubo de inyección.** La figura 4-15 muestra una válvula de tubo de inyección conectada a un cilindro de potencia. El fluido hidráulico se introduce por el tubo de inyección. Si el tubo de inyección es cambiado hacia la derecha desde su posición neutral, el pistón de potencia se mueve hacia la izquierda y viceversa. La válvula de tubo de inyección no se usa tanto como la válvula de aleta debido al flujo nulo, respuesta más lenta y características más bien impredecibles. Su principal ventaja está en su insensibilidad a los flujos sucios.



**Fig. 4-15.** Válvula de tubo de inyección conectada a un cilindro de potencia.

**Válvula de movimiento vertical.** Básicamente, las *válvulas de movimiento vertical* son válvulas de dos vías. Las válvulas de movimiento vertical típicas se encuentran en las válvulas de retención y en las válvulas de alivio, donde no se necesita invertir la dirección del flujo.

La válvula de retención es una válvula direccional de una vía en el sentido de que permite el flujo en una dirección y lo evita en la otra.

El propósito de la válvula de alivio es el de proporcionar protección contra la sobrecarga en las componentes de los circuitos o limitar la fuerza que pueda ejercer un actuador. Tales válvulas se necesitan en casi todos los circuitos hidráulicos con el objeto de controlar la presión. La figura 4-16 muestra una válvula de alivio simple en la cual un puerto está conectado a la



línea de presión y el otro al depósito. La fuerza del resorte mantiene a la válvula sobre su asiento. El tornillo de ajuste controla la presión de operación.

La válvula de alivio opera como sigue. Cuando la presión a la entrada excede la fuerza del resorte, se fuerza a la válvula a dejar su asiento y el fluido fluye de la línea de presión a través de la válvula de depósito. Cuando la presión cae por debajo de la fuerza del resorte, la válvula recupera su asiento y el flujo se detiene. La presión a la cual la válvula se fuerza primero a dejar su asiento y comienza a pasar fluido se llama *presión de descarga*. A medida que el flujo a través de la válvula se incrementa, la válvula es empujada más lejos de su asiento y la presión del flujo pleno se hace más alta que la presión de descarga. Este fenómeno de incremento de presión en la línea a medida que el flujo a través de la válvula de alivio se incrementa se llama *supresión de la presión*.

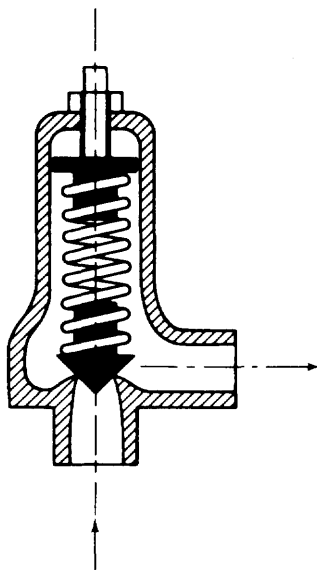


Fig. 4-16. Válvula de alivio.

**Ventajas y desventajas de los sistemas hidráulicos.** Hay ciertas ventajas y desventajas en el uso de los sistemas hidráulicos más notables que en otros sistemas. Algunas de las ventajas se enlistan a continuación.

1. El fluido hidráulico actúa como lubricante, además de transportar el calor generado en el sistema hasta un intercambiador de calor conveniente.
2. Los actuadores hidráulicos de tamaño comparativamente pequeño pueden desarrollar grandes fuerzas o pares.
3. Los actuadores hidráulicos tienen una mayor velocidad de respuesta con arranques, paros e inversiones de la velocidad rápidos.
4. Los actuadores hidráulicos pueden operarse sin dañarse en condiciones continuas, intermitentes, inversoras y de paro.
5. La disponibilidad de actuadores lineales y rotatorios ofrece flexibilidades en el diseño.
6. Por el escaso escurrimiento en los actuadores hidráulicos, la caída de velocidad es pequeña cuando se aplica carga.

Por otra parte, existen varias desventajas que tienden a limitar su uso.

1. La potencia hidráulica no está tan fácilmente disponible comparada con la potencia eléctrica.

2. El costo de su sistema hidráulico puede ser mayor que un sistema eléctrico semejante que realice una función similar.
3. Existen riesgos de fuego y explosión a menos que se usen fluidos a prueba de incendio.
4. En vista de que es difícil mantener un sistema hidráulico libre de escurrimientos, el sistema tiende a ser sucio.
5. El aceite contaminado puede causar fallas en el funcionamiento correcto de un sistema hidráulico.
6. Como resultado de la no linealidad y otras características complejas involucradas, el diseño de sistemas hidráulicos complicados es muy comprometedor.
7. Los circuitos hidráulicos generalmente tienen características de amortiguamiento limitadas. Si un circuito hidráulico no está diseñado correctamente, pueden ocurrir o desaparecer algunos fenómenos de inestabilidad, dependiendo de las condiciones de operación.

**Comentarios.** Se necesita de una atención particular para asegurarse que el sistema hidráulico es estable y satisfactorio en todas las condiciones de operación. Puesto que la viscosidad del fluido hidráulico puede afectar en gran medida los efectos de amortiguamiento y fricción de los circuitos hidráulicos, las pruebas de estabilidad deben llevarse a cabo a la temperatura de operación más alta posible.

Debe notarse que pueden ocurrir ciertos fenómenos indeseables en los sistemas hidráulicos, dos de los cuales son el martilleo del aceite y la cavitación. Aunque no se presentan en los sistemas bien diseñados, pueden ocurrir en algunos; por lo tanto, es aconsejable diseñar los sistemas hidráulicos evitando estos fenómenos.

**Martilleo o golpeteo del aceite.** Cuando el aceite o el agua que fluyen en un tubo se detiene súbitamente a causa del cierre instantáneo de una válvula en el extremo de una tubería, puede producirse una fuente de presión violenta, causando con eso una serie de choques que suenan como golpes de martillo. Este fenómeno se llama *martillo de aceite* o *martillo de agua*, dependiendo del medio fluido involucrado. (También se conoce como *golpe de ariete*.)

El fenómeno del martillo de agua puede ocurrir en los sistemas de plomería domésticos. Por ejemplo, cuando los grifos se cierran rápidamente o cuando el flujo de agua se corta automáticamente por un equipo usuario de agua, como una lavadora de platos o una lavadora de ropa, puede darse el sonido del martilleo. Tal martilleo de agua se debe a que el agua que fluye a través de un tubo desarrolla cierta cantidad de movimiento. Cuando el flujo se corta súbitamente por el cierre de un grifo o por la acción de una válvula eléctrica dentro de una máquina lavadora, el agua aún continúa moviéndose a causa de esta cantidad de movimiento, y puesto que

el agua difícilmente puede ser comprimida, ésta golpea estrepitosamente las paredes del interior del tubo. (Debe notarse que algunos tubos pueden hacer ruidos de martilleo por una razón bastante diferente, tal como estar montados de manera insegura de modo que el agua que por allí se precipita causa que el tubo se mueva en su entorno y golpee con estrépito contra las vigas u otros tubos cercanos.)

En cualquier sistema hidráulico, si la válvula en el extremo de la tubería se cierra súbitamente, la energía cinética de la columna detenida de fluido hidráulico se expande, comprimiendo el fluido y estirando las paredes del tubo. Al detener el flujo de fluido hidráulico, la energía cinética se transforma en energía potencial. (La presión máxima en el instante del cierre de la válvula puede obtenerse al igualar la energía cinética y la energía potencial.) Se encuentra que el incremento en la presión es proporcional a la velocidad frenada del flujo del fluido hidráulico. Así es que, con el objeto de reducir la fuente de presión, es aconsejable tener baja velocidad del fluido haciendo las áreas del tubo lo suficientemente grandes. (Una regla empírica consiste en limitar la velocidad del fluido hidráulico a 5 m/s.)

Nótese que la fuente de presión resulta solamente cuando la válvula se cierra en menos de un viaje redondo de la onda de presión. Si el flujo del fluido no se para rápidamente, entonces la onda de presión tiene tiempo para viajar hasta el extremo de la línea hidráulica y regresar varias veces mientras el paro va en progreso, la presión excesiva se reduce mucho. (La onda de presión continúa viajando de ida y vuelta hasta que la energía involucrada se pierde por fricción.) En consecuencia, para evitar fuentes de presión violentas, es aconsejable el uso de válvulas de cierre lento en las tuberías largas y la instalación de dispositivos de alivio o dispositivos de antimartilleo, tales como los tanques de oscilación, en lugares adecuados para absorber el choque de la fuente de presión. Un dispositivo de antimartilleo, el cual básicamente consta de una cámara con aire encerrado, funciona como colchón neumático para absorber el choque creado cuando el fluido hidráulico de flujo rápido es obligado a parar. En lugar del estruendoso golpeteo del fluido hidráulico contra los tubos y accesorios, se fuerza su rumbo hacia la cámara de aire del dispositivo antimartilleo. El aire se comprime fácilmente, por lo tanto, el fluido hidráulico precipitado comienza a comprimir el aire interior, absorbiendo así la energía extra que pudiera de otra forma causar martilleo. Cuando el fluido hidráulico de nuevo está en reposo, el aire interior comprimido se expande y queda listo para el siguiente acontecimiento.

En los sistemas de plomería domésticos, donde las máquinas lavadoras crean casi siempre este tipo de problema a causa de los frecuentes ciclos de apertura y cierre de las válvulas automáticas, un dispositivo antimartilleo (tal como un tubo o cilindro con un extremo sellado y el otro extremo conectado a la tubería de agua de modo que el aire quede encerrado dentro del tubo del cilindro) se instala cerca de los grifos que suministran el agua a estos equipos.

**Cavitación.** Cuando la velocidad del flujo líquido se incrementa localmente y el líquido fluye en una región donde la presión se reduce a la presión de vapor, el líquido hierve y se desarrollan bolsas de vapor. En esta situación, las burbujas de vapor son transportadas con el líquido hasta que se alcanza una región de más alta presión y estallan súbitamente. Cuando las bolsas de vapor estallan, las fuerzas ejercidas por el líquido que se precipita dentro de la cavitación crean una muy alta presión localizada y causan chapeleo de la superficie sólida, un proceso que se da acompañado de ruido y vibración. Este proceso de vaporización y estallido subsecuente de las burbujas de vapor en un flujo rápido de un líquido se llama *cavitación*. Por ejemplo, en una bomba centrífuga, si la cavitación aparece a causa de una caída de presión en la entrada, ocurren vibración y ruido y la eficiencia cae. Más aún, la bomba puede dañarse. Puesto que este proceso causa tales efectos indeseables como la disminución de la eficiencia, el daño a los conductos del flujo, ruido y vibración, los sistemas hidráulicos deben diseñarse para evitar la cavitación eliminando regiones de baja presión local y/o utilizando materiales especiales resistentes a la cavitación o recubrimientos.

#### 4.3 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS HIDRÁULICOS

Las propiedades del fluido hidráulico tienen un efecto importante en el funcionamiento de los sistemas hidráulicos. Además de servir como un medio para la transmisión de potencia, el fluido hidráulico debe mantener al mínimo el desgaste de las partes móviles proveyendo una lubricación satisfactoria. En la práctica, los aceites basados en el petróleo con los aditivos adecuados son los fluidos hidráulicos más comúnmente utilizados porque ofrecen buena lubricación para las partes móviles en el sistema y son casi incompresibles. Es necesario el uso de aceite limpio de alta calidad para la operación satisfactoria del sistema hidráulico. Las páginas siguientes describen aquellas características físicas de los fluidos hidráulicos que son necesarias para explicar los sistemas hidráulicos.

**Densidad y volumen específico.** La *densidad de masa*  $\rho$  de una sustancia es su masa por unidad de volumen. Las unidades comúnmente usadas son  $\text{kg/m}^3$ ,  $\text{lb/ft}^3$ ,  $\text{slug/ft}^3$ , etcétera. Para el agua a la presión atmosférica estándar ( $1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs, la cual es igual a  $1.0332 \text{ kg/cm}^2$  abs o  $14.7 \text{ lb/in}^2$  abs) y temperatura estándar (277.15 K que es igual a  $4^\circ\text{C}$  o  $39.2^\circ\text{F}$ ), la densidad de masa es

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 = 62.43 \text{ lb/ft}^3 = 1.94 \text{ slug/ft}^3$$

Para los aceites basados en petróleo, la densidad de masa es aproximadamente

$$\rho = 820 \text{ kg/m}^3 = 51.2 \text{ lb/ft}^3 = 1.59 \text{ slug/ft}^3$$

El *volumen específico*  $v$  es el recíproco de la densidad  $\rho$ . Es el volumen ocupado por una unidad de masa del fluido, o bien

$$v = \frac{1}{\rho}$$

**Peso específico y densidad específica.** El *peso específico*  $\gamma$  de una sustancia es su peso por unidad de volumen. Las unidades comúnmente usadas son  $\text{N/m}^3$ ,  $\text{kg}_f/\text{m}^3$ , etcétera. Para el agua a la presión atmosférica y temperatura estándar,

$$\gamma = 9.807 \times 10^3 \text{ N/m}^3 = 1000 \text{ kg}_f/\text{m}^3 = 62.43 \text{ lb}_f/\text{ft}^3$$

Para los aceites basados en petróleo, el peso específico es aproximadamente

$$\gamma = 8.04 \times 10^3 \text{ N/m}^3 = 820 \text{ kg}_f/\text{m}^3 = 51.2 \text{ lb}_f/\text{ft}^3$$

El peso específico  $\gamma$  y la densidad de masa  $\rho$  están relacionados por

$$\gamma = \rho g$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

La *densidad específica* de una sustancia es la relación de su peso con respecto al peso de un volumen igual de agua a la presión atmosférica y temperatura estándar.

La densidad  $\rho$  de un líquido es función de la presión y la temperatura. Puede escribirse

$$\rho = \rho_0[1 + a(p - p_0) - b(\theta - \theta_0)]$$

donde  $\rho$ ,  $p$ , y  $\theta$  son la densidad de masa, la presión y la temperatura, respectivamente. (Se supone que la densidad del líquido es  $\rho_0$  cuando la presión es  $p_0$  y la temperatura  $\theta_0$ .) Los valores de  $a$  y  $b$  son positivos. Así pues, la densidad de masa de un líquido se incrementa cuando la presión se incrementa y decrece cuando la temperatura se incrementa. Los coeficientes  $a$  y  $b$  se llaman *módulo de compresibilidad* y *coeficiente de expansión cúbica*, respectivamente.

**Módulos de compresibilidad y de dispersión.** La compresibilidad de un líquido se expresa por medio de su módulo de dispersión. El módulo de dispersión de un líquido y el módulo de compresibilidad son recíprocamente inversos. Si la presión de un líquido de volumen  $V$  se incrementa por  $dp$ , esto causará un decrecimiento en el volumen  $dV$ . El módulo de dispersión  $K$  se define por

$$K = \frac{dp}{-dV/V}$$

(Nótese que  $dV$  es negativo, de modo que  $-dV$  es positivo.) El módulo de dispersión del agua a la temperatura y presión ordinarias es aproximadamente  $2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , lo cual es igual a 2.1 GPa (gigapascal),  $2.14 \times 10^4 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ , o  $3 \times 10^5 \text{ lb}_f/\text{in}^2$ .

Es importante observar que todos los fluidos hidráulicos se combinan con el aire en cierta medida. De modo que en la determinación experimental del módulo de dispersión y el valor de éste, de cualquier líquido, depende de la cantidad de aire que contenga.

**Viscosidad.** La *viscosidad*, la propiedad más importante del fluido hidráulico, es una medida de la fricción interna o de la resistencia del fluido. Una viscosidad baja significa un incremento en las pérdidas por escurrimiento y una alta viscosidad implica una operación lenta. En los sistemas hidráulicos, las viscosidades disponibles están limitadas por las características de operación de la bomba, motor y válvulas, tanto como por las temperaturas del ambiente y de operación. La viscosidad de un líquido decrece con la temperatura.

La viscosidad se mide mediante la observación del tiempo requerido por un cierto volumen del líquido para fluir, en ciertas condiciones como enfrentarse a un tubo corto de orificio pequeño.

La resistencia causada por un fluido al movimiento relativo de sus partes se llama *viscosidad dinámica* o *absoluta*. Es relación de su esfuerzo cortante a la razón de cambio en la deformación cortante de un fluido. El coeficiente de viscosidad dinámica o absoluta  $\mu$  es la resistencia causada por una lámina del fluido al movimiento paralelo a esa lámina u otra lámina del fluido a una distancia unitaria de ella, con una velocidad relativa unitaria.

Las unidades del SI para la viscosidad dinámica son N-s/m<sup>2</sup> y kg/m-s. La unidad cgs de la viscosidad dinámica es el poise (P) (dyn-s/m<sup>2</sup> o g/cm-s). La unidad del SI diez veces mayor que la unidad poise. El centipoise (cP) es 1/100 de poise. (Nótese que la viscosidad dinámica del agua a 20.2°C o 68.4°F es 1 centipoise.) Las unidades BES de viscosidad dinámica son lbf-s/ft<sup>2</sup> y slug/ft-s. Nótese que

$$1 \text{ slug/ft-s} = 1 \text{ lbf-s/ft}^2 = 47.9 \text{ kg/m-s} = 47.9 \text{ N-s/m}^2$$

$$1 \text{ P} = 100 \text{ cP} = 0.1 \text{ N-s/m}^2$$

La *viscosidad cinemática*  $\nu$  es la viscosidad dividida entre la densidad de masa o

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa del fluido. La unidad en el SI de la viscosidad cinemática es m<sup>2</sup>/s, en tanto que la unidad cgs de la viscosidad cinemática es el stoke (St) (cm<sup>2</sup>/s) y 1/100 stoke se llama centistoke (cSt). La unidad BES de viscosidad cinemática es ft<sup>2</sup>/s. Al cambiar del stoke al poise, multiplique por la densidad de masa en g/cm<sup>3</sup>. Adviértase que

$$1 \text{ m}^2/\text{s} \text{ (Unidad en el SI de viscosidad cinemática)}$$

$$= 10.764 \text{ ft}^2/\text{s} \text{ (Unidad BES de energía cinemática)}$$

$$1 \text{ St} = 100 \text{ cSt} = 0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$$

La tabla 4-2 resume las unidades usadas para las viscosidades dinámica y cinemática en diferentes sistemas de unidades, y la tabla 4-3 muestra las viscosidades dinámica y cinemática del agua. Para aceites hidráulicos en condiciones de operación normales, la viscosidad cinemática es de alrededor de 5 a 10 centistokes ( $5 \times 10^{-6}$  a  $100 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ).

Los aceites de petróleo tienden a adelgazarse cuando la temperatura se incrementa y a engrosarse cuando la temperatura decrece. Si el sistema opera sobre una amplia escala de temperatura, debe usarse un fluido que tenga una sensibilidad relativamente menor a los cambios de temperatura.

**Tabla 4-2.** UNIDADES DE LAS VISCOSIDADES DINÁMICA Y CINEMÁTICA

Sistema de unidades Viscosidad	Sistemas absolutos			Sistemas gravitacionales	
	SI	mks	cgs	Métrico de ingeniería	Inglés de ingeniería
Viscosidad dinámica $\mu$	$\frac{\text{N-s}}{\text{m}^2}$ o $\frac{\text{kg}}{\text{m-s}}$	$\frac{\text{N-s}}{\text{m}^2}$ o $\frac{\text{kg}}{\text{m-s}}$	$\frac{\text{dyn-s}}{\text{cm}^2}$ o $\frac{\text{g}}{\text{cm-s}}$ (poise)	$\frac{\text{kg-f-s}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{lb-f-s}}{\text{ft}^2}$ o $\frac{\text{slug}}{\text{ft-s}}$
Viscosidad cinemática $\nu$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ (stoke)	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$\frac{\text{ft}^2}{\text{s}}$

**Algunas observaciones adicionales sobre los fluidos hidráulicos.** Para concluir esta sección, en seguida se hacen algunas observaciones adicionales.

1. Aunque los fluidos como el agua, el aceite crudo, los aceites vegetal o animal transmitirán potencia hidráulica, no deben usarse como fluidos hidráulicos por su falta de capacidad para lubricar correctamente y resistir asperezas, corrosión, jabonadura, etcétera.

2. La vida operativa de un fluido hidráulico depende de su resistencia a la oxidación. La oxidación del fluido hidráulico la causan el aire, el calor y la contaminación. Obsérvese que cualquier fluido hidráulico se combina con el aire en cierta medida, especialmente a altas temperaturas de operación. Nótese también que la temperatura de operación del sistema hidráulico debe conservarse entre 30 y 60°C. En temperaturas de operación por arriba de 70°C, la oxidación se acelera. Los fluidos de grado Premium usualmente contienen inhibidores que abaten la oxidación.

3. Cuando se opera a altas temperaturas, las propiedades importantes del fluido son la lubricidad, la viscosidad, la estabilidad térmica, el peso y el módulo de dispersión. (Adviértase que estas no son variables independientes.)

**Tabla 4-3.** VISCOSIDADES DINÁMICA Y CINEMÁTICA DEL AGUA

Temperatura	Viscosidad dinámica	Viscosidad cinemática
°C	$\mu \text{ N-s/m}^2$	$\nu \text{ m}^2/\text{s}$
0	$1.792 \times 10^{-3}$	$1.792 \times 10^{-6}$
20	$1.002 \times 10^{-3}$	$1.004 \times 10^{-6}$
40	$0.653 \times 10^{-3}$	$0.658 \times 10^{-6}$
60	$0.467 \times 10^{-3}$	$0.475 \times 10^{-6}$
80	$0.355 \times 10^{-3}$	$0.365 \times 10^{-6}$
100	$0.282 \times 10^{-3}$	$0.295 \times 10^{-6}$
°F	$\mu \text{ lb}_f\text{-s/ft}^2$	$\nu \text{ ft}^2/\text{s}$
32	$3.742 \times 10^{-5}$	$1.929 \times 10^{-5}$
100	$1.418 \times 10^{-5}$	$0.736 \times 10^{-5}$
212	$0.589 \times 10^{-5}$	$0.318 \times 10^{-5}$

4. En sistemas hidráulicos localizados cerca de fuentes de alta temperatura, deben usarse fluidos resistentes al fuego. Estos fluidos están disponibles en varios tipos generales, tales como agua glicolada, aceite sintético y emulsiones de agua y aceite. (En las emulsiones de agua y aceite, el aceite forma moléculas alrededor del agua para proveer la lubricidad.)

#### 4-4 LEYES BÁSICAS DEL FLUJO DE FLUIDOS

Aquí obtendremos las ecuaciones básicas que gobiernan el flujo de un fluido tales como las ecuaciones de continuidad, la ecuación de Euler y la ecuación de Bernoulli. Comenzaremos con definiciones del número de Reynolds, flujos laminar y turbulento, y otra terminología necesaria y luego obtendremos las ecuaciones.

**Número de Reynolds.** Las fuerzas que afectan el flujo de un fluido son debidas a la gravedad, la flotación, la inercia del fluido, la viscosidad, la tensión superficial y factores semejantes. En muchas situaciones de flujo, las fuerzas resultantes de la inercia del fluido y la viscosidad son las más significativas. De hecho, los flujos de fluido en muchas situaciones importantes están dominados ya sea por la inercia o por la viscosidad del fluido. La relación adimensional de la fuerza de inercia con respecto a la fuerza viscosa



se llama *número de Reynolds*. Así pues, un número de Reynolds grande indica el predominio de la fuerza de inercia y un número pequeño el predominio de la viscosidad. El número de Reynolds  $R$  está dado por

$$R = \frac{\rho v D}{\mu}$$

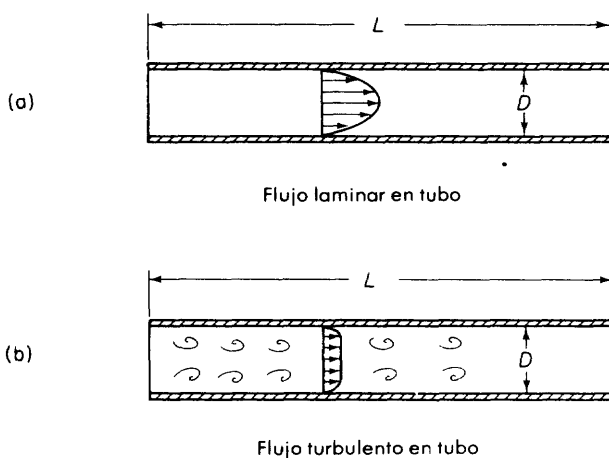
donde  $\rho$  es la densidad de masa del fluido,  $\mu$  la viscosidad dinámica,  $v$  la velocidad promedio del flujo y  $D$  una longitud característica. Para el flujo en tubos, la longitud característica es el diámetro interior del tubo. Puesto que la velocidad promedio  $v$  del flujo en un tubo es

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

donde  $Q$  es la razón de flujo volumétrico,  $A$  el área del tubo y  $D$  el diámetro interior del tubo, el número de Reynolds para el flujo en tubos puede darse por

$$R = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi \mu D}$$

**Flujo laminar y flujo turbulento.** El flujo dominado por la fuerza de viscosidad se llama *flujo laminar*. Esta caracterizado por un movimiento del flujo suave, según líneas paralelas. Cuando dominan las fuerzas de inercia, el flujo se llama *flujo turbulento* y está caracterizado por un movimiento del flujo irregular y como remolino. Para un número de Reynolds por abajo de 2000 o  $R < 2000$ , el flujo es siempre laminar. Para un número de Reynolds 4000 o  $R > 4000$ , el flujo es usualmente turbulento excepto en casos especiales.



**Fig. 4-17.** (a) Perfil de velocidad del flujo laminar; (b) perfil de velocidad del flujo turbulento.

En los tubos capilares el flujo es laminar. Si las velocidades se mantienen muy bajas o las viscosidades son muy altas, el flujo en tubos de diámetro relativamente grande puede resultar también un flujo laminar. En general, el flujo en un tubo es laminar si la sección transversal del conducto es comparativamente pequeña y/o la longitud del tubo es relativamente grande. De otro modo resulta el flujo turbulento. Debe notarse que el flujo laminar es sensible a la temperatura, ya que depende de la viscosidad.

En el flujo laminar, el perfil de velocidad en un tubo se hace parabólico como en la Fig. 4-17(a). La figura 4-17(b) muestra el perfil de velocidad en un tubo con flujo turbulento.

Los procesos industriales a menudo incluyen el flujo de líquidos a través de tubos de conexión y tanques. En los sistemas de control hidráulicos hay muchos casos de flujo a través de pequeños conductos tales como un flujo entre carrete y orificio y entre pistón y cilindro. Las propiedades de tal flujo a través de pequeños conductos depende del número de Reynolds del flujo involucrado en cada situación.

**Línea de corriente.** Una *línea de corriente* es una línea continua tendida a través del fluido de modo que tenga la dirección del vector velocidad en cada punto (Fig. 4-18). Por lo tanto, ningún flujo puede cruzar a una línea de corriente.

**Tubo de corriente.** Un *tubo de corriente* es el tubo hecho con todas las líneas de corriente que pasan por una curva cerrada (Fig. 4-19). Ningún flujo puede atravesar sus paredes porque el vector de velocidad no tiene componente normal a la superficie del tubo.

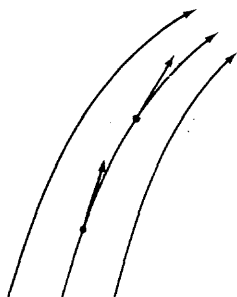


Fig. 4-18. Líneas de corriente.

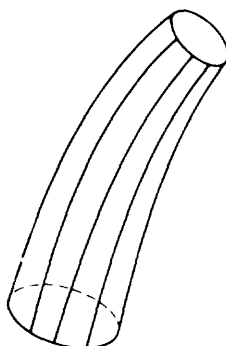


Fig. 4-19. Tubo de corriente.

**Flujo estable.** Si la presión, la velocidad, la densidad, la temperatura y factores similares en cualquier punto del flujo no cambian con el tiempo, se dice que el flujo es *estable*. Esto es, en flujo estable cualquier punto se man-

tiene constante en el espacio.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

donde  $p$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ , y  $T$  son la presión, el vector de velocidad, la densidad y la temperatura, respectivamente.

Se dice que el flujo es *inestable* si la condición en cualquier punto cambia con el tiempo. El análisis del flujo inestable es mucho más complejo que el del flujo estable.

**Volumen de control.** Un *volumen de control* se refiere a una región en el espacio. Aunque del todo arbitrario, el tamaño y la forma del volumen de control frecuentemente se escogen con el objeto de simplificar el análisis. El uso de un volumen de control es conveniente en el análisis de situaciones donde el flujo ocurre adentro y afuera del espacio.

**Ecuaciones de continuidad.** Las ecuaciones de continuidad se obtienen aplicando el principio de conservación de la masa del flujo. Este principio establece que la masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo.

Las ecuaciones de continuidad para un volumen de control establecen que la razón de incremento con respecto al tiempo de la masa dentro de un volumen de control es igual a la razón de cambio neto de masa que fluye hacia el volumen de control.

Considérese un flujo estable a través del tubo de corriente mostrado en la Fig. 4-20(a), donde el volumen de control constituye las paredes del tubo de corriente y las secciones transversales  $dA_1$  y  $dA_2$  que son normales al

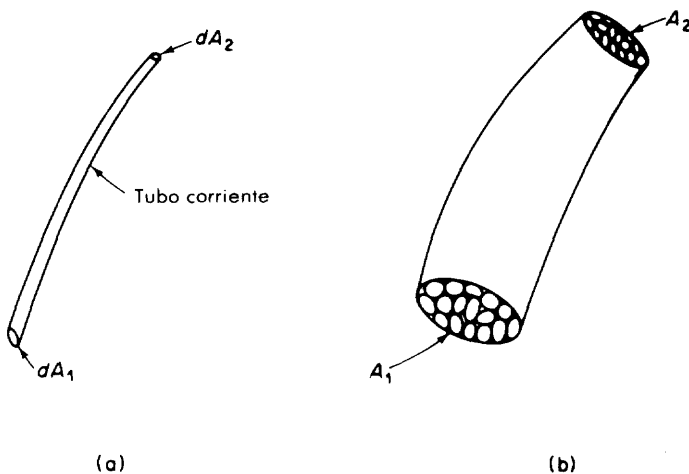


Fig. 4-20. (a) Tubo de corriente; (b) conjunto de tubos de corriente.

tubo de corriente. Si definimos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  como las densidades de masa en las secciones transversales  $dA_1$  y  $dA_2$ , respectivamente, entonces al aplicar el principio de conservación de masa, obtenemos

$$\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2$$

Esta es la ecuación de continuidad aplicada a dos secciones transversales a lo largo de un tubo de corriente en flujo estable.

En una colección de tubos de corriente como se muestra en la Fig. 4-20(b), si las densidades promedio son  $\rho_1$  y  $\rho_2$  sobre las secciones transversales  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente, y las velocidades promedio son  $V_1$  y  $V_2$  sobre las secciones transversales  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente, entonces,

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

donde

$$V_1 = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} v_1 dA_1, \quad V_2 = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} v_2 dA_2$$

Definiendo las descargas  $Q_1$  y  $Q_2$  como

$$Q_1 = A_1 V_1, \quad Q_2 = A_2 V_2$$

podemos escribir la ecuación de continuidad como

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$$

Para flujo estable incompresible, tenemos  $\rho_1 = \rho_2$ . Por lo tanto,

$$Q_1 = Q_2$$

o bien

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Esto significa que la razón de cambio del flujo de un líquido en un tubo es constante en cualquier sección transversal.

**Ecuación de movimiento de Euler.** Considérese un tubo de corriente infinitesimal de longitud  $ds$  como se muestra en la Fig. 4-21. Considérese también el volumen de control compuesto por la pared del tubo de corriente entre las secciones 1 y 2 más las áreas de las secciones 1 y 2 que son normales al tubo de corriente. Fijemos este volumen de control en el espacio y consideremos el flujo que lo atraviesa. Para simplificar el análisis, supongamos que la viscosidad es cero o que el fluido no tiene fricción.

La masa del fluido en el volumen de control es  $\rho dA ds$  y la aceleración de esta masa es  $dv/dt$ . La fuerza de presión que actúa sobre la sección 1 en la dirección positiva de  $s$  es  $p dA$  y la que actúa en la sección 2 en la dirección negativa de  $s$  es  $p + (\partial p/\partial s)ds dA$ . La fuerza de gravedad es  $\rho g dA ds$ . Cualesquiera fuerzas sobre los lados del volumen de control son normales a

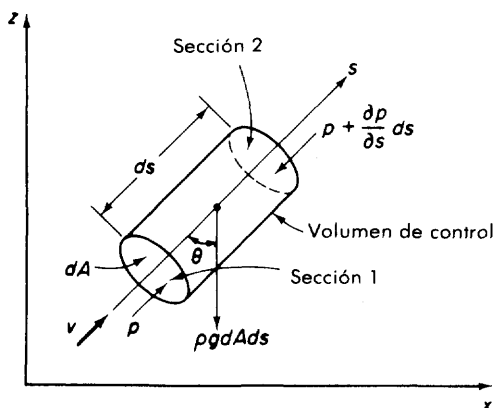


Fig. 4-21. Tubo de corriente infinitesimal de longitud  $ds$ .

$s$  y no participan en la ecuación. Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos la ecuación de movimiento

$$m \frac{dv}{dt} = p dA - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA - \rho g dA ds \cos \theta$$

donde  $m = \rho dA ds$ . So

$$\rho dA ds \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial s} ds dA - \rho g dA ds \cos \theta$$

o bien

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta \quad (4-1)$$

En general, la velocidad  $v$  de  $s$  y  $t$ , o  $v = v(s, t)$ . Por lo tanto,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4-2)$$

Al sustituir la Ec. (4-2) en la Ec. (4-1), encontramos

$$v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta$$

Y observando que  $\cos \theta = \partial z / \partial s$ , donde  $z$  es el desplazamiento vertical, esta última ecuación puede escribirse

$$v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad (4-3)$$

la cual es la ecuación de movimiento de Euler.

El flujo estable,  $\partial v / \partial t = 0$ , y la Ec. (4-3) se simplifica a

$$v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

El flujo estable, puesto que  $v$ ,  $p$  y  $z$  son funciones de  $s$ , sólo la última

ecuación puede reescribirse como

$$v \frac{dv}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + g \frac{dz}{ds} = 0$$

o bien

$$v dv + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0 \quad (4-4)$$

la cual es la *ecuación de Euler de movimiento en flujo estable*.

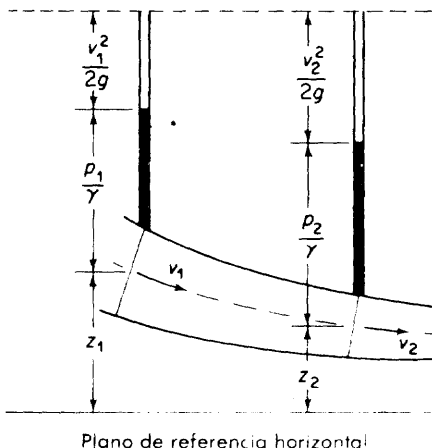
**Ecuación de Bernoulli.** Para flujo estable, sin fricción (significa que el flujo tiene viscosidad despreciable) e incompresible, la Ec. (4-4) puede ser integrada para dar

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante} \quad (4-5)$$

Esta ecuación es la ecuación de energía para el flujo estable a través de un volumen de control. Al dividir ambos lados de la Ec. (4-5) entre  $g$ , tenemos.

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{constante} \quad (4-6)$$

donde  $\gamma = \rho g$ . Esta ecuación se llama *ecuación de Bernoulli*. Cada uno de sus términos tiene la dimensión de longitud. La ecuación (4-6) muestra que a lo largo de un tubo de corriente la suma de la velocidad  $v^2/(2g)$ , la presión  $p/\gamma$  y la altura potencial  $z$  es constante (Fig. 4-22). Si la velocidad en alguna sección se incrementa, la presión de altura más la altura potencial deben decrecer y viceversa; estos es, la altura total en todas las secciones es constante.



**Fig. 4-22.** Diagrama para ilustrar que la suma de la altura de velocidad, la altura de presión y la altura potencial es constante-ecuación de Bernoulli.

Para el flujo inestable, la Ec. (4-3) puede reescribirse como

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

La integración de esta última ecuación a lo largo del tubo de corriente resulta

$$\int_0^s \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}$$

En la secciones transversales 1 y 2, obtenemos

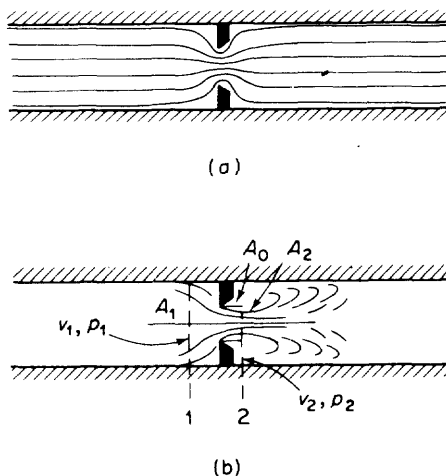
$$\int_0^{s_1} \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \int_0^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$

o bien

$$\left( \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) - \left( \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (4-7)$$

La ecuación (4-7) se llama *ecuación de energía para el flujo inestable* a través de un volumen de control.

**Flujo a través de un orificio.** Un *orificio* es una restricción súbita de corta longitud en un conducto de flujo. Existen dos tipos de régimen de flujo, dependiendo de que dominen las fuerzas viscosas o las de inercia [Fig. (4-23(a) y (b))]. A causa de la ley de continuidad, la velocidad del flujo a través de un orificio debe incrementarse por arriba de la velocidad corriente arriba.



**Fig. 4-23.** (a) Flujo a través de un orificio cuando el número de Reynolds es bajo; (b) flujo a través de un orificio cuando el número de Reynolds es alto.

En la Fig. 4-23(a) la caída de presión se origina por las fuerzas cortantes internas que resultan de la viscosidad. Esta situación ocurre cuando el

número de Reynolds es bajo. La figura 4-23(b) muestra el caso donde la caída de presión a través del orificio se origina por la aceleración del fluido de la velocidad corriente arriba a la velocidad del chorro más alta. La situación aparece aquí cuando el número de Reynolds es alto. El flujo corriente abajo se hace turbulento. Puesto que los flujos de orificio más importantes ocurren como en la Fig. 4-23(b), a continuación consideraremos este caso en detalle.

En relación con la Fig. 4-23(b), la velocidad del fluido se incrementa a velocidad de chorro entre las secciones 1 y 2. El área del chorro emitido es menor que el área del orificio. El punto a lo largo del chorro donde el área del chorro se hace mínima se llama *vena contracta*. La relación entre el área de la corriente  $A_2$  en la vena contracta y el área del orificio  $A_0$  se llama *coeficiente de contracción*  $C_c$ , o sea

$$A_2 = C_c A_0$$

Puesto que el flujo entre las secciones 1 y 2 es de línea de corriente, puede aplicarse la ecuación de Bernoulli. De la Ec. (4-6) obtenemos, en las secciones 1 y 2, la ecuación

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (4-8)$$

Si suponemos  $z_1 = z_2$ , entonces la Ec. (4-8) se hace

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2g}{\gamma}(p_1 - p_2) \quad (4-9)$$

De la ecuación de continuidad, tenemos

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (4-10)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son las áreas de la corriente en las secciones 1 y 2, respectivamente.

Utilizando las Ecs. (4-9) y (4-10), encontramos

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_1 - p_2)}$$

Entonces la razón del flujo volumétrico en la vena contracta es

$$\begin{aligned} v_2 A_2 &= \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_1 - p_2)} \\ &= \frac{C_c A_0}{\sqrt{1 - (C_c^2 A_0^2/A_1^2)}} \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_1 - p_2)} \end{aligned} \quad (4-11)$$

La ecuación (4-11) da la razón de flujo a través del orificio. Sin embargo, esto es aproximado porque la fricción viscosa del fluido no fue considerada. Para tomar en cuenta la fricción viscosa despreciada, se introduce un factor empírico llamado *coeficiente de velocidad*  $C_v$  para dar la razón de flujo  $Q$ :

$$Q = C_v v_2 A_2$$



o bien

$$Q = \frac{C_v C_c A_0}{\sqrt{1 - (C_c^2 A_0^2 / A_1^2)}} \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_1 - p_2)} = c A_0 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_1 - p_2)} \quad (4-12)$$

donde  $c$ , el coeficiente de descarga, es

$$c = \frac{C_v C_c}{\sqrt{1 - (C_c^2 A_0^2 / A_1^2)}}$$

El valor del coeficiente de descarga  $c$  casi siempre se obtiene en forma experimental.

En el caso de las válvulas hidráulicas donde el área de estrangulamiento se ajusta para controlar la presión y la razón de flujo, la Ec. (4-12) sirve como una ecuación básica.

**Comentarios.** En conclusión, nos gustaría mencionar que las pérdidas por fricción excesivas en las líneas hidráulicas deben evitarse. Cuando un fluido fluye en una línea hidráulica, algo de la energía que se transfiere, se pierde en la forma de energía calorífica que resulta de la fricción. Al diseñar líneas hidráulicas deben eliminarse las causas de fricción excesiva, tales como demasiada longitud de las líneas, un número grande de curvas (o codos), accesorios y válvulas, la velocidad del fluido excesiva como resultado de líneas subdimensionales y la excesiva viscosidad del fluido.

#### 4-5 ELABORACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS (MODELADO MATEMÁTICO) DE SISTEMAS HIDRÁULICOS

Los procesos industriales a menudo incluyen sistemas que constan de tanques llenos de líquido conectados por tubos con orificios, válvulas y otros dispositivos que restringen el flujo. Las características dinámicas de tales sistemas pueden analizarse mediante el uso de las leyes fundamentales (Sec. 4-4) que gobiernan el flujo de los líquidos. En esta sección trataremos el modelado matemático de los sistemas hidráulicos. (El modelado matemático de una válvula hidráulica se expone en la Sec. 4-6 y los detalles del modelado de controladores hidráulicos en el capítulo 8.)

En los capítulos 2 y 3 se estableció que existen tres tipos de elementos básicos en los sistemas mecánicos y eléctricos: elementos de inercia, elementos de resorte y elementos amortiguadores para los sistemas mecánicos; elementos resistivos, elementos capacitivos y elementos inductivos para sistemas eléctricos. Al igual que en los sistemas mecánicos y eléctricos, hay tres tipos de elementos básicos en los sistemas hidráulicos que aquí nos atañen: elementos resistivos, elementos capacitivos y elementos de inercia. [Nótese que los términos *inercia*, *inductancia* e *inertancia* representan efectos de inercia de los sistemas. El término *inercia* se usa en los sistemas mecánicos,

el término *inductancia* en los sistemas eléctricos y el término *inertancia* en los sistemas de fluidos (hidráulico y neumático)].

Comenzaremos esta sección con exposiciones sobre un líquido que fluye desde un orificio en la pared de un tanque, seguidas por definiciones de resistencia, capacitancia e inertancia de los sistemas hidráulicos. Luego obtendremos modelos matemáticos de sistemas de nivel de líquido en términos de la resistencia y la capacitancia. La sección concluirá con un análisis de respuesta simple de sistemas de nivel de líquido.

**Flujo desde un orificio en la pared de un tanque.** Considérese el flujo de un líquido a través de un orificio en la pared de un tanque. En relación con el sistema de nivel de líquido de la Fig. 4-24, supóngase que el líquido con viscosidad pequeña o despreciable chorrea por el orificio y que el flujo es turbulento. La sección transversal del chorro es menor que el área del orificio. La sección transversal donde la contracción es mayor es la vena contracta. Las líneas de corriente son paralelas a lo largo del chorro en esta sección y la presión es la atmosférica.

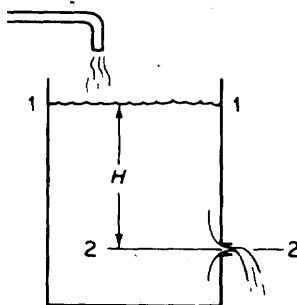


Fig. 4-24. Sistema de nivel líquido.

Denotemos por  $H$  la altura al nivel del orificio que se mide desde el centro del orificio hasta la superficie libre y se supone constante.

Si aplicamos la ecuación de Bernoulli desde la superficie libre (nivel 1-1) hasta el centro de la vena contracta (nivel 2-2), entonces

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Escojamos la presión atmosférica como presión de referencia y el nivel 2-2 como elevación de referencia. Al sustituir  $v_1 = 0$ ,  $p_1 = 0$ ,  $z_1 = H$ , y  $z_2 = 0$  en esta última ecuación, tenemos

$$H = \frac{v_2^2}{2g}$$

o bien

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

Como resultado de la fricción del líquido (debida a la viscosidad) en el orificio, la velocidad real es de 1 a 2% menor que la obtenida por esta última ecuación. Para tomar las pérdidas por fricción, generalmente introducimos el coeficiente de velocidad  $C_v$ . La descarga real  $Q$  desde el orificio es el producto de la velocidad real de la vena contracta y el área del chorro. En términos del coeficiente de contracción  $C_c$  o

o bien

$$C_c = \frac{A_2}{A_0}$$

donde  $A_0$  es el área del orificio y  $A_2$  es el área del chorro, la descarga real puede darse como

$$Q = C_v C_c A_0 \sqrt{2gH} = c A_0 \sqrt{2gH} \quad (4-13)$$

donde  $c = C_v C_c$  es el coeficiente de descarga.

El orificio estándar para propósito de medición o regulación es el orificio de borde afilado u orificio de placa delgada. El valor del coeficiente de descarga de estos orificios es alrededor de 0.61.

**Resistencia.** La *resistencia* de un elemento físico (ya sea mecánico, eléctrico, hidráulico o neumático) puede definirse como el cambio en potencial requerido para producir un cambio unitario en la corriente, razón de flujo o velocidad, o bien

$$\text{Resistencia} = \frac{\text{cambio en potencial}}{\text{cambio en corriente, razón de flujo o velocidad}}$$

En flujo líquido en tubos, orificios, válvulas o cualesquier otro dispositivo restrictor de flujo, el potencial puede corresponder ya sea a la presión diferencial ( $\text{N/m}^2$ ) (diferencia de presión entre la corriente arriba y la corriente abajo en un dispositivo restrictor de flujo) o altura diferencial (m), y la razón de flujo puede ser la razón de flujo líquido ( $\text{m}^3/\text{s}$ ). Al aplicar la definición general precedente de resistencia a un flujo líquido, tenemos

$$\text{Resistencia } R = \frac{\text{cambio de potencial}}{\text{cambio en presión diferencial}} \frac{\text{N/m}^2}{\text{m}^3/\text{s}} \text{ o } \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^5}$$

o bien

$$\text{Resistencia } R = \frac{\text{cambio en altura diferencial}}{\text{cambio en razón de flujo}} \frac{\text{m}}{\text{m}^3/\text{s}} \text{ o } \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$$

**Ejemplo 4-1.** Considérese el sistema mostrado en la Fig. 4-25(a) y (b). En la parte (a) el orificio en un tubo de conexión restringe el flujo. De igual forma, en la parte (b), la válvula en un tubo también restringe el flujo. Las propiedades dinámicas de tal sistema no dependen de la construcción física del dispositivo que causa la restricción. En consecuencia, estos dos sistemas pueden tratarse en forma semejante definiendo la resistencia del flujo a través de un orificio o válvula en un tubo.

En relación con la Fig. 4-25(b), escojamos la altura como una medida del potencial.

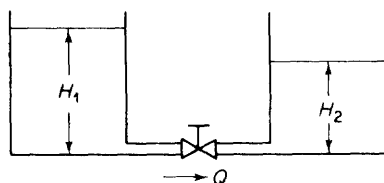
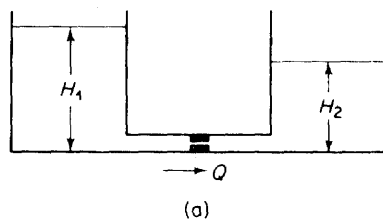


Fig. 4-25. Sistema de nivel líquido.

Entonces la resistencia puede definirse como el cambio en la altura diferencial necesario para causar un cambio unitario en la razón de flujo o

$$\begin{aligned} \text{Resistencia } R &= \frac{\text{cambio en la altura diferencial}}{\text{cambio en la razón de flujo}} \frac{\text{m}}{\text{m}^3/\text{s}} \\ &= \frac{d(H_1 - H_2)}{dQ} \quad \text{s/m}^2 \end{aligned}$$

La resistencia del flujo líquido depende de las condiciones del flujo (flujo laminar y flujo turbulento). Consideremos primero la resistencia del flujo laminar.

En el flujo laminar, la razón de flujo  $Q \text{ m}^3/\text{s}$  y la altura diferencial  $(H_1 - H_2) \text{ m}$  son proporcionales o

$$Q = K_l(H_1 - H_2)$$

donde  $K_l$  es una constante de proporcionalidad. Por lo tanto, la resistencia del flujo laminar  $R_l$  puede darse por

$$R_l = \frac{d(H_1 - H_2)}{dQ} = \frac{H_1 - H_2}{Q} = \frac{1}{K_l} \quad \text{s/m}^2$$

Nótese que la resistencia del flujo laminar es constante.

Al considerar el flujo laminar a través de un tubo cilíndrico, la relación entre la altura diferencia  $h (= H_1 - H_2) \text{ m}$  y la razón de flujo  $Q \text{ m}^3/\text{s}$  está dada por la fórmula de Hagen-Poiseuille

$$h = \frac{128\nu L}{g\pi D^4} Q$$

donde

$\nu$  = viscosidad cinemática,  $\text{m}^2/\text{s}$

$L$  = longitud del tubo, m

$D$  = diámetro del tubo, m

Por lo tanto, la resistencia del flujo laminar  $R_l$  para el flujo líquido a través de tubos cilíndricos está dada por

$$R_l = \frac{dh}{dQ} = \frac{128\nu L}{g\pi D^4} \text{ s/m}^2$$

En la práctica, debe notarse que el flujo laminar en los tubos raramente ocurre en los procesos industriales.

Pasemos a continuación a la resistencia del flujo turbulento  $R_t$ . Para el flujo turbulento, en relación con la Ec. (4-12) o (4-13), la razón de flujo a través de la restricción puede darse por

$$Q = K_t \sqrt{H_1 - H_2} \quad (4-14)$$

donde  $K_t$  es una constante. Puesto que  $Q$  y  $(H_1 - H_2)$  están relacionadas por una ecuación no lineal, la resistencia del flujo turbulento  $R_t$  no es constante. De la Ec. (4-14) tenemos

$$\frac{d(H_1 - H_2)}{dQ} = \frac{2(H_1 - H_2)}{Q}$$

La resistencia del flujo turbulento  $R_t$  está dada por

$$R_t = \frac{d(H_1 - H_2)}{dQ} = \frac{2(H_1 - H_2)}{Q}$$

El hecho de que la resistencia del flujo turbulento  $R_t$  no sea constante sino que dependa de la razón de flujo  $Q$  y de la altura diferencial  $(H_1 - H_2)$  significa que debemos definirla mediante una condición de operación (como la razón de flujo y la altura diferencial) y usar este valor de la resistencia solamente en la vecindad de la condición de operación.

**Capacitancia.** La *capacitancia* de un elemento físico puede definirse como el cambio en la cantidad de material o distancia requerido para producir un cambio unitario en potencial o

$$\text{Capacitancia} = \frac{\text{cambio en cantidad de material o distancia}}{\text{cambio en potencial}}$$

En un sistema de tanque lleno de líquido, la cantidad de material puede ser el volumen del líquido ( $\text{m}^3$ ), y el potencial puede ser, ya sea la presión ( $\text{N/m}^2$ ) o la altura (m). Si aplicamos la definición general precedente de la capacitancia al sistema del tanque lleno de líquido, el resultado es

$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{cambio en la cantidad de líquido}}{\text{cambio en presión}} \quad \frac{\text{m}^3}{\text{N/m}^2} \text{ o } \frac{\text{m}^3}{\text{N}}$$

o bien

$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{cambio en la cantidad de líquido}}{\text{cambio en la altura}} \quad \frac{\text{m}^3}{\text{m}} \text{ o } \text{m}^2$$

Al obtener modelos matemáticos del sistema, tanque lleno de líquido, es conveniente escoger la altura como una medida del potencial, puesto que con esta selección la capacitancia del tanque lleno de líquido coincide con el área de la sección transversal del tanque. Si ésta es constante, la capacitancia

cia es constante para cualquier altura. Debe notarse que la capacitancia ( $m^2$ ) es diferente de la capacidad ( $m^3$ ).

**Inertancia.** Los términos *inertancia*, *inercia* e *inductancia* se refieren al cambio en potencial necesario para producir una razón de cambio unitaria en la razón de flujo, la velocidad o la corriente [cambio en la razón de flujo por segundo, cambio en la velocidad por segundo (aceleración), o cambio en la corriente por segundo], o bien

Inertancia (inercia o inductancia)

$$= \frac{\text{cambio en el potencial}}{\text{cambio en la razón de flujo (velocidad o corriente) por segundo}}$$

Para el efecto de inercia en el flujo de líquidos en tubos y dispositivos semejantes, el potencial puede ser aún la presión ( $N/m^2$ ) o la altura (m), y el cambio en la razón de flujo por segundo puede ser la aceleración del flujo líquido volumétrico ( $m^2/s^2$ ). La aplicación de la definición general precedente de inertancia, inercia o inductancia da

$$\text{Inertancia } I = \frac{\text{cambio en presión}}{\text{cambio en la razón de flujo por segundo}} \frac{N/m^2}{m^3/s^2} \text{ o } \frac{N \cdot s^2}{m^5}$$

o bien

$$\text{Inertancia } I = \frac{\text{cambio en la altura}}{\text{cambio en la razón de flujo por segundo}} \frac{m}{m^3/s^2} \text{ o } \frac{s^2}{m^2}$$

**Ejemplo 4-2.** Considérese un flujo de un líquido en una tubería. La inertancia del flujo líquido es la diferencia de potencial (ya sea diferencia de presión o diferencia de altura) entre dos secciones en el tubo, requerida para causar una razón de cambio unitaria en la razón de flujo (una aceleración de flujo volumétrico unitaria).

Supóngase que el área de la sección transversal de un tubo es constante e igual a  $A \text{ m}^2$  y que la diferencia de presión entre dos secciones en el tubo es  $\Delta p \text{ N/m}^2$ . Entonces la fuerza  $A \Delta p$  acelerará el líquido entre las dos secciones o

$$M \frac{dv}{dt} = A \Delta p$$

donde  $M \text{ kg}$  es la masa del líquido en el tubo entre las dos secciones y  $v \text{ m/s}$  es la velocidad del flujo líquido. Nótese que la masa  $M$  es igual a  $\rho AL$ , donde  $\rho \text{ kg/m}^3$  es la densidad y  $L$  es la distancia entre las dos secciones consideradas. Por lo tanto, la última ecuación puede escribirse

$$\rho AL \frac{dv}{dt} = A \Delta p$$

Observando que  $Av \text{ m}^3/\text{s}$  es la razón de flujo volumétrico y definiendo  $Q = Av \text{ m}^3/\text{s}$ , podemos reescribir esta última ecuación como

$$\frac{\rho L}{A} \frac{dQ}{dt} = \Delta p \quad (4-15)$$

Si la presión ( $\text{N/m}^2$ ) se escoge como medida del potencial, entonces la inercancia  $I$  del flujo líquido se obtiene como

$$\text{Inercancia del flujo líquido } I = \frac{\Delta p}{dQ/dt} = \frac{\rho L}{A} \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^5}$$

Si la altura (m) se escoge como medida del potencial, entonces, observando que  $\Delta p = \Delta h \rho g$ , donde  $\Delta h$  es la altura diferencial, la Ec. (4-15) se hace

$$\frac{\rho L}{A} \frac{dQ}{dt} = \Delta h \rho g$$

o bien

$$\frac{L}{Ag} \frac{dQ}{dt} = \Delta h$$

En consecuencia,

$$\text{Inercancia del flujo líquido } I = \frac{\Delta h}{dQ/dt} = \frac{L}{Ag} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}$$

Con el objeto de ilustrar el cálculo de la inercancia del flujo líquido, considérese el flujo de agua a través de un tubo, el área cuya sección transversal es constante y es de  $1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  y donde hay dos secciones separadas 15 m. Entonces,

$$I = \frac{\rho L}{A} = \frac{1000 \times 15 \text{ kg m}}{1 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ m}^2} = 1.5 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^5$$

o bien

$$I = \frac{L}{Ag} = \frac{15}{1 \times 10^{-3} \times 9.81} \frac{\text{m}}{\text{m}^2 \text{ m}} = 1529 \text{ s}^2/\text{m}^2$$

Esto significa que si hay una altura diferencial de 1 m entre las dos secciones que están separadas 15 m, la aceleración del flujo de agua volumétrico  $dQ/dt$  es

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta h}{I} = \frac{\Delta h}{L/Ag} = \frac{1}{1529} = 0.000654 \text{ m}^3/\text{s}^2$$

### Comentarios.

1. Al obtener modelos matemáticos de sistemas hidráulicos en términos de la resistencia, la capacitancia y la inercancia, estas cantidades deben expresarse en unidades consistentes. Por ejemplo, si escogemos presión ( $\text{N/m}^2$ ,  $\text{kg}_f/\text{cm}^2$ ,  $\text{lb}_f/\text{in}^2$ , etc.) o altura (m, cm, in, etc.) como una medida de potencial, la misma unidad de medida de potencial debe usarse para expresar resistencia, capacitancia e inercancia. Un comentario semejante se aplica a la razón de flujo líquido ( $\text{m}^3/\text{s}$ ,  $\text{cm}^3/\text{s}$ ,  $\text{in}^3/\text{s}$ , etc.). En la medida que usemos unidades consistentes, el modelo matemático permanece igual.

2. La capacitancia del líquido y la inercancia del flujo líquido almacenan energía como resultado de la presión y el flujo, respectivamente, y la resistencia del flujo líquido disipa energía.

3. Los elementos de inercia en los sistemas mecánicos y los elementos inductivos en los sistemas eléctricos son elementos importantes para describir la dinámica del sistema. Sin embargo, al obtener modelos matemáticos de tanques llenos de líquido conectados por tubos con orificios, válvulas, et-

cétera, sólo la resistencia y la capacitancia son importantes, y los efectos de la inercancia del flujo líquido pueden ser despreciables. Tal inercancia del flujo líquido se hace importante sólo en casos especiales. Por ejemplo, juega un papel dominante en la vibración transmitida a través del agua, tal como el martilleo del agua que resulta de los efectos de la inercia del flujo de agua en tubos y los efectos elásticos o de capacitancia del flujo del agua en tubos. Nótese que esta vibración o propagación de ondas resulta de los efectos de inercancia-capacitancia de los circuitos hidráulicos (comparables a la vibración libre en un sistema mecánico masa-resorte o la oscilación libre en un circuito eléctrico  $LC$ ).

### Elaboración de modelos matemáticos para sistemas de nivel de líquido.

Volviendo al sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4-26(a), obtenemos un modelo matemático. Si la oscilación de operación consiste en que

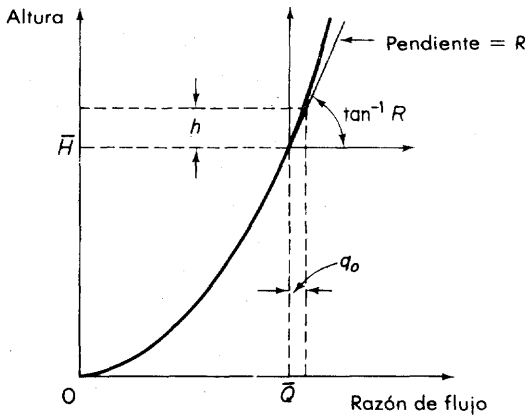
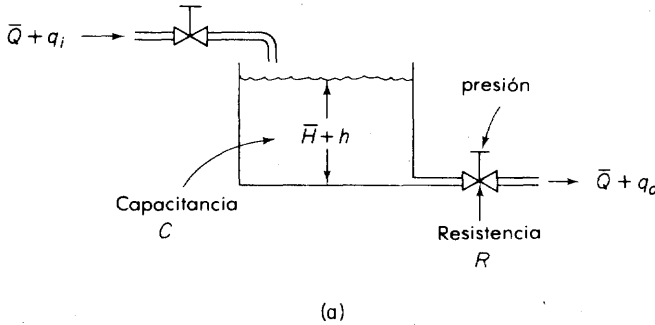


Fig. 4-26. (a) Sistema de nivel líquido; (b) curva altura contra razón de flujo.



la altura y la razón de flujo varían poco respecto al periodo de tiempo considerado, puede encontrarse fácilmente un modelo matemático en términos de la resistencia y la capacitancia. En el presente análisis suponemos que el líquido que fluye de la válvula es turbulento.

Definamos

$\bar{H}$  = altura en estado estable (antes de ocurrir cualquier cambio), m

$h$  = pequeña desviación de la altura de su valor en estado estable, m

$\bar{Q}$  = razón de flujo en estado estable (antes de ocurrir cualquier cambio), m<sup>3</sup>/s

$q_i$  = pequeña desviación de la razón de flujo de entrada de su valor en estado estable, m<sup>3</sup>/s

$q_o$  = pequeña desviación de la razón de salida de su valor en estado estable, m<sup>3</sup>/s

El cambio en el líquido almacenado en el tanque durante  $dt$  segundos es igual al flujo de entrada neto al tanque durante los mismos  $dt$  segundos y, por lo tanto,

$$C dh = (q_i - q_o) dt \quad (4-16)$$

donde  $C$  es la capacidad del tanque.

La resistencia  $R$  del flujo líquido a través de una válvula es, por definición,

$$R = \frac{dH}{dQ}$$

donde, para el flujo turbulento,  $Q$  está relacionado con  $H$  por

$$Q = K\sqrt{H}$$

Puesto que la razón de flujo  $Q$  es proporcional a la raíz cuadrada de la altura  $H$ , el valor de la resistencia  $R$  no es constante. En situaciones prácticas, aunque la ecuación exacta que relaciona altura y razón de flujo puede no ser conocida, puede disponerse de una curva experimental que relacione altura y razón de flujo. Considérese la curva de altura contra razón de flujo mostrada en la Fig. 4-26(b), la cual puede ser o bien experimental o bien teórica. La resistencia  $R$  en el punto de operación ( $H = \bar{H}$ ,  $Q = \bar{Q}$ ) es igual a la pendiente de la curva en ese punto, la cual es igual a  $2\bar{H}/\bar{Q}$ . (Cuando el punto de operación se mueve, está claro que el valor de la resistencia  $R$  cambia.)

Nótese que si la condición de operación varía un poco, esto es, si los cambios en altura y razón de flujo son pequeños durante el periodo de operación considerado, entonces el valor de la resistencia  $R$  puede considerarse constante durante el periodo de operación entero y el sistema puede ser linealizado usando un valor de resistencia promedio.

En el presente sistema definimos  $h$  y  $q_o$  como pequeñas desviaciones de la altura en estado estable y de la razón de cambio de salida en estado es-

table, respectivamente. Así,

$$dH = h, \quad dQ = q_o$$

Y la resistencia promedio  $R$  puede escribirse como

$$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{h}{q_o}$$

Al sustituir  $q_o = h/R$  en la Ec. (4-16), obtenemos

$$C \frac{dh}{dt} = q_i - \frac{h}{R}$$

o bien

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (4-17)$$

Nótese que  $RC$  tiene la dimensión del tiempo y es la constante de tiempo del sistema. La ecuación (4-17) es un modelo linealizado del sistema cuando  $h$  se considera la salida del sistema. Es válido tal modelo matemático linealizado con tal que los cambios en la altura y en la razón de flujo de sus respectivos valores en estado estable sean pequeños.

Si  $q_o$  (el cambio en la razón del flujo de salida) se considera la salida del sistema en vez de  $h$  (el cambio en altura), entonces se puede obtener otro modelo matemático. Sustituyendo  $h = Rq_o$  en la Ec. (4-17) da

$$RC \frac{dq_o}{dt} + q_o = q_i \quad (4-18)$$

la cual es también un modelo matemático linealizado del sistema.

Obsérvese que el sistema de nivel de líquido es análogo al sistema eléctrico mostrado en la Fig. 4-27. Un modelo matemático para este último es

$$RC \frac{de_o}{dt} + e_o = e_i \quad (4-19)$$

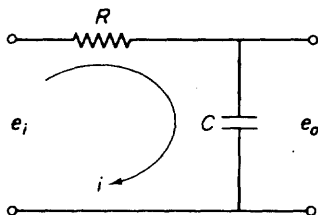


Fig. 4-27. Sistema eléctrico análogo al sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4.26(a).

Comparando las Ecs. (4-18) y (4-19), vemos que son de la misma forma y por lo tanto, son análogos.

**Ejemplo 4-3.** En relación con el sistema de nivel de líquido de la Fig. 4-26(a), supóngase que el tanque es circular con radio de 1.7 m y que la condición de operación en

estado estable corresponde a

$$\bar{H} = 2 \text{ m}, \quad \bar{Q} = 0.5 \text{ m}^3/\text{min}$$

Cuando la razón de flujo de entrada se cambia de  $0.5 \text{ m}^3/\text{min}$  a  $0.6 \text{ m}^3/\text{min}$  (o  $q_i = 0.1 \text{ m}^3/\text{min}$ ), ¿cuál es el cambio  $h$  en la altura como función del tiempo?

Puesto que  $\bar{Q} \approx \bar{H}$  están relacionadas por

$$\bar{Q} = K\sqrt{\bar{H}}$$

el coeficiente  $K$  se determina por

$$0.5 = K\sqrt{2}$$

como

$$K = 0.3536$$

La nueva altura en estado estable  $\bar{H} + h(\infty)$  debida al cambio en la razón de flujo de entrada puede encontrarse por

$$\bar{Q} + q_i = K\sqrt{\bar{H} + h(\infty)}$$

como

$$\bar{H} + h(\infty) = \left( \frac{\bar{Q} + q_i}{K} \right)^2 = \left( \frac{0.6}{0.3536} \right)^2 = 2.88$$

De modo que la resistencia promedio  $R$  para el periodo transitorio es

$$R = \frac{d\bar{H}}{d\bar{Q}} = \frac{[\bar{H} + h(\infty)] - \bar{H}}{(\bar{Q} + q_i) - \bar{Q}} = \frac{2.88 - 2}{0.6 - 0.5} = 8.8 \text{ min/m}^2$$

La capacitancia  $C$  es la misma que el área de la superficie del tanque,  $9.08 \text{ m}^2$ . El modelo matemático del sistema definido por la Ec. (4-17) se hace ahora

$$8.8 \times 9.08 \frac{dh}{dt} + h = 8.8 \times 0.1$$

o también

$$79.9 \frac{dh}{dt} + h = 0.88 \quad (4-20)$$

Nótese que la condición inicial es  $h(0) = 0$ .

Definamos  $x = h - 0.88$ . Entonces la Ec. (4-20) se hace

$$79.9 \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad x(0) = -0.88$$

Al suponer que la solución  $x(t)$  es

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

obtenemos

$$79.9\lambda Ae^{\lambda t} + Ae^{\lambda t} = 0$$

La ecuación característica es entonces

$$79.9\lambda + 1 = 0$$

de la cual

$$\lambda = -\frac{1}{79.9}$$

También, a partir de la condición inicial

$$x(0) = A = -0.88$$

y se infiere que

$$x(t) = -0.88e^{-(1/79.9)t}$$

En consecuencia,  $h(t)$  puede obtenerse como

$$h(t) = x(t) + 0.88 = 0.88[1 - e^{-(1/79.9)t}]$$

Esta ecuación da el cambio en altura como función del tiempo. Cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $h(t)$  se aproxima a 0.88 m. (La altura total  $\bar{H} + h$  se aproximará a 2.88 m.)

#### \*4-6 LINEALIZACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES

En esta sección exponemos una técnica de linealización aplicable a muchos sistemas no lineales. Es importante el proceso de linealizar sistemas no lineales, porque mediante la linealización de ecuaciones no lineales, es posible aplicar numerosos métodos de análisis lineal que producirán información acerca del comportamiento de sistemas no lineales. El proceso de linealización que aquí se explica se basa en la expansión de la función no lineal en series de Taylor en la vecindad del punto de operación y la retención sólo el término lineal. Debido a que despreciamos los términos de más alto orden de la expansión en series de Taylor, estos términos despreciados deben ser lo suficientemente pequeños; esto es, que las variables se desvíen sólo ligeramente de la condición de operación.

**Linealización de  $z = f(x)$  alrededor de un punto  $(\bar{x}, \bar{z})$ .** Considérese un sistema no lineal cuya entrada es  $x$  y cuya salida es  $z$ . Entonces, la relación entre  $z$  y  $x$  puede escribirse

$$z = f(x) \quad (4-21)$$

Si la condición de operación normal corresponde al punto  $(\bar{x}, \bar{z})$ , entonces la Ec. (4-21) puede expandirse en series de Taylor alrededor de este punto como sigue:

$$z = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \quad (4-22)$$

donde las derivadas  $df/dx$ ,  $d^2f/dx^2$ , ... están evaluadas en el punto de operación,  $x = \bar{x}$ ,  $z = \bar{z}$ . Si la variación  $x - \bar{x}$  es pequeña, podemos despreciar los términos de más alto orden en  $x - \bar{x}$ . Nótese que  $\bar{z} = f(\bar{x})$ , luego la Ec. (4-22) puede escribirse

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) \quad (4-23)$$

\*Las secciones con asterisco tratan de tomar más desafiantes que el resto del libro. Dependiendo de los objetivos del curso, estas secciones (aunque importantes) pueden omitirse en las exposiciones de clase sin perder la continuidad del tema principal.

donde

$$a = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}, z=\bar{z}}$$

La ecuación (4-23) indica que  $z - \bar{z}$  es proporcional a  $x - \bar{x}$ . Este es un modelo matemático lineal del sistema no lineal dado por la Ec. (4-21) cerca del punto de operación  $x = \bar{x}$ ,  $z = \bar{z}$ .

**Linealización de  $z = f(x, y)$  alrededor de un punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .** A continuación, considérese un sistema no lineal cuya salida  $z$  es una función de dos entradas  $x$  y  $y$  de modo que

$$z = f(x, y) \quad (4-24)$$

Con objeto de obtener un modelo matemático lineal para este sistema no lineal alrededor del punto de operación  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , expandamos la Ec. (4-24) en una serie de Taylor alrededor de este punto. Entonces, la Ec. (4-24) se hace

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \bar{y}) \right] + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - \bar{x})^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - \bar{y})^2 \right] + \dots$$

donde las derivadas parciales se evalúan en el punto de operación  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$ ,  $z = \bar{z}$ . Cerca de este punto, los términos de más alto orden pueden despreciarse. Observando que  $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$ , un modelo matemático lineal de este sistema no lineal, cerca del punto de operación  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$ ,  $z = \bar{z}$ , es

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y})$$

donde

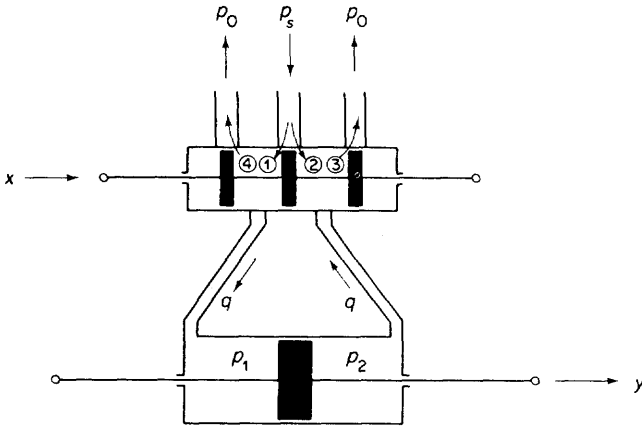
$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}}$$

$$b = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}}$$

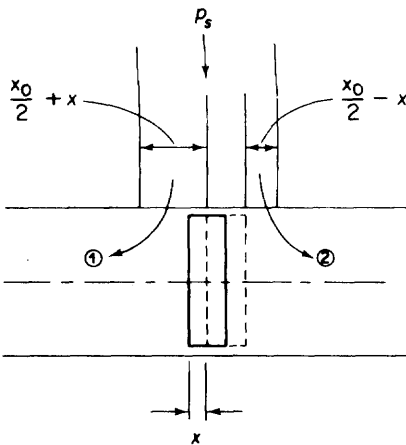
Es importante recordar que en el presente procedimiento de linealización las desviaciones de las variables de la condición de operación deben ser suficientemente pequeñas. De otro modo no se aplica este procedimiento.

**Linealización de características de las válvulas.** La figura 4-28(a) muestra un servo hidráulico formado por una válvula de carretes de cuatro vías y un cilindro y pistón de potencia. Aplicaremos la técnica de linealización recién presentada para obtener un modelo matemático linealizado de la válvula de carretes de cuatro vías. La válvula, que se supone subtraslapada y simétrica, admite fluido hidráulico bajo presión en un cilindro de potencia que contiene un pistón grande, de modo que se establece una gran fuerza hidráulica para mover una carga. Suponemos que la inercia y la fricción de la

carga son pequeñas comparadas con la gran fuerza hidráulica. En el presente análisis, se supone que el fluido hidráulico es incompresible y la fuerza de inercia del pistón de potencia, despreciable. Suponemos también, como usualmente es el caso, que el área del orificio (el ancho de la ranura en la manga de la válvula) en cada puerto es proporcional al desplazamiento  $x$  de la válvula.



(a)



(b)

**Fig. 4-28.** (a) Sistema servo hidráulico; (b) diagrama amplificado del área del orificio de la válvula.

En la Fig. 4-28(b) tenemos un diagrama aumentado del área del orificio de la válvula. Definamos las áreas de los orificios de la válvula, de los puertos 1, 2, 3, 4 como  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , respectivamente, y también definamos las razones de flujo a través de los puertos 1, 2, 3, 4 como  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , respectivamente. Puesto que la válvula es simétrica,  $A_1 = A_3$  y  $A_2 = A_4$ . Suponiendo que el desplazamiento  $x$  sea pequeño, obtenemos

$$A_1 = A_3 = k \left( \frac{x_0}{2} + x \right)$$

$$A_2 = A_4 = k \left( \frac{x_0}{2} - x \right)$$

donde  $k$  es una constante.

Además, supondremos que la presión de retorno  $p_0$  en la línea de retorno es pequeña y, por lo tanto, puede despreciarse. Entonces, en relación con la Fig. 4-28(a), las razones de flujo a través de los orificios de la válvula son

$$q_1 = c_1 A_1 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_s - p_1)} = C_1 \sqrt{p_s - p_1} \left( \frac{x_0}{2} + x \right)$$

$$q_2 = c_2 A_2 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_s - p_2)} = C_2 \sqrt{p_s - p_2} \left( \frac{x_0}{2} - x \right)$$

$$q_3 = c_1 A_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_2 - p_0)} = C_1 \sqrt{p_2 - p_0} \left( \frac{x_0}{2} + x \right) = C_1 \sqrt{p_2} \left( \frac{x_0}{2} + x \right)$$

$$q_4 = c_2 A_4 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_1 - p_0)} = C_2 \sqrt{p_1 - p_0} \left( \frac{x_0}{2} - x \right) = C_2 \sqrt{p_1} \left( \frac{x_0}{2} - x \right)$$

donde  $C_1 = c_1 k \sqrt{2g/\gamma}$  y  $C_2 = c_2 k \sqrt{2g/\gamma}$ . Por eso, la razón de flujo  $q$  al lado izquierdo del pistón es

$$q = q_1 - q_4 = C_1 \sqrt{p_s - p_1} \left( \frac{x_0}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{p_1} \left( \frac{x_0}{2} - x \right) \quad (4-25)$$

La razón de flujo del lado derecho del pistón hacia el drenaje es el mismo que esta  $q$  y está dada por

$$q = q_3 - q_2 = C_1 \sqrt{p_2} \left( \frac{x_0}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{p_s - p_2} \left( \frac{x_0}{2} - x \right)$$

Nótese que el fluido es incompresible y que la válvula es simétrica. De modo que tenemos  $q_1 = q_3$  y  $q_2 = q_4$ . Al igualar  $q_1$  y  $q_3$ , obtenemos

$$p_s - p_1 = p_2$$

o también

$$p_s = p_1 + p_2$$

Si definimos la diferencia de presión a través del pistón de potencia como  $\Delta P$  o

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

entonces

$$p_1 = \frac{p_s + \Delta p}{2}, \quad p_2 = \frac{p_s - \Delta p}{2}$$

Para la válvula simétrica mostrada en la Fig. 4-28(a), la presión a cada lado del pistón de potencia es  $\frac{1}{2}p_s$  cuando no se aplica carga, o  $\Delta p = 0$ . A medida que se desplaza la válvula de carretes, la presión en una línea se incrementa y la presión en la otra línea decrece en la misma cantidad.

En términos de  $p_s$  y  $\Delta p$ , podemos reescribir la razón de flujo  $q$  dada por la Ec. (4-25) como

$$q = q_1 - q_2 = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}} \left( \frac{x_0}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}} \left( \frac{x_0}{2} - x \right)$$

Observando que la presión de suministro  $p_s$  es constante, la razón de flujo  $q$  puede escribirse como función del desplazamiento  $x$  de la válvula y de la diferencia de presión  $\Delta p$ , o bien

$$q = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}} \left( \frac{x_0}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}} \left( \frac{x_0}{2} - x \right) = f(x, \Delta p)$$

Al aplicar la técnica de linealización explicada a este caso, la ecuación linealizada alrededor del punto  $x = \bar{x}$ ,  $\Delta p = \Delta \bar{p}$ ,  $q = \bar{q}$  es

$$q - \bar{q} = a(x - \bar{x}) + b(\Delta p - \Delta \bar{p}) \quad (4-26)$$

donde

$$\bar{q} = f(\bar{x}, \Delta \bar{p})$$

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, \Delta p=\Delta \bar{p}, q=\bar{q}} = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta \bar{p}}{2}} + C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta \bar{p}}{2}}$$

$$b = \left. \frac{\partial f}{\partial \Delta p} \right|_{x=\bar{x}, \Delta p=\Delta \bar{p}, q=\bar{q}} = - \left[ \frac{C_1}{2\sqrt{2} \sqrt{p_s - \Delta \bar{p}}} \left( \frac{x_0}{2} + \bar{x} \right) + \frac{C_2}{2\sqrt{2} \sqrt{p_s + \Delta \bar{p}}} \left( \frac{x_0}{2} - \bar{x} \right) \right] < 0$$

Los coeficientes  $a$  y  $b$  se llaman *coeficientes de la válvula*. La ecuación (4-26) es un modelo matemático linealizado de la válvula de carretes de cuatro vías cerca de un punto de operación  $x = \bar{x}$ ,  $\Delta p = \Delta \bar{p}$ ,  $q = \bar{q}$ . Los valores de los coeficientes de la válvula  $a$  y  $b$  varían con el punto de operación. Nótese que  $\partial f / \partial \Delta p$  es negativa y, por lo tanto,  $b$  es negativo.

Puesto que el punto de operación normal es el punto donde  $\bar{x} = 0$ ,  $\Delta \bar{p} = 0$ ,  $\bar{q} = 0$ , cerca del punto de operación normal, la Ec. (4-26) se hace

$$q = K_1 x - K_2 \Delta p \quad (4-27)$$

donde

$$K_1 = (C_1 + C_2) \sqrt{\frac{p_s}{2}} > 0$$

$$K_2 = (C_1 + C_2) \frac{x_0}{4\sqrt{2} \sqrt{p_s}} > 0$$



(Nótese que  $C_1 = C_2$  cuando  $x = 0$ ,  $\Delta p = 0$ .) La ecuación (4-27) es un modelo matemático linealizado de la válvula de carretes de cuatro vías cerca del origen ( $\bar{x} = 0$ ,  $\Delta \bar{p} = 0$ ,  $\bar{q} = 0$ ). Nótese que la región cercana al origen es muy importante porque la operación del sistema usualmente ocurre cerca de este punto. Tal modelo matemático linealizado es útil para analizar el funcionamiento de las válvulas de control hidráulicas.

**Conclusión.** En este capítulo hemos expuesto brevemente material básico de los sistemas hidráulicos y las técnicas de elaboración de modelos matemáticos para tales sistemas. En el capítulo 8 se explican con más detalle las válvulas de control hidráulicas, donde se tratan sistemas de control y controladores automáticos de diferentes tipos.

## BIBLIOGRAFÍA

- 4-1 BARNA, P. S., *Fluid Mechanics for Engineers*, 2nd ed., London, England: Butterworth & Company, Ltd., 1964.
- 4-2 BAYLEY, F. J., *An Introduction to Fluid Dynamics*, London, England: George Allen & Unwin, Ltd., 1958.
- 4-3 HOHMANN, C. J., "Pumps for Fluid Power, Part 2: for Aircraft," *Mechanical Engineering*, **90**, No. 10, October 1968, pp. 38-41.
- 4-4 MERRITT, H. E., *Hydraulic Control Systems*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- 4-5 MURRAY, J. F., "Pumps for Fluid Power, Part 3: for Extreme Environments," *Mechanical Engineering*, **90**, No. 11, November 1968, pp. 43-47.
- 4-6 OGATA, K., *Modern Control Engineering*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- 4-7 STREETER, V. L., AND E. B. WYLIE, *Fluid Mechanics*, 6th ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1975.
- 4-8 THOMAS, G. M., AND R. W. HENKE, "Pumps for Fluid Power, Part 1: Basic Briefing," *Mechanical Engineering*, **90**, No. 9, September 1968, pp. 41-46.

## EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

**PROBLEMA A-4-1.** Se comprime agua en un cilindro. Si el volumen del agua es  $1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  ( $1000 \text{ cm}^3$ ) a la presión de  $1.7 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs ( $170 \text{ kPa abs}$ ), ¿cuál es el volumen del agua cuando se aplica una presión de  $8 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs ( $800 \text{ kPa abs}$ )? Supóngase que el módulo de dispersión  $K$  del agua es  $2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ .

**Solución.** Puesto que el módulo de dispersión  $K$  está dado por

$$K = \frac{dp}{-dV/V}$$

al sustituir los valores numéricos dados, obtenemos

$$2.1 \times 10^9 = \frac{(8 - 1.7) \times 10^5}{-dV/(1 \times 10^{-3})} = \frac{6.3 \times 10^2}{-dV}$$

o bien

$$-dV = \frac{6.3 \times 10^2}{2.1 \times 10^9} = 3 \times 10^{-7}$$

Puesto que el volumen del agua a la presión de  $8 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs es

$$(1 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-7}) \text{ m}^3 = 999.7 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 999.7 \text{ cm}^3$$

**PROBLEMA A-4-2.** Si la viscosidad dinámica de un aceite basado en petróleo es 8 cP y la gravedad específica es 0.83, determínese la viscosidad dinámica  $\mu$  en unidades del SI y BES. Determínese también la viscosidad cinemática  $\nu$  en unidades del SI y BES.

**Solución.** Puesto que  $\mu$  es 8 cP,  $\mu = 0.08 \text{ g/cm-s}$ . Entonces,

$$\mu = 0.008 \frac{\text{N-s}}{\text{m}^2} = 0.008 \frac{\text{kg}}{\text{m-s}} \quad (\text{unidad SI})$$

$$= 0.000167 \frac{\text{lb}_f\text{-s}}{\text{ft}^2} = 0.000167 \frac{\text{slug}}{\text{ft-s}} \quad (\text{unidad BES})$$

La viscosidad cinemática  $\nu$  se obtiene de  $\nu = \mu/\rho$ . Puesto que  $\rho = 830 \text{ kg/m}^3 = 1.610 \text{ slug/ft}^3$ , tenemos

$$\nu = \frac{0.008}{830} = 9.64 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (\text{unidad SI})$$

$$= \frac{0.000167}{1.610} = 1.037 \times 10^{-4} \frac{\text{ft}^2}{\text{s}} \quad (\text{unidad BES})$$

**PROBLEMA A-4-3.** Considérese el movimiento de balanceo del barco mostrado en la Fig. 4-29. La fuerza debida a la flotación es  $-w$  y la debida a la gravedad es  $w$ . Estas dos fuerzas producen un par que causa el movimiento de balanceo del barco. El punto donde la línea vertical que pasa por el centro de flotación  $C'$  interseca la línea si-

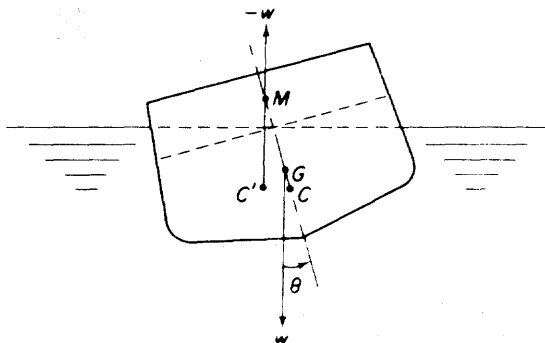


Fig. 4-29. Movimiento de balanceo de un barco.

métrica a través del centro de gravedad, la cual está en el plano de la línea central del barco, se llama *metacentro*. El metacentro se muestra como el punto  $M$ . Defínase

$R$  = distancia del metacentro al centro de gravedad del barco =  $\overline{MG}$

$J$  = momento de inercia del barco alrededor de su eje centroidal longitudinal

Derívese la ecuación del movimiento de balanceo del barco cuando el ángulo de balanceo  $\theta$  es pequeño.

**Solución.** De la Fig. 4-29, obtenemos

$$J\ddot{\theta} = -wR \sin \theta$$

o también

$$J\ddot{\theta} + wR \sin \theta = 0$$

Para un  $\theta$  pequeño, tenemos que  $\sin \theta \doteq \theta$ . Por lo tanto, la ecuación del movimiento de balanceo del barco es

$$J\ddot{\theta} + wR\theta = 0$$

La frecuencia natural del movimiento de rotación es  $\sqrt{wR/J}$ . Nótese que la distancia  $R$  ( $= \overline{MG}$ ) se considera positiva cuando el par de peso y flotación tiende a girar al barco a la posición vertical. Esto es,  $R$  es positiva si el punto  $M$  está sobre el punto  $G$  y negativa si el punto  $M$  está bajo el punto  $G$ .

**PROBLEMA A-4-4.** Suponiendo que la unidad de potencia hidráulica mostrada en la Fig. 4-30 se usa como bomba y que el lado izquierdo del pistón está a la presión atmosférica, muéstrase que

$$F_p v_p = p Q_p$$

donde  $F_p$  es la fuerza aplicada al pistón,  $v_p$  la velocidad del pistón,  $p$  la presión manométrica del fluido en la cámara de descarga y  $Q_p$  la razón de descarga.

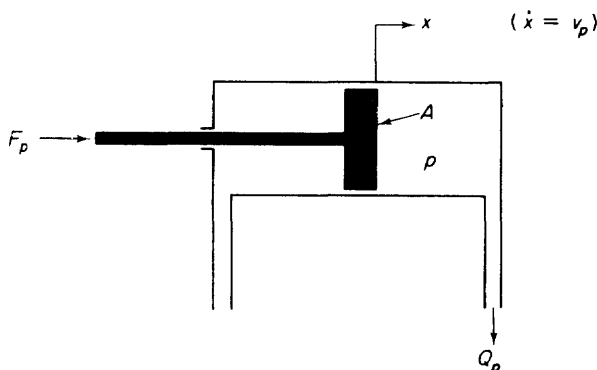


Fig. 4-30. Unidad de potencia hidráulica.

**Solución.** Defínase el área del pistón como  $A$ . Entonces la presión  $p$  desarrollada en la cámara de descarga es

$$p = \frac{F_p}{A}$$

La razón de descarga  $Q_p$  es

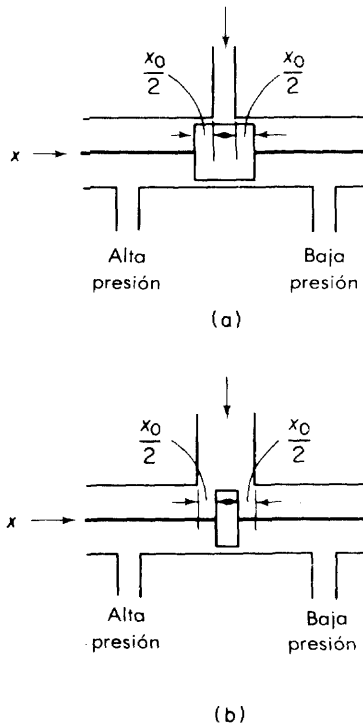
$$Q_p = Av_p$$

así

$$F_p v_p = p Q_p$$

Así pues, en una bomba hidráulica la potencia mecánica  $F_p v_p$  se transforma en la potencia hidráulica  $p Q_p$  en ausencia de pérdidas por fricción.

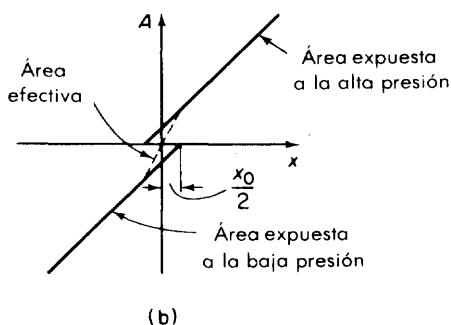
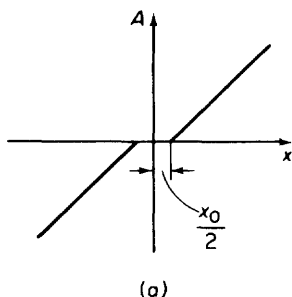
**PROBLEMA A-4-5.** Las válvulas de carretes reales son sobretraslapadas o subtraslapadas a causa de las tolerancias de manufactura. Considérense las válvulas de carretes sobretraslapada y subtraslapada mostradas en la Fig. 4-31(a) y (b). Trácense curvas relacionando el área de la entrada no cubierta  $A$  contra el desplazamiento  $x$ .



**Fig. 4-31.** (a) Válvula de carretes sobretraslapada; (b) válvula de carretes subtraslapada.

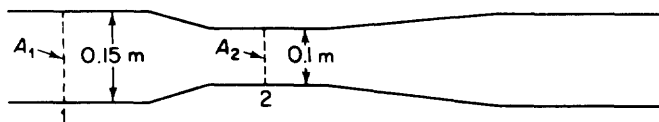
**Solución.** Para la válvula sobretraslapada, existe una zona muerta entre  $-\frac{1}{2}x_0$  y  $\frac{1}{2}x_0$ ,  $0 - \frac{1}{2}x_0 < x < \frac{1}{2}x_0$ . El área  $A$  de la entrada no cubierta contra el desplazamiento  $x$  definen una curva como la mostrada en la Fig. 4-32(a). Tal válvula sobretraslapada es impropia como válvula de control.

Para la válvula subtraslapada, el área  $A$  de la entrada contra el desplazamiento  $x$  definen una curva como la mostrada en la Fig. 4-32(b). La curva efectiva de la región subtraslapada tiene una pendiente más alta, lo que significa una sensibilidad mayor. Las válvulas usadas en los controles son usualmente subtraslapadas.



**Fig. 4-32.** (a) Curva del área  $A$  de la entrada descubierta contra el desplazamiento  $x$  en una válvula sobretraslapada; (b) curva del área  $A$  de la entrada descubierta contra el desplazamiento  $x$  en una válvula subtraslapada.

**PROBLEMA A-4-6.** En la Fig. 4-33 el medidor de Venturi se utiliza para determinar la razón de flujo en un tubo horizontal. Supóngase que está fluyendo agua. Supóngase también que el diámetro en la sección 1 es de 0.15 m y el de la sección 2 es de 0.1 m. Encuentre la razón de flujo  $Q$  m<sup>3</sup>/s a través del tubo cuando  $p_1 - p_2 = 0.1373 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup> ( $= 13.73$  kPa).



**Fig. 4-33.** Medidor de Venturi.

**Solución.** De la ecuación de Bernoulli, Ec. (4-6),

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Puesto que  $z_1 = z_2$ , tenemos

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \quad (4-28)$$

De la ecuación de continuidad,

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son las áreas de las secciones transversales en las secciones 1 y 2, respectivamente.

Del enunciado del problema

$$A_1 = \left(\frac{0.15}{2}\right)^2 \pi \text{ m}^2, \quad A_2 = \left(\frac{0.1}{2}\right)^2 \pi \text{ m}^2$$

En consecuencia,

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = 2.25 v_1$$

De la Ec. (4-28)

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{(2.25)^2 v_1^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = 4.0625 \frac{v_1^2}{2g}$$

o bien

$$v_1^2 = \frac{2g(p_1 - p_2)}{\gamma \times 4.0625} = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \times 4.0625}$$

Por lo tanto, observando que  $\rho = \gamma/g = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ , tenemos

$$Q = A_1 v_1 = \left(\frac{0.15}{2}\right)^2 \pi \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \times 4.0625}} = 1.767 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{2 \times 0.1373 \times 10^5}{10^3 \times 4.0625}}$$

$$= 0.04594 \text{ m}^3/\text{s}$$

**PROBLEMA A-4-7.** Considérense el sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4-34. La razón de flujo  $Q$  a través del orificio es igual a  $cA_0\sqrt{2gH} = K\sqrt{H}$ , donde  $A_0$  es el área del orificio,  $c$  es el coeficiente de descarga,  $g$  es la constante de aceleración de la gravedad,  $H$  es la altura sobre el centro del orificio y  $K = cA_0\sqrt{2g}$ . La capacitancia del tanque es constante y es igual a  $C$ . Supóngase que en  $t = 0$  la altura es  $H_0$ . Encuéntrese el tiempo  $t$  necesario para abatir la altura de  $H_0$  a  $H_1$  ( $0 < H_1 < H_0$ ), ambas alturas medidas desde el centro del orificio.

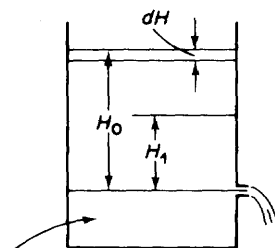


Fig. 4-34. Sistema de nivel de líquido.

Capacitancia  
 $C$

**Solución.** Supóngase que la razón de flujo  $Q$  está medida en metros cúbicos por segundo, la capacitancia en metros cuadrados y la altura en metros. Entonces, el líquido descargado desde el orificio en  $dt$  segundos es  $Q dt$ , el cual es igual a la reducción

en volumen en el tanque durante los mismos  $dt$  segundos. Por tanto,

$$Q dt = -C dH$$

Y así

$$dt = -\frac{C}{Q} dH = -\frac{C}{K\sqrt{H}} dH$$

Supongamos que  $H = H_1$  en  $t = t_1$ . Se infiere que

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_0^{t_1} dt = \int_{H_0}^{H_1} \frac{-C}{K\sqrt{H}} dH = -\frac{C}{K} \int_{H_0}^{H_1} \frac{dH}{\sqrt{H}} \\ &= -\frac{C}{K} 2\sqrt{H} \Big|_{H_0}^{H_1} = \frac{2C}{K} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}) \end{aligned}$$

Así pues, el tiempo necesario para abatir la altura de  $H_0$  metros a  $H_1$  metros es  $(2C/K) \cdot (\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1})$  segundos.

**PROBLEMA A-4-8.** En el sistema de nivel de líquido de la Fig. 4-35 supóngase que la razón de flujo de salida  $Q$  m<sup>3</sup>/s a través de la válvula de salida está relacionada con la altura  $H$  m por

$$Q = K\sqrt{H} = 0.01\sqrt{H}$$

Supóngase también que cuando la razón de flujo de entrada  $Q_i$  es 0.015 m<sup>3</sup>/s, la altura permanece constante. En  $t = 0$  la válvula de entrada de flujo se cierra y, por lo tanto no hay flujo de entrada para  $t \geq 0$ . Encuéntrese el tiempo necesario para vaciar el tanque a la mitad de su altura original. La capacitancia del tanque es de 2 m<sup>2</sup>.

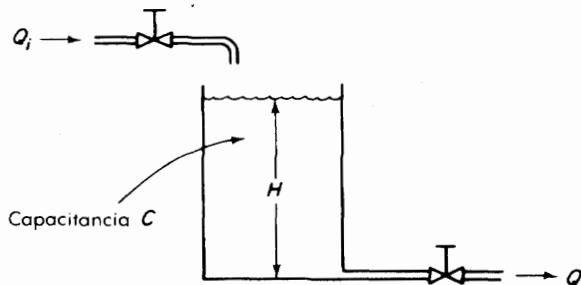


Fig. 4-35. Sistema de nivel de líquido.

**Solución.** Cuando la altura es estacionaria, la razón del flujo de entrada es igual a la razón del flujo de salida. Así, la altura  $H_0$  en  $t = 0$  se obtiene de

$$0.015 = 0.01\sqrt{H_0}$$

o bien

$$H_0 = 2.25 \text{ m}$$

La ecuación del sistema para  $t > 0$  es

$$-C dH = Q dt$$

o bien

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{Q}{C} = \frac{-0.01\sqrt{H}}{2}$$

En consecuencia,

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -0.005 dt$$

Supóngase que  $H = 1.125$  m en  $t = t_1$ . Integrando ambos lados de esta última ecuación, tenemos

$$\int_{2.25}^{1.125} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \int_0^{t_1} (-0.005) dt = -0.005 t_1$$

Por lo tanto, se infiere que

$$2\sqrt{H} \Big|_{2.25}^{1.125} = 2\sqrt{1.125} - 2\sqrt{2.25} = -0.005 t_1$$

o bien

$$t_1 = 176 \text{ s}$$

**PROBLEMA A-4-9.** Supóngase que el sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4-35 se encuentra en estado estable con una razón de flujo de entrada igual a  $\bar{Q}$  m<sup>3</sup>/s y altura igual a  $\bar{H}$  m. En  $t = 0$  la razón de flujo de entrada se cambia de  $\bar{Q}$  a  $\bar{Q} + 0.001$  m<sup>3</sup>/s. Después de transcurrido un tiempo suficiente, se alcanza el estado estable con una nueva altura igual a  $\bar{H} + 0.05$  m.

Suponiendo que el área de la sección transversal del tanque sea 2 m<sup>2</sup>, determínese la resistencia promedio de la válvula de salida del flujo. ¿Cuál es la constante de tiempo del sistema?

**Solución.** La resistencia promedio  $R$  de la válvula de salida del flujo está dada por

$$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{0.05}{0.001} = 50 \text{ s/m}^2$$

La capacitancia  $C$  del tanque es

$$C = 2 \text{ m}^2$$

Por lo tanto, la constante de tiempo  $T$  del sistema es

$$T = RC = 50 \times 2 = 100 \text{ s}$$

**PROBLEMA A-4-10.** Considérese el flujo de agua a través de un tubo capilar mostrado en la Fig. 4-36. Suponiendo que la temperatura del agua sea de 20°C y que el flujo sea laminar, obténgase la resistencia  $R$  del tubo capilar.

**Solución.** De la fórmula de Hagen-Poiseuille tenemos

$$h = \frac{128\nu L}{g\pi D^4} Q$$

Por lo tanto, la resistencia  $R$  se obtiene como

$$R = \frac{dh}{dQ} = \frac{128\nu L}{g\pi D^4} \quad (4-29)$$

Notando que la viscosidad cinemática  $\nu$  del agua a la temperatura de 20°C es de  $1.004 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, obtenemos, al sustituir los valores numéricos en la Ec. (4-29),

$$R = \frac{128 \times 1.004 \times 10^{-6} \times 1}{9.81 \times 3.14 \times (3 \times 10^{-3})^4} = 5.15 \times 10^4 \text{ s/m}^2$$



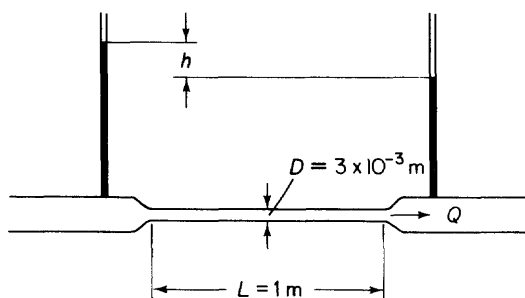


Fig. 4-36. Flujo de agua a través de un tubo capilar.

**PROBLEMA A-4-11.** Considérese el sistema de nivel de líquido de la Fig. 4-37(a). La curva de altura contra razón de flujo se muestra en la Fig. 4-37(b). Supóngase que en estado estable la razón de flujo es  $4 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$  y la altura en estado estable es 1 m. En  $t = 0$ , la válvula de entrada de flujo se abre algo más y la razón de flujo de entrada cambia a  $4.5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . Déterminese la resistencia promedio  $R$  de la válvula de flujo de salida. También, déeterminese el cambio en altura como función del tiempo. La capacitancia  $C$  del tanque es de  $0.02 \text{ m}^2$ .

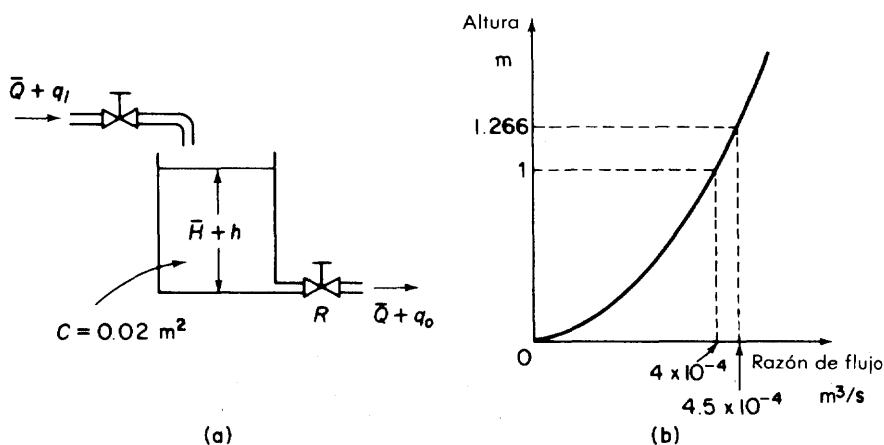


Fig. 4-37. (a) Sistema de nivel de líquido; (b) curva de altura contra razón de flujo.

**Solución.** La razón de flujo a través de la válvula de flujo de salida se puede suponer como

$$Q = K\sqrt{H}$$

A partir de la curva dada en la Fig. 4-37(b) vemos que

$$4 \times 10^{-4} = K\sqrt{1}$$

o bien

$$K = 4 \times 10^{-4}$$

Por lo tanto, si la razón de flujo en estado estable se cambia a  $4.5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ , entonces la nueva altura en estado estable puede obtenerse de

$$4.5 \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-4} \sqrt{H}$$

o bien

$$H = 1.266 \text{ m}$$

Esto significa que el cambio en altura es  $1.266 - 1 = 0.266 \text{ m}$ . La resistencia promedio  $R$  de la válvula de flujo de salida es entonces

$$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{1.266 - 1}{(4.5 - 4) \times 10^{-4}} = 0.532 \times 10^4 \text{ s/m}^2$$

Observando que el cambio en el líquido almacenado en el tanque durante  $dt$  segundos es igual al flujo de entrada neto al tanque durante los mismos  $dt$  segundos, tenemos

$$C dh = (q_i - q_o) dt$$

donde  $q_i$  y  $q_o$  son los cambios en la razón de flujo de entrada y la razón de flujo de salida del tanque, respectivamente, y  $h$  es el cambio en altura. Así

$$C \frac{dh}{dt} = q_i - q_o$$

puesto que

$$R = \frac{h}{q_o}$$

se infiere que

$$C \frac{dh}{dt} = q_i - \frac{h}{R}$$

o también

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i$$

Sustituyendo  $R = 0.532 \times 10^4 \text{ s/m}^2$ ,  $C = 0.02 \text{ m}^2$ , y  $q_i = 0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$  en esta última ecuación da

$$0.532 \times 10^4 \times 0.02 \frac{dh}{dt} + h = 0.532 \times 10^4 \times 0.5 \times 10^{-4}$$

o bien

$$106.4 \frac{dh}{dt} + h = 0.266$$

Finalmente, resolviendo para  $h$ ,

$$h(t) = 0.266(1 - e^{-t/106.4}) \text{ m}$$

Esta última ecuación da el cambio en altura como función del tiempo.

**PROBLEMA A-4-12.** En el sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4-38, la razón de flujo en estado estable a través del tanque es  $\bar{Q}$  y las alturas en estado estable del tanque 1 y el tanque 2 son  $\bar{H}_1$  y  $\bar{H}_2$ , respectivamente. En  $t = 0$  la razón de flujo de entrada se cambia de  $\bar{Q}$  a  $\bar{Q} + q$ , donde  $q$  es un cambio pequeño en la razón de flujo de entrada. Los cambios correspondientes en las alturas ( $h_1$  y  $h_2$ ) y los cambios en la

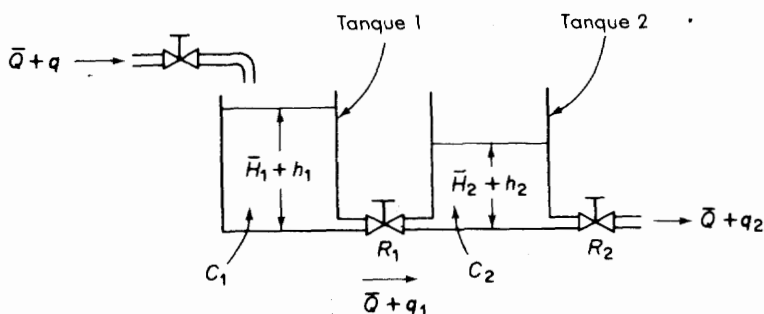


Fig. 4-38. Sistema de nivel de líquido.

razón de flujo ( $q_1$  y  $q_2$ ) se suponen pequeños. Las capacitancias del tanque 1 y el tanque 2 son  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente. La resistencia de la válvula entre los tanques es  $R_1$  y la correspondiente a la válvula de salida es  $R_2$ .

Suponiendo que  $q$  es la entrada y  $q_2$  es la salida, obténgase el modelo matemático (ecuación diferencial) del sistema.

**Solución.** Para el tanque 1, tenemos

$$C_1 dh_1 = (q - q_1) dt$$

donde

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

Así pues

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} + \frac{h_1}{R_1} = q + \frac{h_2}{R_1} \quad (4-30)$$

Para el tanque 2, tomamos

$$C_2 dh_2 = (q_1 - q_2) dt$$

donde

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

Por lo tanto,

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} + \frac{h_2}{R_1} + \frac{h_2}{R_2} = \frac{h_1}{R_1} \quad (4-31)$$

Al eliminar  $h_1$  de las Ecs. (4-30) y (4-31), el resultado es

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \frac{dh_2}{dt} + h_2 = R_2 q$$

Observando que  $h_2 = R_2 q_2$ , obtenemos

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \frac{dq_2}{dt} + q_2 = q$$

Este es el modelo matemático deseado o ecuación diferencial que relaciona  $q_2$  y  $q$ .

**PROBLEMA A-4-13.** De acuerdo con el sistema de nivel de líquido de la Fig. 4-39, la razón de flujo de entrada en estado estable es  $\bar{Q}$ , la razón de flujo entre tanque es cero y las alturas del tanque 1 y el tanque 2 son ambas  $H$ . En  $t = 0$ , la razón de flujo de entrada cambia de  $Q$  a  $Q + q$ , donde  $q$  es un cambio pequeño en la razón de flujo de entrada. Los cambios resultantes en las alturas ( $h_1$  y  $h_2$ ) y las razones de flujo ( $q_1$  y  $q_2$ ) se suponen pequeñas. Las capacitancias del tanque 1 y el tanque 2 son  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente. La resistencia de la válvula entre los tanques es  $R_1$  y la de la válvula de salida de flujo es  $R_2$ .

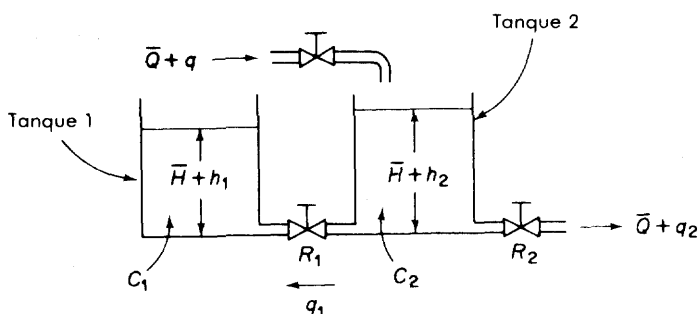


Fig. 4-39. Sistema de nivel de líquido.

• Obténganse los modelos matemáticos del sistema cuando (a)  $q$  sea la entrada y  $h_2$  la salida, (b)  $q$  sea la entrada y  $q_2$  la salida, y (c)  $q$  sea la entrada y  $h_1$  la salida.

**Solución.** Para el tanque 1, tenemos

$$C_1 dh_1 = q_1 dt$$

donde

$$q_1 = \frac{h_2 - h_1}{R_1}$$

En consecuencia,

$$R_1 C_1 \frac{dh_1}{dt} + h_1 = h_2 \quad (4-32)$$

Para el tanque 2, tomamos

$$C_2 dh_2 = (q - q_1 - q_2) dt$$

donde

$$q_1 = \frac{h_2 - h_1}{R_1}, \quad q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

se sigue que

$$R_2 C_2 \frac{dh_2}{dt} + \frac{R_2}{R_1} h_2 + h_2 = R_2 q + \frac{R_2}{R_1} h_1 \quad (4-33)$$

Al eliminar  $h_1$  de las Ecs. (4-32) y (4-33), tenemos

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \frac{dh_2}{dt} + h_2 = R_1 R_2 C_1 \frac{dq}{dt} + R_2 q \quad (4-34)$$

Este es un modelo matemático deseado en el cual  $q$  se considera la entrada y  $h_2$  la salida. Entonces la sustitución  $h_2 = R_2 q_2$  en la Ec. 4-34 da

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \frac{dq_2}{dt} + q_2 = R_1 C_1 \frac{dq}{dt} + q$$

Esta última ecuación es también un modelo matemático deseado en el cual  $q$  se considera la entrada y  $q_2$  la salida.

Finalmente, la eliminación de  $h_2$  de las Ecs. (4-32) y (4-33) da

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 h_1}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \frac{dh_1}{dt} + h_1 = R_2 q$$

la cual es un modelo matemático del sistema en el cual  $q$  se considera la entrada y  $h_1$  la salida.

**PROBLEMA A-4-14.** La razón de flujo  $Q$  y la altura  $H$  en el sistema de nivel de liquido de la Fig. 4-35 están relacionadas por

$$Q = K\sqrt{H}$$

Supóngase que en el estado estable la altura es  $H$  y la razón de flujo es  $Q_s = Q = \bar{Q}$ . Encuéntrese un modelo matemático linealizado que relacione la razón de flujo con la altura en la vecindad del punto en estado estable  $H = \bar{H}$ ,  $Q = \bar{Q}$ .

**Solución.** Demostraremos dos enfoques para obtener el modelo matemático linealizado que relaciona la razón de flujo y la altura en la cercanía del punto en estado estable  $H = \bar{H}$ ,  $Q = \bar{Q}$ .

El primero consiste en encontrar la resistencia  $R$  de la válvula de salida del flujo. Puesto que la resistencia  $R$  está dada por

$$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{2H}{Q}$$

cerca del punto en estado estable  $H = \bar{H}$ ,  $Q = \bar{Q}$ ,

$$\frac{dH}{dQ} = \frac{H - \bar{H}}{Q - \bar{Q}} = R = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}}$$

Por consiguiente

$$Q - \bar{Q} = \frac{1}{R}(H - \bar{H})$$

o bien

$$Q - \bar{Q} = \frac{\bar{Q}}{2\bar{H}}(H - \bar{H}) \quad (4-35)$$

Esta ecuación es un modelo matemático linealizado que relaciona la razón de flujo  $Q$  y la altura  $H$  cerca del punto en estado estable  $H = \bar{H}$ ,  $Q = \bar{Q}$ .

El segundo enfoque consiste en expandir la ecuación no lineal

$$Q = K\sqrt{H} = f(H)$$

en series de Taylor alrededor del punto  $H = \bar{H}$ ,  $Q = \bar{Q}$ .

$$Q = f(H) = f(\bar{H}) + \frac{df}{dH}(H - \bar{H}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dH^2}(H - \bar{H})^2 + \dots$$

Al despreciar los términos de más alto orden en  $H - \bar{H}$ , tenemos

$$Q - \bar{Q} = a(H - \bar{H})$$

donde

$$\bar{Q} = f(\bar{H}) = K\sqrt{\bar{H}}$$

$$a = \left. \frac{df}{dH} \right|_{H=\bar{H}, Q=\bar{Q}} = \left. \frac{K}{2\sqrt{H}} \right|_{H=\bar{H}, Q=\bar{Q}} = \frac{K}{2\sqrt{\bar{H}}} = \frac{\bar{Q}}{2\bar{H}}$$

Se sigue

$$Q - \bar{Q} = \frac{\bar{Q}}{2\bar{H}}(H - \bar{H})$$

Esta ecuación es idéntica a la Ec. (4-35) y es un modelo matemático linealizado que relaciona la razón de flujo  $Q$  y la altura  $H$  en la vecindad del punto en estado estable  $H = \bar{H}$ ,  $Q = \bar{Q}$ .

**\*PROBLEMA A-4-15.** Encuentre la ecuación linealizada de

$$z = 0.4x^3 = f(x)$$

alrededor del punto  $\bar{x} = 2$ ,  $\bar{z} = 3.2$ .

**Solución.** La expansión en series de Taylor de  $f(x)$  alrededor del punto (2, 3.2) es

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x})$$

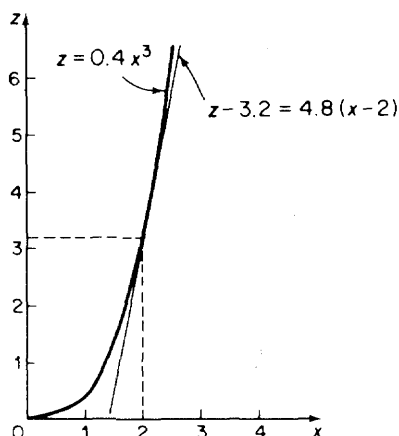
donde

$$a = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=2, z=3.2} = 1.2x^2 \Big|_{x=2, z=3.2} = 4.8$$

Por lo tanto, una aproximación lineal de la ecuación no lineal dada es

$$z - 3.2 = 4.8(x - 2) \quad (4.36)$$

La figura 4-40 representa una curva no lineal  $z = 0.4x^3$  y la ecuación lineal dada por la Ec. (4-36). Nótese que la aproximación en línea recta de la curva cúbica es válida cerca del punto (2, 3.2).



**Fig. 4-40.** Curva no lineal  $z = 0.4x^3$  y su aproximación lineal en el punto  $\bar{x} = 2$  y  $\bar{z} = 3.2$ .

**\*PROBLEMA A-4-16.** Linealice la ecuación no lineal

$$z = xy$$

en la región  $5 \leq x \leq 7$ ,  $10 \leq y \leq 12$ . Encuentre el error si la ecuación linealizada se usa para calcular el valor de  $z$  cuando  $x = 5$ ,  $y = 10$ .

**Solución.** Puesto que la región considerada está dada por  $5 \leq x \leq 7$ ,  $10 \leq y \leq 12$ , escójase  $\bar{x} = 6$ ,  $\bar{y} = 11$ . Entonces  $\bar{z} = \bar{x}\bar{y} = 66$ . Obtengamos una ecuación linealizada para la ecuación no lineal cerca del punto  $\bar{x} = 6$ ,  $\bar{y} = 11$ ,  $\bar{z} = 66$ .

Expandiendo la ecuación no lineal en series de Taylor alrededor del punto  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$ ,  $z = \bar{z}$  y despreciando los términos de mayor orden, tenemos

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y})$$

donde

$$a = \left. \frac{\partial(xy)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}} = \bar{y} = 11$$

$$b = \left. \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}} = \bar{x} = 6$$

Por lo tanto, la ecuación linealizada es

$$z - 66 = 11(x - 6) + 6(y - 11)$$

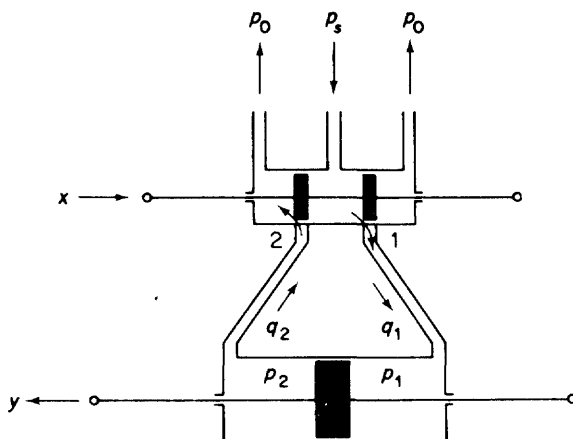
o bien

$$z = 11x + 6y - 66$$

Cuando  $x = 5$ ,  $y = 10$ , el valor de  $z$  dado por la ecuación linealizada es

$$z = 11x + 6y - 66 = 55 + 60 - 66 = 49$$

El valor exacto de  $z$  es  $z = xy = 50$ . El error es por lo tanto  $50 - 49 = 1$ . En términos de porcentaje, el error es de 2%.

**\*PROBLEMA A-4-17.** La figura 4-41 muestra un servo hidráulico que consta de una válvula de carretes y un cilindro y pistón de potencia. Supóngase que la válvula de

**Fig. 4-41.** Sistema servo hidráulico.

carretes es simétrica y no tiene traslape, las áreas de los orificios de la válvula son proporcionales al desplazamiento  $x$  de la válvula, y el coeficiente del orificio y la caída de presión a través del orificio son constantes e independientes de la posición de la válvula. Además, supóngase lo siguiente: la presión de suministro es  $p_s$ , la presión de retorno  $p_0$  en la línea de retorno es pequeña y puede despreciarse, el fluido hidráulico es incompresible, la fuerza de inercia del pistón de potencia y las fuerzas reactivas de la carga son despreciables comparadas con la fuerza hidráulica desarrollada por el pistón de potencia, y el escurrimiento del flujo alrededor de la válvula de carretes desde el lado de la presión de suministro al lado de la presión de retorno es despreciable.

Obténgase un modelo matemático linealizado de la válvula de carretes cerca del origen.

**Solución.** Definamos las áreas de los orificios de la válvula en el puerto 1 y el puerto 2 como  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. Entonces  $A_1 = A_2 = kx$ , donde  $k$  es una constante. En relación con la Fig. 4-41, las razones de flujo a través de los orificios de la válvula son

$$q_1 = cA_1\sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_s - p_1)} = C\sqrt{p_s - p_1}x$$

$$q_2 = cA_2\sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_2 - p_0)} = C\sqrt{p_2 - p_0}x = C\sqrt{p_2}x$$

donde  $C = ck\sqrt{2g/\gamma}$ . Puesto que sabemos que no hay escurrimiento de flujo alrededor de la válvula desde el lado de la presión de suministro al lado de la presión de retorno, estas dos ecuaciones son las únicas ecuaciones de razón de flujo que nos atañen en el presente análisis.

Observando que  $q_1 = q_2$ , tenemos

$$p_s - p_1 = p_2$$

Definamos la diferencia de presión a través del pistón de potencia como  $\Delta p$  o

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

Entonces  $p_1$  y  $p_2$  pueden escribirse

$$p_1 = \frac{p_s + \Delta p}{2}, \quad p_2 = \frac{p_s - \Delta p}{2}$$

La razón de flujo  $q_1$  al lado derecho del pistón de potencia es

$$q_1 = C\sqrt{p_s - p_1}x = C\sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}}x = f(x, \Delta p)$$

La ecuación linealizada cerca de un punto de operación  $x = \bar{x}$ ,  $\Delta p = \Delta \bar{p}$ ,  $q_1 = \bar{q}_1$  es

$$q_1 - \bar{q}_1 = a(x - \bar{x}) + b(\Delta p - \Delta \bar{p}) \quad (4-37)$$

donde

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, \Delta p=\Delta \bar{p}, q_1=\bar{q}_1} = C\sqrt{\frac{p_s - \Delta \bar{p}}{2}}$$



$$b = \left. \frac{\partial f}{\partial \Delta p} \right|_{x=\bar{x}, \Delta p=\Delta \bar{p}, q_1=\bar{q}_1} = -\frac{C}{2\sqrt{2}\sqrt{p_s - \Delta \bar{p}}} \bar{x} \leq 0$$

Cerca del origen ( $\bar{x} = 0, \Delta \bar{p} = 0, \bar{q}_1 = 0$ ) la Ec. (4-37) se hace

$$q_1 = K_1 x - K_2 \Delta p$$

donde

$$K_1 = C \sqrt{\frac{p_s - \Delta \bar{p}}{2}} \Big|_{\bar{x}=0, \Delta \bar{p}=0, \bar{q}_1=0} = C \sqrt{\frac{p_s}{2}}$$

$$K_2 = \frac{C}{2\sqrt{2}\sqrt{p_s - \Delta \bar{p}}} \bar{x} \Big|_{\bar{x}=0, \Delta \bar{p}=0, \bar{q}_1=0} = 0$$

Por consiguiente,

$$q_1 = K_1 x$$

la cual es un modelo matemático lineal cerca del origen de la válvula de carretes mostrada en la Fig. 4-41.

**\*PROBLEMA A-4-18.** Considérese otra vez el servo hidráulico mostrado en la Fig. 4-41 y supóngase la entrada al servo es el desplazamiento  $x$  de la válvula de carretes y que la salida es el desplazamiento  $y$  del pistón de potencia. Las direcciones positivas de  $x$  y  $y$  están indicadas en el diagrama. Suponiendo incompresible el fluido hidráulico, y la fuerza de inercia del pistón de potencia y las fuerzas reactivas de la carga son despreciables comparadas con la fuerza hidráulica desarrollada por el pistón de potencia, obténgase un modelo matemático del sistema relacionando los desplazamientos  $x$  y  $y$  cuando  $x$  sea pequeña.

**Solución.** Puesto que el fluido hidráulico es incompresible, tenemos

$$A p \, dy = q_1 \, dt$$

donde  $A$  (m<sup>2</sup>) es el área del pistón de potencia,  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) es la densidad de masa del fluido,  $dy$  (m) es el desplazamiento del pistón de potencia durante  $dt$  (s), y  $q_1$  (kg/s) es la razón de flujo del fluido en el lado derecho del pistón de potencia. Esta última ecuación puede escribirse

$$A \rho \frac{dy}{dt} = q_1 \quad (4-38)$$

Para una  $x$  pequeña, un modelo matemático lineal de la válvula de carretes se obtuvo en el problema A-4-17 como

$$q_1 = K_1 x \quad (4-39)$$

Así, al eliminar  $q_1$  de las Ecs. (4-38) y (4-39), tenemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K_1}{A \rho} x = K x$$

donde  $K = K_1/(A\rho)$ . Si integramos ambos lados de esta última ecuación, el resultado es

$$y = K \int x \, dt$$

la cual es un modelo matemático del sistema relativo a los desplazamientos  $x$  y  $y$ . Nótese que el desplazamiento de salida  $y$  es proporcional a la integral del desplazamiento de la válvula  $x$ .

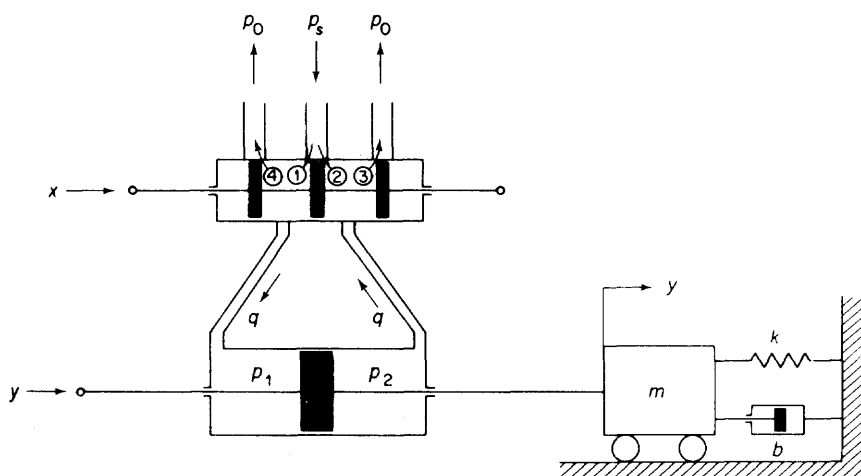


Fig. 4-42. Sistema servo hidráulico.

**\*PROBLEMA A-4-19.** El sistema servo hidráulico de la Fig. 4-42 consta de una válvula de carretes, un cilindro y pistón de potencia, y un elemento de carga (masa, fricción viscosa y resortes). Suponiendo que la fuerza de inercia del pistón de potencia es despreciable y las fuerzas reactivas de la carga también son despreciables, obténgase un modelo matemático del sistema. Supóngase también que la válvula de carretes es simétrica y que las áreas de los orificios de la válvula son proporcionales al desplazamiento  $x$  de la válvula.

**Solución.** Si la fuerza de inercia del pistón de potencia y las fuerzas reactivas de la carga son despreciables, puede suponerse que el coeficiente de orificio y la caída de presión a través del orificio son constantes e independientes de la posición de la válvula.

Puesto que las áreas de los orificios de la válvula se suponen proporcionales al desplazamiento de la válvula, la razón de flujo  $q$  (kg/s) puede escribirse

$$q = K_1 x$$

donde  $x$  (m) es el desplazamiento de la válvula y  $K_1$  (kg/m-s) es una constante.

Para el pistón de potencia

$$A\rho dy = q dt$$

donde  $A$  (m<sup>2</sup>) es el área del pistón de potencia y  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) es la densidad del aceite. Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{K_1}{A\rho} x = Kx$$

donde  $K = K_1(A\rho)$ . Integrando ambos lados de esta última ecuación da

$$y = K \int x dt$$

Así pues, el desplazamiento del pistón de potencia  $y$  es proporcional a la integral del desplazamiento  $x$  de la válvula. Las características dinámicas del servo mostrado en la Fig. 4-42 son las mismas que aquellas del servo de la Fig. 4-41.

Es importante puntualizar que el presente análisis se aplica solamente cuando las fuerzas reactivas de la carga y la fuerza de inercia del pistón de potencia son despreciables.

**\*PROBLEMA A-4-20.** Otra vez, en relación con la Fig. 4-42 y suponiendo que las fuerzas reactivas de la carga no son despreciables, obténgase un modelo matemático. Supóngase también que la masa del pistón de potencia está incluida en la masa de la carga  $m$ .

**Solución.** Al obtener un modelo matemático del sistema cuando las fuerzas reactivas de la carga no son despreciables, se deben tomar en cuenta efectos como la caída de presión a través del orificio, el escurrimiento de aceite alrededor de la válvula y alrededor del pistón y la compresibilidad del aceite.

La caída de presión a través del orificio es una función de la presión de suministro  $p_s$  y la diferencia de presión  $\Delta p = p_1 - p_2$ . Así pues, la razón de flujo  $q$  es una función no lineal del desplazamiento  $x$  de la válvula y de la diferencia de presión  $\Delta p$  o

$$q = f(x, \Delta p)$$

Linealizando esta ecuación no lineal alrededor del origen ( $x = 0$ ,  $\Delta p = 0$ ,  $q = 0$ ), obtenemos, en relación con la Ec. 4-27),

$$q = K_1 x + K_2 \Delta p \quad (4-40)$$

Puede considerarse que la razón de flujo  $q$  consiste en tres partes

$$q = q_0 + q_L + q_C \quad (4-41)$$

donde

$q_0$  = razón de flujo útil al cilindro de potencia que causa el movimiento del pistón de potencia, kg/s

$q_L$  = razón de flujo del escurrimiento, kg/s

$q_C$  = razón de flujo de compresibilidad equivalente, kg/s

Obtengamos expresiones específicas para  $q_0$ ,  $q_L$  y  $q_C$ . El flujo  $q_0$   $dt$  al lado izquierdo del pistón de potencia causa que el pistón se mueva a la derecha en  $dy$ . Por lo tanto, tenemos

$$A p dy = q_0 dt$$

donde  $A$  ( $m^2$ ) es el área del pistón de potencia,  $\rho$  ( $kg/m^3$ ) la densidad del aceite y  $dy$  (m) el desplazamiento del pistón de potencia. Entonces,

$$q_0 = A \rho \frac{dy}{dt} \quad (4-42)$$

La componente de escurrimiento  $q_L$  puede escribirse

$$q_L = L \Delta p \quad (4-43)$$

donde  $L$  es el coeficiente de escurrimiento del sistema.

La razón de flujo de compresibilidad equivalente  $q_C$  puede expresarse en términos del módulo de dispersión efectivo  $K$  del aceite (incluyendo los efectos del aire contenido, la expansión de los tubos, etc.), donde

$$K = \frac{d \Delta p}{-dV/V}$$

(Aquí  $dV$  es negativo y, por consiguiente,  $-dV$  es positivo.) Reescribiendo esta última ecuación da

$$-dV = \frac{V}{K} d\Delta p$$

o bien

$$\rho \frac{-dV}{dt} = \frac{\rho V}{K} \frac{d\Delta p}{dt}$$

Observando que  $q_c = \rho(-dV/dt)$ , encontramos

$$q_c = \frac{\rho V}{K} \frac{d\Delta p}{dt} \quad (4-44)$$

donde  $V$  es el volumen efectivo del aceite bajo compresión (esto es, aproximadamente la mitad del volumen total del cilindro de potencia).

Utilizando las Ec.s (4-40) hasta (4-44),

$$q = K_1 x - K_2 \Delta p = A\rho \frac{dy}{dt} + L \Delta p + \frac{\rho V}{K} \frac{d\Delta p}{dt}$$

o bien

$$A\rho \frac{dy}{dt} + \frac{\rho V}{K} \frac{d\Delta p}{dt} + (L + K_2) \Delta p = K_1 x \quad (4-45)$$

La fuerza desarrollada por el pistón de potencia es  $A \Delta p$ , y esta fuerza se aplica a los elementos de carga. Así,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = A \Delta p \quad (4-46)$$

Eliminando  $\Delta p$  de las Ecs. (4-45) y (4-46) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\rho V m}{KA} \frac{d^3 y}{dt^3} + \left[ \frac{\rho V b}{KA} + \frac{(L + K_2)m}{A} \right] \frac{d^2 y}{dt^2} \\ + \left[ A\rho + \frac{\rho V k}{KA} + \frac{(L + K_2)b}{A} \right] \frac{dy}{dt} + \frac{(L + K_2)k}{A} y = K_1 x \end{aligned}$$

Este es un modelo matemático del sistema que relaciona el desplazamiento  $x$  de la válvula de carretes y el desplazamiento  $y$  del pistón de potencia cuando las fuerzas reactivas de la carga no son despreciables.

## PROBLEMAS

**PROBLEMA B-4-1.** Un líquido se comprime en un cilindro. Si el volumen del líquido es de  $2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  a la presión de  $1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  abs (1 MPa abs) y  $1.9995 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  a la presión de  $1.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  (1.5 MPa abs), encuentre el módulo de dispersión de elasticidad.

**PROBLEMA B-4-2.** La ley de Pascal establece que la presión en cualquier punto de un líquido estático es la misma en cualquier dirección y ejerce igual fuerza sobre áreas iguales. En relación con la Fig. 4-43, si se aplica una fuerza  $P_1$  al lado izquierdo del

pistón, encuentre la fuerza  $P_2$  que actúa sobre el lado derecho del pistón. También, encuentre la distancia  $x_2$  recorrida por el pistón de la derecha cuando el de la izquierda se mueve  $x_1$ .

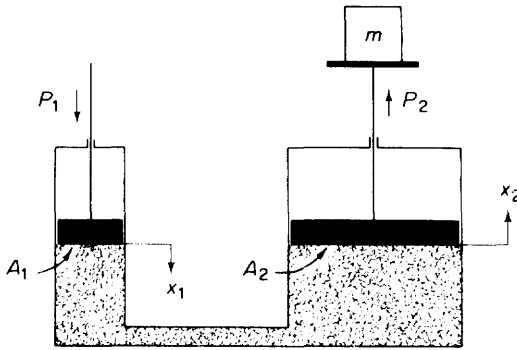


Fig. 4-43. Sistema hidráulico.

**PROBLEMA B-4-3.** La Fig. 4-44 muestra un acumulador que usa un resorte. Obtenga la energía máxima que puede almacenar el acumulador. Suponga que la presión varía de  $p_{\min}$  a  $p_{\max}$  como se muestra en el diagrama y que el desplazamiento del resorte es  $x_{\max}$  ( $x_{\min}$ ) cuando la presión  $p$  (presión manométrica) es  $p_{\max}$  ( $p_{\min}$ ).

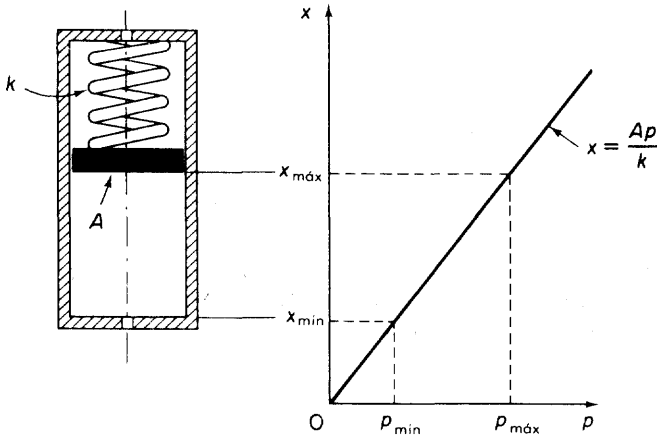


Fig. 4-44. Curva acumulador y su desplazamiento contra presión.

**PROBLEMA B-4-4.** En la Fig. 4-45 un depósito de agua está conectado mediante una tubería larga a un sistema, generador hidráulico. La válvula en el extremo de la tubería está controlada por un gobernador de turbina y puede detener rápidamente el flujo de agua si el generador pierde su carga. Explique el papel del tanque de oscilación en tal sistema.

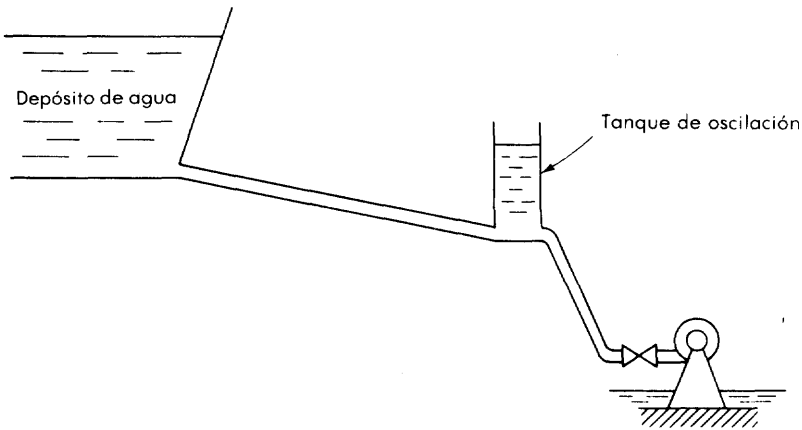


Fig. 4-45. Depósito de agua y sistema generador hidráulico.

**PROBLEMA B-4-5.** Considere la unidad de potencia hidráulica mostrada en la Fig. 4-46. Cuando se usa como motor, muestre que

$$pQ_m = F_m v_m$$

donde  $p$  es la presión manométrica del fluido de suministro,  $Q_m$  la razón del flujo al cilindro,  $v_m$  la velocidad del pistón y  $F_m$  la fuerza aplicada a la carga. Suponga que el lado izquierdo del pistón está a la presión atmosférica.

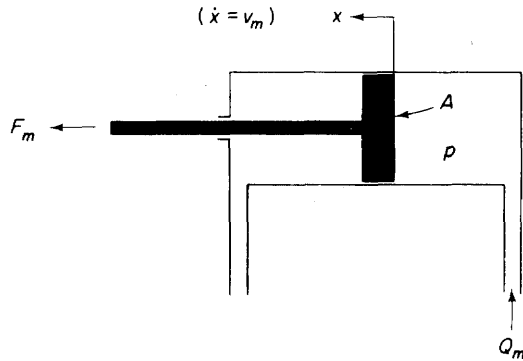


Fig. 4-46. Unidad de potencia hidráulica.

**PROBLEMA B-4-6.** En relación con el medidor de Venturi mostrado en la Fig. 4-33, encuentre la razón de flujo  $Q$  a través el tubo cuando  $p_1 - p_2 = 1 \times 10^4 \text{ N/m}^2$  (10 kPa). Suponga que está fluyendo aceite con una densidad de masa de  $800 \text{ kg/m}^3$ .

**PROBLEMA B-4-7.** En el sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4-47, suponga que en  $t = 0$  la altura  $H$  está a 5 m sobre el orificio. Encuentre la velocidad del flujo a través del orificio en  $t = 0$ . Si la razón de flujo en  $t = 0$  es  $0.04 \text{ m}^3/\text{s}$ , ¿cuánto tardará en bajar la altura a 3 m sobre el orificio? Suponga que la capacitancia del tanque es de  $20 \text{ m}^2$ .

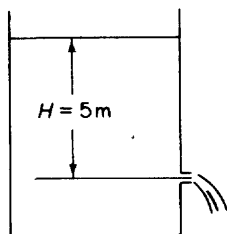


Fig. 4-47. Sistema de nivel de líquido.

**PROBLEMA B-4-8.** Considere un sistema de nivel de líquido donde el tanque tiene un área de  $4 \text{ m}^2$  en la sección transversal a nivel del orificio. El área de la sección transversal varía linealmente con el nivel de modo que es de  $2 \text{ m}^2$  a nivel de  $5 \text{ m}$  sobre el centro del orificio. Suponga que la razón de flujo del orificio es

$$Q = cA_0\sqrt{2gH} = K\sqrt{H}$$

donde  $c = 0.62$ ,  $A_0 = 0.01 \text{ m}^2$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $H$  es el nivel sobre el orificio en m, y  $K = cA_0\sqrt{2g}$ . Encuentre el tiempo en segundos necesario para bajar el nivel de  $5 \text{ m}$  a  $3 \text{ m}$  sobre el orificio.

**PROBLEMA B-4-9.** En el sistema mostrado en la Fig. 4-48 la altura se mantiene a  $1 \text{ m}$  durante  $t \leq 0$ . La válvula de entrada de flujo se cambia en  $t = 0$  y la razón de flujo de entrada es  $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$  para  $t \geq 0$ . Determine el tiempo necesario para llenar el tanque a un nivel de  $2.5 \text{ m}$ . Suponga que la razón del flujo de salida  $Q \text{ m}^3/\text{s}$  y la altura  $H$  están relacionados por

$$Q = 0.02\sqrt{H}$$

La capacitancia del tanque es de  $2 \text{ m}^2$ .

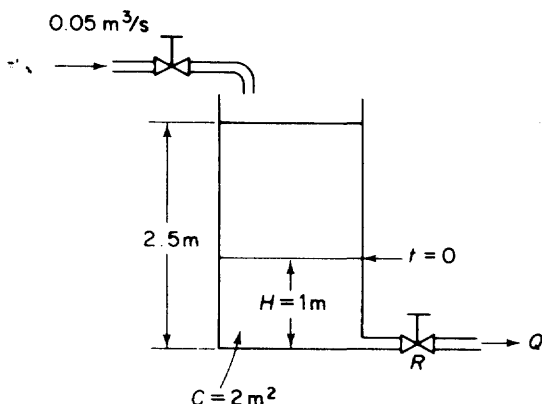


Fig. 4-48. Sistema de nivel de líquido.

**PROBLEMA B-4-10.** En relación con la Fig. 4-49, suponga que la válvula de salida del flujo se ha cerrado durante  $t < 0$  y que las alturas de ambos tanques son iguales, o sea,  $H_1 = H_2$ . En  $t = 0$  la válvula de salida de flujo se abre. Suponiendo que los flu-

jos a través de las válvulas son laminares, obtenga un modelo matemático que relacione la altura del tanque 2 con el tiempo  $t$ .

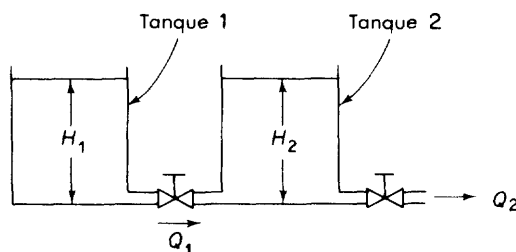


Fig. 4-49. Sistema de nivel de líquido.

**PROBLEMA B-4-11.** Obtenga un sistema análogo del sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4-26(a) y dado por la Ec. (4-18).

**PROBLEMA B-4-12.** En estado estable la razón de flujo a través del sistema mostrado en la Fig. 4-50 es  $\bar{Q}$  y las alturas del tanque 1 y el tanque 2 son  $\bar{H}_1$  y  $\bar{H}_2$ , respectivamente. en  $t = 0$  la razón de flujo de entrada se cambia de  $\bar{Q}$  a  $\bar{Q} + q$ , donde  $q$  es un pequeño cambio en la razón de flujo de entrada. Los cambios resultantes en las alturas ( $h_1$  y  $h_2$ ) y las razones ( $q_1$  y  $q_2$ ) se suponen pequeñas. Las capacitancias del tanque 1 y el tanque 2 son  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente. La resistencia de la válvula del flujo de salida del tanque 1 es  $R_1$  y la del tanque 2 es  $R_2$ . Obtenga un modelo matemático del sistema cuando  $q$  sea la entrada y  $q_2$  la salida.

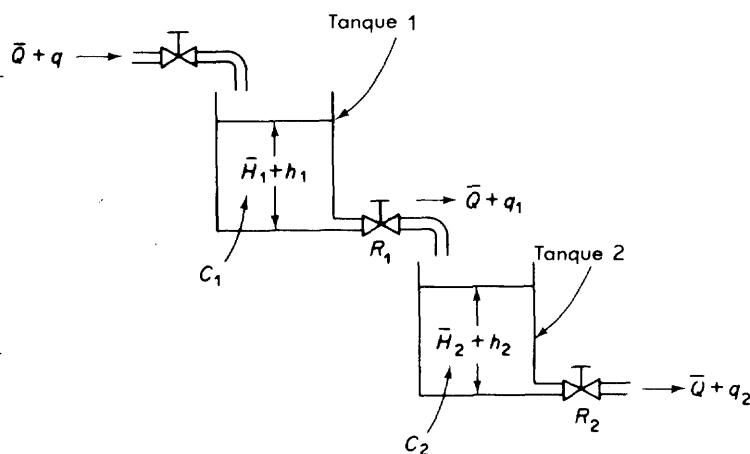


Fig. 4-50. Sistema de nivel de líquido.

**PROBLEMA B-4-13.** Encuentre un sistema eléctrico análogo del sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4-50.

**PROBLEMA B-4-14.** Obtenga un sistema eléctrico análogo del sistema de nivel de líquido mostrado en la Fig. 4-38 donde  $q$  es la entrada y  $q_2$  la salida.



**PROBLEMA B-4-15.** Encuentre un sistema mecánico análogo del sistema de nivel líquido mostrado en la Fig. 4-38 cuando  $q$  es la entrada y  $q_2$  la salida.

**PROBLEMA B-4-16.** Considere el sistema hidráulico mostrado en la Fig. 4-51. Suponiendo que el desplazamiento  $x$  del pistón es la entrada y el desplazamiento  $y$  del cilindro es la salida, obtenga un modelo matemático del sistema.

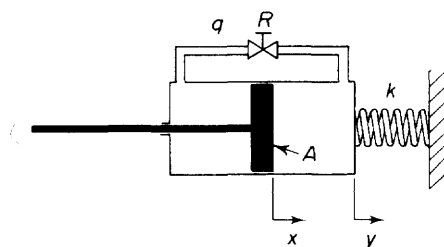


Fig. 4-51. Sistema hidráulico.

**\*PROBLEMA B-4-17.** Obtenga una aproximación lineal de

$$Q = 0.1\sqrt{H} = f(H)$$

alrededor de un punto  $H = 4$ ,  $Q = 0.2$ .

**\*PROBLEMA B-4-18.** Encuentre una ecuación linealizada de

$$z = 5x^2$$

alrededor de un punto  $x = 2$ ,  $z = 20$ .

**\*PROBLEMA B-4-19.** Linealice la ecuación no lineal

$$z = \frac{x}{y}$$

en la región definida por  $90 \leq x \leq 110$ ,  $45 \leq y \leq 55$ .

**\*PROBLEMA B-4-20.** Linealice la ecuación no lineal

$$z = x^2 + 2xy + 5y^2$$

en la región definida por  $10 \leq x \leq 12$ ,  $4 \leq y \leq 6$ .

# 5

## SISTEMAS NEUMÁTICOS

### 5-1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas neumáticos son sistemas de fluido que utilizan el aire como el medio para la transmisión de señales y de potencia. (Aunque el fluido más común en estos sistemas es el aire, otros gases pueden usarse del mismo modo.)

Los sistemas neumáticos se usan extensamente en la automatización de maquinaria de producción y en el campo de los controladores automáticos. Por ejemplo, circuitos neumáticos que convierten la energía del aire comprimido en energía mecánica gozan de un considerable uso, y se encuentran diferentes tipos de controladores mecánicos en la industria. Además, desde el principio de los años 60 los dispositivos neumáticos llamados fluidicos se han aplicado como elementos de decisión o circuitos lógicos en almacenaje automático, secuenciamiento y operaciones similares. Debido a que los sistemas neumáticos se encuentran con abundancia en la industria, los ingenieros deben estar tan familiarizados con los principios básicos de las componentes y sistemas neumáticos como con los correspondientes de los sistemas hidráulicos.

Las figuras 5-1 a 5-3 ilustran tres ejemplos de utilización del aire. En la Fig. 5-1 tenemos un diagrama esquemático de una bomba elevadora de aire; la Fig. 5-2 muestra un colchón de aire en un sistema de volante y la Fig. 5-3 un dedo mecánico. (En la Fig. 5-3, *A* y *B* son eslabones y *C* está unido a la barra del pistón. Cuando la barra del pistón se mueve hacia arriba, el dedo mecánico atrapa una pieza de trabajo. Cuando la barra del pistón se mueve hacia abajo, aquél suelta la pieza de trabajo.)

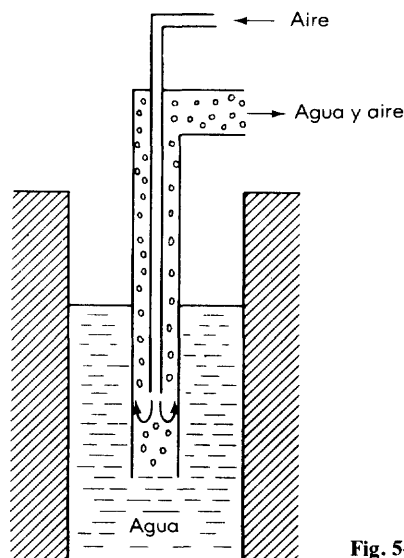


Fig. 5-1. Bomba elevadora de aire.

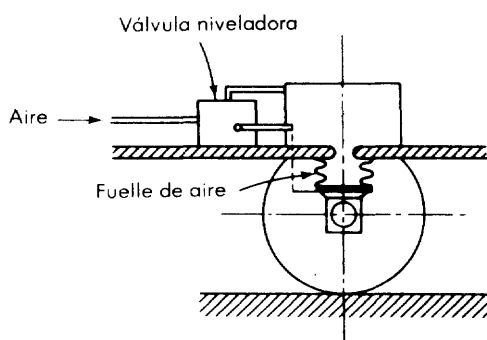


Fig. 5-2. Colchón de aire.

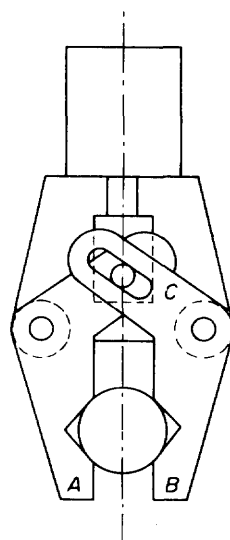


Fig. 5-3. Dedo mecánico.

El uso del aire en las industrias puede clasificarse de la siguiente manera.

1. Se utiliza el oxígeno del aire. (Sistemas de combustión)
2. Se utiliza el flujo del aire relativo. (Aeroplanos, paracaídas, etc.)

3. Se utiliza la fuerza debida al viento. (Yates, bombas elevadoras de aire, etc.)
4. Se utiliza la energía del aire comprimido. (Frenos de aire, herramientas de aire comprimido, etc.)
5. Se utiliza la compresibilidad del aire. (Colchones de aire)
6. Uso de ciertos fenómenos debidos al flujo del aire. (Fluidicos)

**Comparación entre sistemas neumáticos y sistemas hidráulicos.** Como ya se ha notado, el fluido encontrado en los sistemas neumáticos es el aire; en los sistemas hidráulicos es el aceite. Y principalmente son las diferentes propiedades de los fluidos involucrados los que caracterizan las diferencias entre los dos sistemas. Estas diferencias pueden enlistarse como sigue.

1. El aire y los gases son compresibles, en tanto que el aceite es incompresible.
2. El aire carece de propiedades lubricantes y siempre contiene vapor de agua. El aceite funciona como fluido hidráulico y también como lubricador.
3. La presión de operación normal de los sistemas neumáticos es mucho más baja que la de los sistemas hidráulicos.
4. Las potencias de salida de los sistemas neumáticos son considerablemente menores que las correspondientes a los sistemas hidráulicos.
5. La exactitud de los actuadores neumáticos es escasa a bajas velocidades, en tanto que la exactitud de los actuadores hidráulicos puede ser satisfactoria a todas las velocidades.
6. En los sistemas neumáticos el escurrimiento externo es permisible en cierta medida, pero el escurrimiento interno debe evitarse porque la diferencia de presión efectiva es más bien pequeña. En los sistemas hidráulicos el escurrimiento interno es permisible, pero el escurrimiento externo debe evitarse.
7. No se necesitan tubos de retorno en los sistemas neumáticos cuando se usa aire, en tanto que siempre se necesitan en los sistemas hidráulicos.
8. La temperatura de operación normal para los sistemas neumáticos es de 5 a 60°C. El sistema neumático, sin embargo, se puede operar en la escala de 0 a 200°C. Los sistemas neumáticos son insensibles a los cambios de temperatura, en contraste con los sistemas hidráulicos, donde la fricción del fluido debida a la viscosidad depende en gran medida de la temperatura. La temperatura de operación normal para los sistemas hidráulicos es de 20 a 70°C.

**Esquema del capítulo.** La sección 5-1 es una breve introducción a los sistemas neumáticos. En la Sec. 5-2 expondremos componentes y sistemas neumáticos, incluyendo bombas, actuadores y válvulas, seguido por las propiedades físicas y termodinámicas del aire y otros gases en la Sec. 5-3. La sección 5-4 describe el flujo de gases a través de orificios, y la Sec. 5-5 la elaboración de modelos matemáticos de los sistemas neumáticos. Después

de cosiderar algunos materiales introductorios de los dispositivos fluidicos en la Sec. 5-6, concluimos el capítulo con una descripción de fluidica digital y los circuitos lógicos en la Sec. 5-7.

## 5-2 SISTEMAS NEUMÁTICOS

Las fuerzas neumáticas realizan diferentes funciones (empujan, jalan, atrapan, por ejemplo) como en los polipastos neumáticos, las herramientas neumáticas, los dedos neumáticos y dispositivos similares. En esta sección exponemos los componentes neumáticos tales como compresores que producen aire comprimido, actuadores neumáticos que convierten la energía neumática en energía mecánica para realizar trabajo mecánico útil, y válvulas neumáticas que controlan la presión y/o el flujo. (Dispositivos neumáticos como los dispositivos fluidicos se explican en la Sec. 5-6 y en la Sec. 5-7. Los controladores neumáticos convencionales se exponen en el capítulo 8.)

La figura 5-4 muestra un diagrama funcional de un circuito neumático simple cuyas mayores componentes son un compresor, un filtro, un lubricador, válvulas y un actuador. En las páginas siguientes describiremos brevemente cada uno de estos componentes.

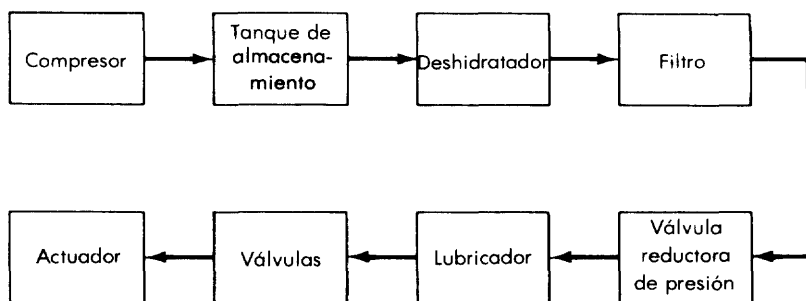


Fig. 5-4. Diagrama funcional de un circuito mecánico simple.

**Compresores.** Como lo implica su nombre, los *compresores* son máquinas para comprimir aire o gas. Pueden clasificarse en dos tipos: de desplazamiento positivo y centrífugos. El tipo de *desplazamiento positivo* incluye todas las máquinas que operan tomando una cierta cantidad de aire o gas en un espacio cerrado donde su volumen se reduce y su presión se incrementa. Tales compresores pueden dividirse en compresores de movimiento alternativo (reciprocantes) y rotatorios. El segundo tipo, los *centrífugos*, también incluyen a los compresores axiales. En la Fig. 5-5 se muestran diagramas esquemáticos de estos compresores.

Los compresores centrífugos para presión inferior a  $1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  manométrica (0.1 MPa manométrica) se conocen generalmente como *soplado-*





De desplazamiento positivo	Compresoras reciprocantes	
	Compresores rotatorias	
De tipo centrífugo	Compresores axiales	
	Compresores centrífugas	

Fig. 5-5. Compresores.

*res* o *ventiladores*. Cuando las presiones están por arriba de  $2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  manométrica (0.2 MPa manométrica) en compresores centrífugos, la energía cinética se recupera como presión. En los sopladores y ventiladores, sin embargo, la energía cinética usualmente se disipa en remolinos. Nótese que para la conversión de presión de  $\text{N/m}^2$  a  $\text{kg}_f/\text{cm}^2$  o  $\text{lb}_f/\text{m}^2$ ,

$$\begin{aligned}
 1 \text{ MPa} &= 10^6 \text{ N/m}^2 = 10.197 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 = 145 \text{ lb}_f/\text{in}^2 = 145 \text{ psig} \\
 0 \text{ N/m}^2 \text{ manométrica} &= 0 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 \text{ manométrica} = 0 \text{ psig} = 1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs} \\
 &= 1.0332 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 \text{ abs} = 14.70 \text{ lb}_f/\text{in}^2 \text{ abs} = 14.7 \text{ psia}
 \end{aligned}$$

El tipo de compresor conocido como de movimiento alternativo puede producir alta presión. Si las presiones están entre  $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  manométrica y  $35 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  manométrica (0.5 MPa manométrica y 3.5 MPa manométrica), se usan compresores de dos etapas, y presiones hasta de  $8 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  (8 MPa) requieren compresores de tres etapas. Cuando la presión varía de  $15 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  a  $35 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  (15 MPa a 35 MPa) o aún más alta, entonces son necesarios compresores de cuatro etapas. Con el objeto de obtener altas presiones, el aire (o gas) debe ser enfriado durante su paso de una etapa a otra.

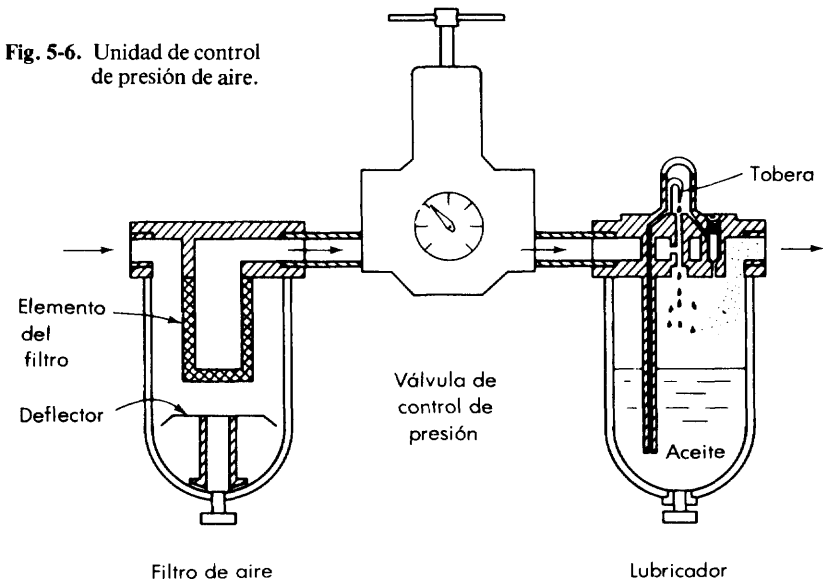
A causa de los compresores reciprocantes operan a velocidad constante, independiente de la demanda de aire comprimido, se han usado diferentes tipos de relevadores de carga para economizar. Cuando se excede la región predeterminada, el relevador de carga evita mayor compresión del aire hasta que la presión disminuye a una cantidad predeterminada y en esa etapa el compresor reanuda la compresión del aire.

En el compresor centrífugo, existen grandes separaciones entre el rotor y las partes estacionarias. Las únicas partes en rozamiento son los cojinetes. Puesto que el aire y los gases tienen bajas densidades, los compresores centrífugos se corren a alta velocidad. Además, mantienen una presión bastante constante dentro de una amplia escala de volúmenes de entrada. Para cada velocidad, sin embargo, hay un cierto volumen de entrada por abajo

del cual la operación se hará inestable. (A baja carga, puede ocurrir un fenómeno conocido como *presión ondulatoria* o *pulsaciones* por la compresibilidad del aire o gas. En esta situación, un ligero ajuste de la condición de operación puede detener la pulsación.)

**Filtros y lubricadores neumáticos.** El mayor problema en los sistemas neumáticos es el mantenimiento del suministro de aire limpio y seco a presión constante. La humedad, los líquidos corrosivos o las partículas extrañas arrastradas al sistema neumático por el suministro de aire pueden causar problemas. A medida que el aire se comprime, la temperatura se eleva y la humedad relativa disminuye. Cuando el aire comprimido es enfriado por un postenfriador del compresor y la humedad relativa se eleva, la humedad se condensará en el tanque de almacenamiento. Gran parte de la humedad del aire es removida en forma de agua condensada del tanque de almacenamiento. Cualquier humedad remanente y partículas extrañas pueden removerse mediante un *filtro neumático*. Para asegurarse que la caída de presión resultante de la filtración sea pequeña, la capacidad del filtro neumático debe ser lo suficientemente grande.

Para los controladores neumáticos y los dispositivos fluidicos, el suministro de aire debe estar libre de aceite. Sin embargo, en otros equipos el suministro de aire debe contener aceite atomizado para lubricar el actuador neumático. El *lubricador* es un dispositivo que atomiza aceite en el flujo de aire con el objeto de lubricar el actuador neumático. Usualmente un filtro neumático, una válvula de control de presión, y un lubricador están combinados en una unidad, conocida como *unidad de control de presión de aire*, como se muestra en la Fig. 5-6.



**Actuadores neumáticos.** Los *actuadores neumáticos*, los cuales convierten la energía neumática en energía mecánica, pueden dividirse en dos tipos: el cilindro neumático (para movimiento lineal) y el motor neumático (para movimiento rotatorio continuo). Los actuadores neumáticos más comúnmente usados caen dentro del grupo de cilindro. Pueden obtenerse diferentes movimientos no lineales (tal como el movimiento rotatorio angular limitado) combinando los mecanismos apropiados de movimiento lineal del actuador del tipo de cilindro.

**Cilindros neumáticos.** Los *cilindros neumáticos* pueden clasificarse como los del tipo de pistón, del tipo de émbolo sumergido (ariete) y del tipo de fuelle. En la Fig. 5-7, se dan diagramas esquemáticos de cada uno de ellos. Los cilindros del tipo de fuelle no tienen partes en rozamiento, pero deben ser de carrera corta con gran diámetro.



**Fig. 5-7.** (a) Cilindro neumático del tipo de pistón; (b) cilindro neumático del tipo de émbolo sumergido; (c) cilindro neumático del tipo de fuelle.

Los cilindros del tipo pistón pueden adoptar diferentes configuraciones como se muestra en la Fig. 5-8.

Cuando se usa aire como medio de transmisión de potencia, es importante reconocer el efecto de la compresibilidad sobre el funcionamiento del sistema. Considérese el sistema neumático mostrado en la Fig. 5-9. Cuando el aire comprimido entra del puerto 1, la presión a la cámara A se desarrolla hasta que la fuerza de presión excede la fuerza de fricción estática máxima que existe entre la superficie del cilindro y la superficie del pistón. Este crecimiento de la presión es rápido, puesto que el volumen de la cámara A es pequeño. Al arrancar el movimiento, la fricción se reduce en forma abrupta porque la fricción deslizante es considerablemente menor que la fricción es-



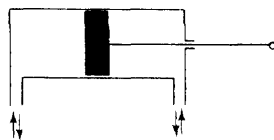
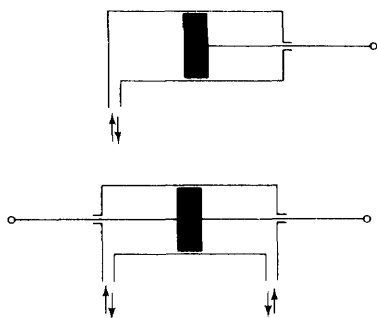


Fig. 5-8. Cilindros del tipo de pistón.

tática máxima. En consecuencia, el pistón desplegará un movimiento impulsivo y golpeará la abrazadera casi instantáneamente. Nótese que inmediatamente después de arrancar el movimiento impulsivo del pistón, el volumen de la cámara A se incrementará rápidamente. Esta situación causará una caída de presión súbita en la cámara porque el flujo de entrada de aire a la cámara no se puede asimilar con el incremento en volumen de la cámara. (En algunos casos, la fuerza de afianzamiento puede resultar insuficiente hasta que el aire comprimido ha llenado el volumen incrementado de la cámara A.) El aire comprimido suministrado a la cámara A, una vez que el pistón ha golpeado la abrazadera, hará menos trabajo útil del que pudiera, puesto que el aire pronto será purgado a la atmósfera a medida que la válvula opere y el pistón se mueva a la izquierda. (Tal pérdida de energía disminuye la eficiencia del sistema neumático.) Como resultado de esta situación, es imposible un control de velocidad preciso del pistón.

En algunos equipos, si la carrera necesaria es muy corta, una válvula de control de velocidad para controlar la velocidad del pistón será impotente porque una carrera corta terminará antes de que la velocidad se haga uniforme. Entonces, será necesario utilizar un cilindro largo y reducir la carrera por medio de un mecanismo de enlace (Fig. 5-10).

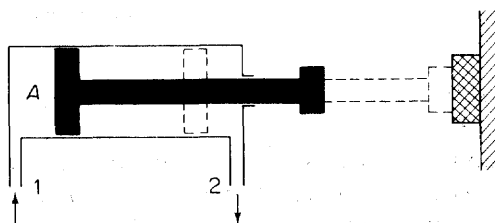


Fig. 5-9. Sistema neumático.

En muchos cilindros del tipo de pistón, el control exacto del movimiento de baja velocidad del pistón es difícil. Con el objeto de obtener tal control, los cilindros neumáticos pueden combinarse con cilindros hidráulicos como en la Fig. 5-11. (En cada diagrama una válvula de control de flujo controla el flujo hidráulico al cilindro hidráulico. Puesto que los pistones de

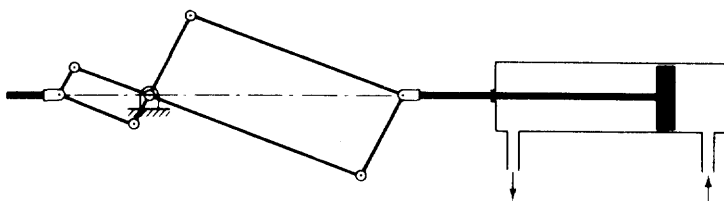


Fig. 5-10. Mecanismo de enlace para reducir la carrera.

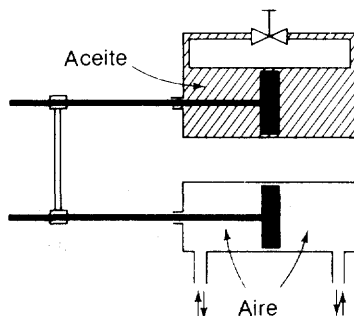
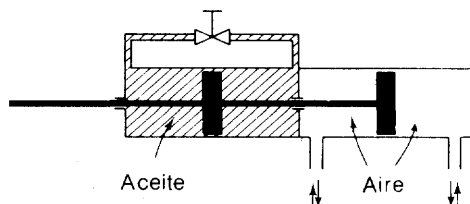


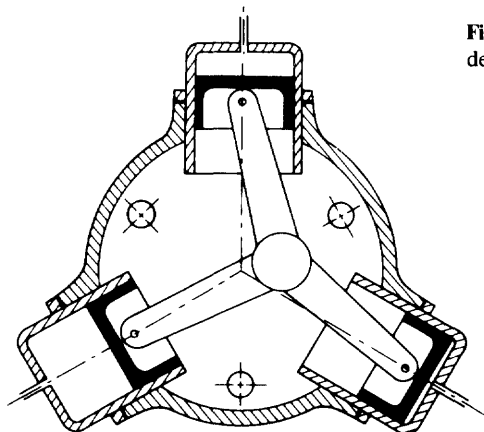
Fig. 5-11. Cilindros neumáticos combinados con cilindros hidráulicos.

ambos cilindros, el hidráulico y el neumático están conectados mecánicamente, las velocidades de ambos pistones están controlados de modo semejante.)

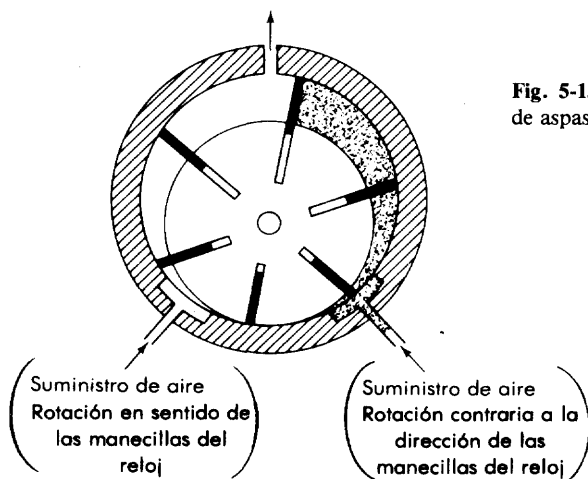
**Comentarios sobre los cilindros neumáticos.** Es importante que se tenga el cuidado apropiado (tal como se enlista abajo) para tener buen éxito en la operación de los cilindros neumáticos sin problemas.

1. La barra del pistón debe estar libre de momentos de flexión.
2. Al manejar una carga de gran inercia, debe proveerse un tapón además del mecanismo de colchón del cilindro.
3. Si un cilindro va a terminar su operación, debe añadirse una cantidad suficiente de aceite atomizado al aire limpio (libre de polvo y humedad) del cilindro.

**Motores neumáticos.** Hay dos clases de *motores neumáticos*, los de pistón y los de aspa. La Fig. 5-12 muestra un ejemplo de los primeros. Al suministrar aire comprimido a los tres cilindros en el orden apropiado, el cigüeñal puede hacerse girar en la dirección deseada. Tal motor neumático del tipo de pistón gira a baja velocidad pero tiene un gran par de salida.



**Fig. 5-12.** Motor neumático del tipo de pistón.



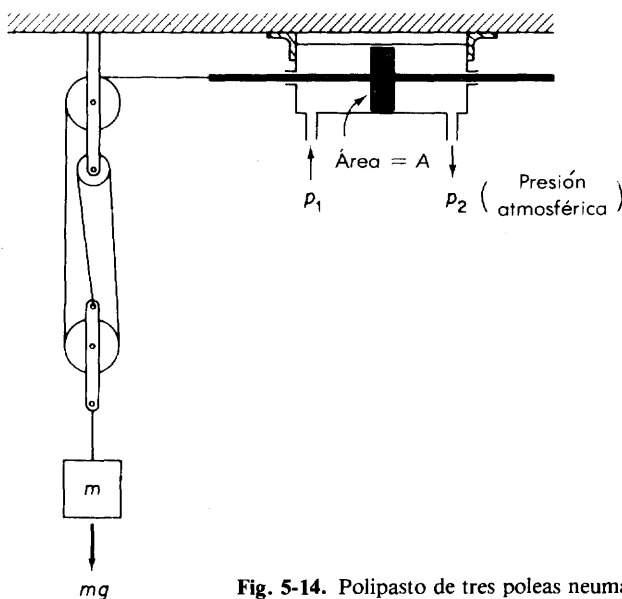
**Fig. 5-13.** Motor neumático del tipo de aspas.

Un motor neumático del tipo de aspa se ilustra en la Fig. 5-13. Cuando se suministra aire comprimido a los compartimentos, el rotor gira a causa del desbalanceo de la fuerza aplicada a las aspas. Este tipo gira a alta velocidad, pero la potencia de salida es más bien limitada.

Los motores neumáticos encuentran un uso extenso en dispositivos tales como los taladros neumáticos y los esmeriles neumáticos, tanto como en muchas máquinas de minería. Este uso difundido se basa en los siguientes factores.

1. Si el motor neumático se sobrecarga, la fuerza de la presión del aire y la fuerza de la carga se balancean entre sí y el motor simplemente se detiene sin sufrir daño.
2. El motor neumático es a prueba de incendio y explosión.
3. El motor neumático tiene un gran par de arranque.
4. Son posibles los arranques y paros rápidos.
5. La reversión de la dirección de la rotación es fácil.
6. El motor neumático tiene un peso ligero comparado con el motor eléctrico de la misma capacidad de salida.

**Ejemplo 5-1.** En el polipasto neumático de tres poleas de la Fig. 5-14, supóngase que el área  $A$  del pistón del actuador neumático es de  $15 \text{ in}^2$  y que la presión de suministro  $p_1$  del aire es de 70 psig. Encuéntrese la masa  $m$  del peso máximo que puede ser levantado.



**Fig. 5-14.** Polipasto de tres poleas neumático.

Puesto que la tensión  $F$  en el cable es la misma en su longitud entera y tres cables soportan el peso  $mg$ , obtenemos

$$3F = mg$$

La fuerza de elevación es igual a la tensión  $F$ . Por lo tanto,

$$A(p_1 - p_2) = F = \frac{mg}{3}$$

o bien

$$mg = 3A(p_1 - p_2) = 3 \times 15 \times 70 = 3150 \text{ lb}_f$$

Nótese que la masa  $m$  en slugs es

$$m = \frac{3150}{32.2} = 97.8 \text{ slugs}$$

**Ejemplo 5-2.** Resuélvase el mismo problema del ejemplo 5-1 en términos de unidades SI.

Puesto que  $1 \text{ in}^2 = 2.54^2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , el área  $A$  del pistón es

$$A = 96.77 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

La diferencia de presión  $p_1 - p_2$  es

$$p_1 - p_2 = 70 \frac{\text{lb}_f}{\text{in.}^2} = \frac{70 \times 4.448 \text{ N}}{2.54^2 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 48.26 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

En consecuencia,

$$mg = 3A(p_1 - p_2) = 3 \times 96.77 \times 10^{-4} \times 48.26 \times 10^4 = 1.401 \times 10^4 \text{ N}$$

La masa  $m$  del peso máximo que puede ser levantado es

$$m = \frac{1.401 \times 10^4}{9.81} = 1428 \text{ kg}$$

**Válvulas de control de presión.** En un sistema neumático cierta cantidad de aire comprimido se almacena en un tanque. Cuando se presenta la necesidad, se toma aire comprimido del tanque y la presión se reduce por medio de una válvula de control de presión a un valor deseado para asegurar la operación de los dispositivos neumáticos. Las válvulas de control de presión pueden dividirse en válvulas reductoras de presión y válvulas de alivio.

**Válvulas reductoras de presión.** La figura 5-15 muestra una válvula reductora de presión de acción directa sin alivio. Cuando el resorte grande se abate por la rotación del maneral, la barra de la válvula baja, permitiendo que el aire fluya del lado primario al secundario. Si la presión en el lado secundario se eleva, el diafragma será empujado hacia arriba, en un paso que tiende a cerrar el conductor de aire. De esta manera, se controla el flujo de aire y la presión en el lado secundario se mantienen constante.

En la Fig. 5-16 se representa una válvula reductora de presión actuada por piloto. Aquí el control de presión del lado secundario ocurre a través de la presión del aire más que a través del resorte, como en el caso de la válvula de acción directa. El principio de operación es el mismo de la válvula de acción directa de la Fig. 5-15.

Las ventajas de las válvulas actuadas por piloto son las siguientes.

1. Las características de flujo de la válvula actuada por piloto son superiores a las de la válvula de acción directa.

2. El control de presión de un flujo de aire grande ocurre fácilmente con válvulas actuadas por piloto.
3. El control remoto es posible con válvulas actuadas por piloto, en tanto que es imposible con válvulas de acción directa.

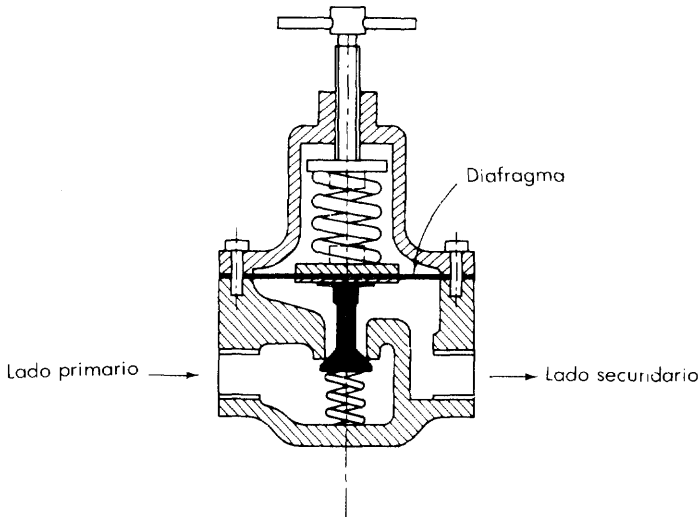


Fig. 5-15. Válvula reductora de presión de acción directa.

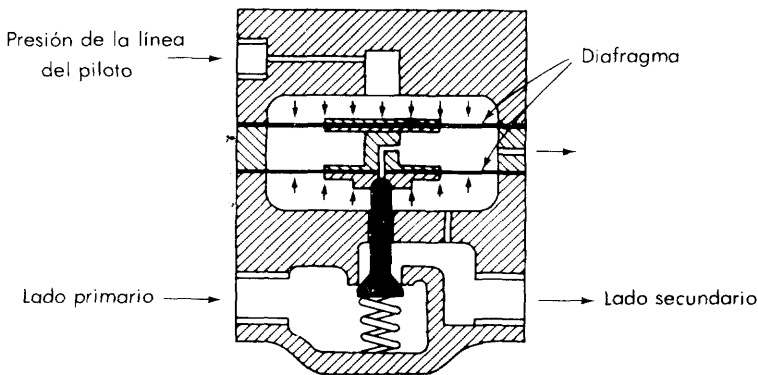


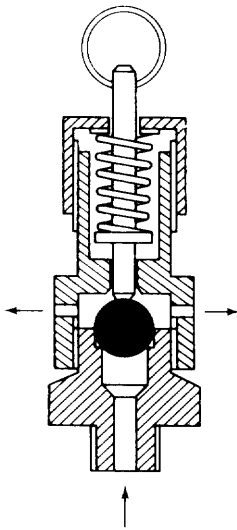
Fig. 5-16. Válvula reductora de presión actuada por piloto.

**Válvulas de alivio.** En los circuitos neumáticos, la presión del aire en los tubos se controla por medio de válvulas reductoras de presión. La presión del aire en el circuito puede, sin embargo, elevarse anormalmente como resultado del mal funcionamiento de algunas componentes del circuito. En este caso, se usa una *válvula de alivio* para liberar el exceso de aire a la at-

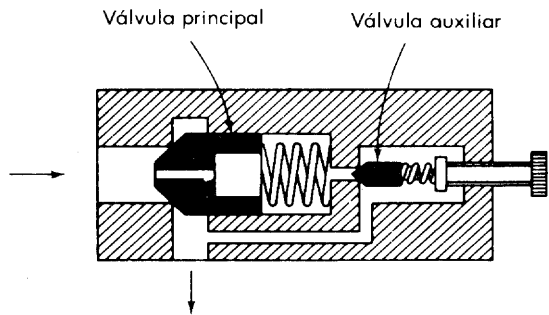
mósfera. Las válvulas de alivio son del tipo de acción directa o bien del tipo actuada por piloto.

Un ejemplo de la válvula de alivio de acción directa aparece en la Fig. 5-17. Estas válvulas de alivio de acción directa se encuentran instaladas en la mayor parte de los tanques de aire.

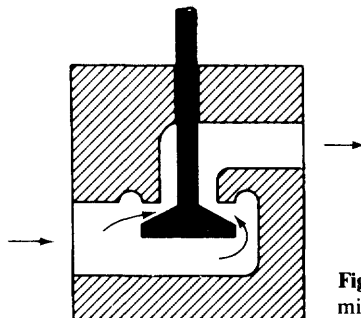
La figura 5-18 muestra una válvula de alivio actuada por piloto. Cuando la presión del circuito se eleva sobre un valor predeterminado, la válvula auxiliar se abre y la presión posterior de la válvula principal se abate, en consecuencia, la válvula principal se retrae y permite que el aire escape a la atmósfera. Este tipo de válvula de alivio actuada por piloto es conveniente cuando la presión de ruptura es de  $10^6 \text{ N/m}^2$  (1 MPa) manométrica (aproximadamente  $10 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  manométrica o 145 psig) o mayor.



**Fig. 5-17.** Válvula de acción directa de alivio.



**Fig. 5-18.** Válvula actuada por piloto de alivio.



**Fig. 5-19.** Válvula de movimiento vertical.

**Válvulas de control de flujo.** Las razones de flujo pueden ser controladas por la *válvula de control de flujo*, las cuales vienen en forma de válvulas de movimiento vertical, válvula de aguja, etcétera. La figura 5-19 muestra una válvula de movimiento vertical. Ésta se abre totalmente cuando el huso vertical baja alrededor de un cuarto del diámetro del puerto. En general, este tipo tiene buenas características.

**Válvulas de control direccional.** Las válvulas que controlan la dirección del flujo se llaman *válvulas de control direccional*. Por ejemplo, son necesarias para cambiar la dirección del movimiento del pistón de potencia. Las válvulas de control direccional pueden clasificarse como válvulas deslizantes y válvulas de carretes.

En la figura 5-20 se muestran ejemplos de válvulas deslizantes. Este tipo es de larga vida y pueden hacerse de tamaño pequeño, pero requieren de una fuerza más bien grande para ser operadas.

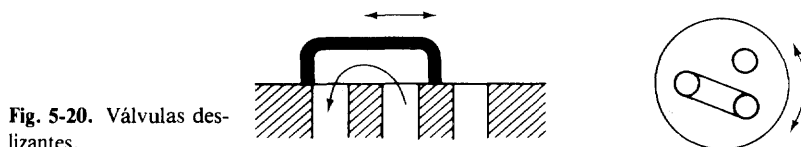


Fig. 5-20. Válvulas deslizantes.

La figura 5-21 muestra una válvula de carretes, la cual es una válvula balanceada que requiere una pequeña fuerza para ser operada. Puesto que ambas, la deslizante y la de carretes están fabricadas con precisión, el polvo en el suministro de aire no causará dificultades en la operación normal.

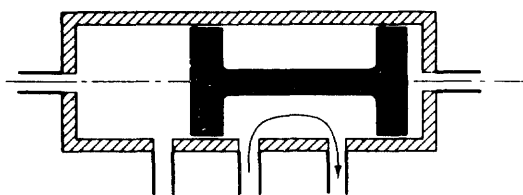


Fig. 5-21. Válvula de carretes.

**Válvulas magnéticas.** Usadas extensamente para controlar flujos en sistemas neumáticos, las válvulas magnéticas operan sobre el principio de encendido o apagado (abierto o cerrado).

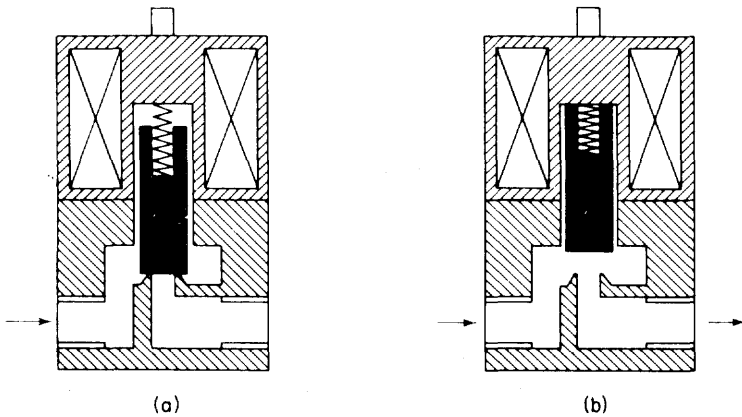
La figura 5-22(a) muestra una *válvula magnética de dos puertos de acción directa* en la cual el magneto está en posición de apagado y la válvula está en posición cerrada. La figura 5-22(b) muestra el magneto en la posición de encendido y la válvula en la posición abierta. (La posición de la válvula se cambia por medio de un solenoide.)

Una *válvula magnética de tres puertos, dos posiciones, de acción directa* con magneto para encendido y apagado se ilustra en la Fig. 5-23(a) y (b), respectivamente. Estas válvulas se usan para control secuencial, conmuta-

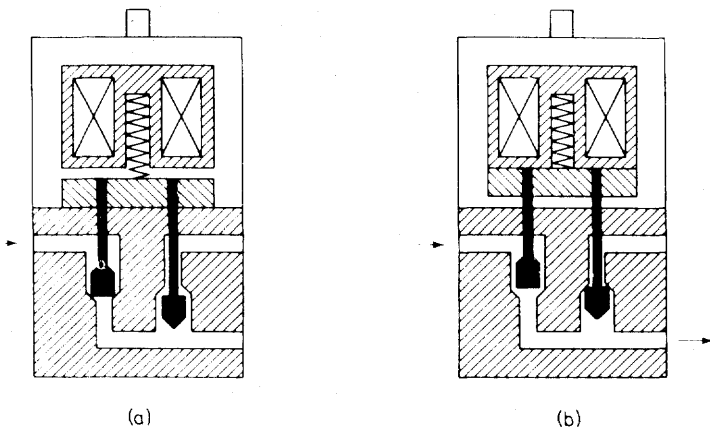


ción de alta presión y baja presión y operaciones similares. En válvulas de gran capacidad se prefieren normalmente válvulas actuadas por piloto más que válvulas de acción directa.

**Válvulas piloto neumáticas de tres puertos.** La figura 5-24 muestra una *válvula piloto neumática de tres puertos* que se usa para conmutar trayectorias de flujo. [La figura 5-24(a) corresponde a la posición de cerrada y la figura 5-24(b) a la posición de abierta.] Diferente de las válvulas magnéticas, esta clase no usa electricidad y por lo tanto puede usarse ventajosamente cuando la temperatura o la humedad son muy altas o cuando se manejan gases explosivos.

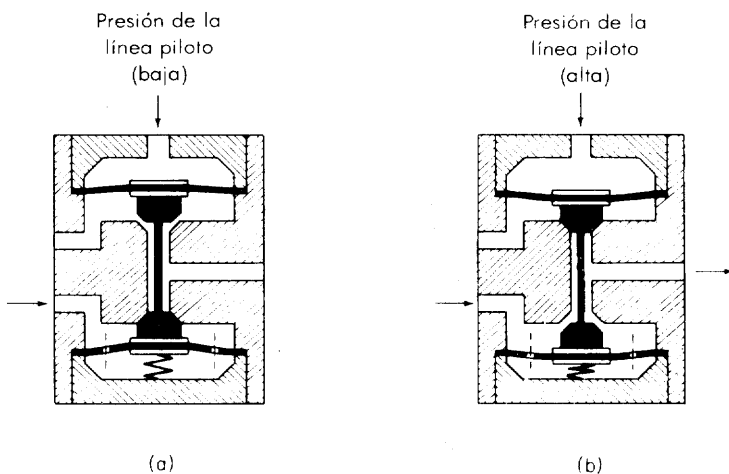


**Fig. 5-22.** Válvula magnética de acción directa, de dos puertos; (a) posición de válvula cerrada (magneto apagado); (b) posición de válvula abierta (magneto encendido).



**Fig. 5-23.** Válvula magnética de acción directa, de dos posiciones, tres puertos; (a) posición de válvula cerrada (magneto apagado); (b) posición de válvula abierta (magneto encendido).

**Válvulas de interfaz.** Con el advenimiento de los dispositivos fluidicos la presión en la línea piloto se ha hecho más y más baja. La presión de salida de los dispositivos fluidicos es del orden de  $1 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup> manométrica (aproximadamente 0.1 kg<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup> manométrica o 1.4 psig). Las válvulas piloto neumáticas usadas en conexión con los dispositivos fluidicos se llaman *vál-*



**Fig. 5-24.** Válvula piloto neumática de tres puertos; (a) posición de válvula cerrada; (b) posición de válvula abierta.

*vula de interfaz.* La presión en la línea piloto de la válvula de interfaz es muy baja, algo como  $7 \times 10^2$  a  $1 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup> manométrica (aproximadamente 0.007 a 0.1 kg<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup> manométrica o 0.1 a 1.4 psig).

En la Fig. 5-25(a), la cual muestra una válvula de interfaz, la presión aplicada al pistón es atmosférica y la válvula principal está en la posición de cerrada. Cuando se aplica la presión de la línea piloto al pistón como se muestra en la Fig. 5-25(b), el émbolo sumergido cierra la tobera fuente. Este paso causa que la presión de la cámara sobre el diafragma I se eleve, con el resultado de que el diafragma es empujado hacia abajo y la válvula principal se abre y resulta el flujo del puerto A al puerto B.

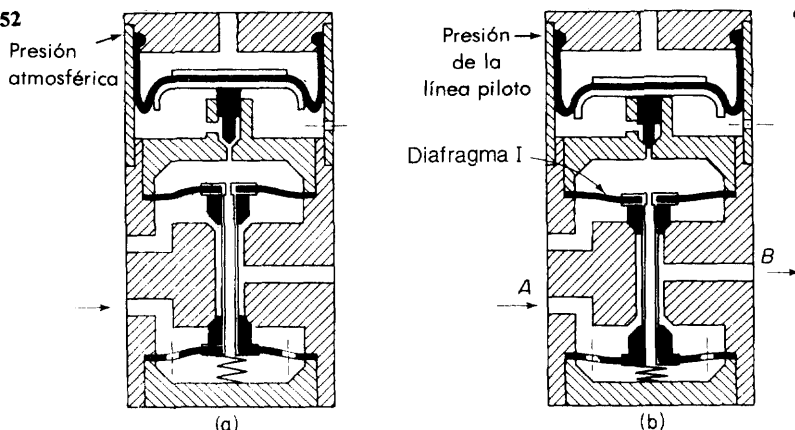


Fig. 5-25. Válvula de interfaz; (a) posición de válvula cerrada; (b) posición de válvula abierta.

**Válvulas de retención.** Una *válvula de retención* (Fig. 5-26) permite al aire o gas fluir en una dirección solamente por medio de un resorte y una válvula.

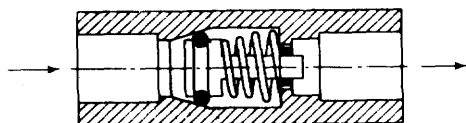


Fig. 5-26. Válvula de retención.

**Válvulas de vaivén.** La figura 5-27 muestra una *válvula de vaivén*, dispositivo que, en esencia, es una combinación de dos válvulas de retención. La dirección del flujo puede ser de A a C o de B a C, pero no de A a B o de B a A.

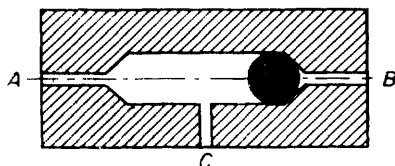


Fig. 5-27. Válvula de vaivén.

**Resumen sobre los sistemas neumáticos.** Ya sea solos o combinados con sistemas hidráulicos o eléctricos, los sistemas neumáticos tienen un uso muy difundido en la industria. En particular, los sistemas neumáticos y eléctricos se emplean a menudo en control secuencial. Tales sistemas híbridos ofrecen las ventajas de los sistemas neumático y eléctrico o hidráulico y las desventajas que pueden ser compensadas.

Las ventajas de los sistemas neumáticos sobre otros sistemas se enlistan a continuación.

1. En el sistema neumático la potencia de salida puede controlarse fácilmente.
2. La rapidez del actuador puede variarse con la amplitud, aunque el control de velocidad exacto es difícil de alcanzar.
3. La sobrecarga no perjudicará a los sistemas neumáticos.

4. Puesto que el aire comprimido se puede almacenar en un tanque, el sistema neumático puede responder a una fuerte demanda ocasional aun si la compresora del sistema es de tamaño pequeño.
5. El sistema neumático puede operarse en una escala amplia de temperatura y está a prueba de incendio y explosión.

Algunas desventajas de los sistemas neumáticos, en general, son los siguientes.

1. El aire no tiene la capacidad de lubricar las partes móviles.
2. La humedad y las partículas extrañas en el aire pueden causar dificultades en la operación normal de los sistemas neumáticos.
3. La eficiencia de los sistemas neumáticos es generalmente baja (20 a 30%).
4. La compresibilidad del aire causa atraso en la respuesta.

### 5-3 PROPIEDADES FÍSICAS Y TERMODINÁMICAS DE LOS GASES

En esta sección revisaremos primero las propiedades del aire y después expondremos brevemente las propiedades termodinámicas de los gases.

**Propiedades físicas del aire.** El aire que no contiene humedad se llama *aire seco*. La composición volumétrica del aire seco al nivel del mar es aproximadamente

$$\begin{aligned} \text{N}_2: & \quad 78\% \\ \text{O}_2: & \quad 21\% \\ \text{Ar, CO}_2, \text{ etc.:} & \quad 1\% \end{aligned}$$

Las propiedades físicas del aire y otros gases a la presión y temperatura estándar se muestran en la tabla 5-1. La presión estándar  $p$  y la temperatura  $t$  se definen como

$$\begin{aligned} p &= 1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs} = 1.0332 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 \text{ abs} \\ &= 14.7 \text{ lb}_f/\text{in.}^2 \text{ abs} = 14.7 \text{ psia} \\ t &= 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K} = 32^\circ\text{F} = 492^\circ\text{R} \end{aligned}$$

La densidad  $\rho$ , el volumen específico  $v$ , y el peso específico  $\gamma$  del aire a la presión y la temperatura estándar son

$$\begin{aligned} \rho &= 1.293 \text{ kg/m}^3 \\ v &= 0.7733 \text{ m}^3/\text{kg} \\ \gamma &= 12.68 \text{ N/m}^3 \end{aligned}$$

Tabla 5-1. PROPIEDADES DE LOS GASES

Gas	Peso molecular	Constante del gas $R_{\text{gas}}$		Calor específico kcal/kg K o Btu/lb °R		Relación de calores específicos $c_p/c_v$
		N-m/kg K	ft-lb <sub>f</sub> /lb °R	$c_p$	$c_v$	
Aire	29.0	287	53.3	0.240	0.171	1.40
Hidrógeno (H <sub>2</sub> )	2.02	4121	766	3.40	2.42	1.41
Nitrógeno (N <sub>2</sub> )	28.0	297	55.2	0.248	0.177	1.40
Oxígeno (O <sub>2</sub> )	32.0	260	48.3	0.218	0.156	1.40
Vapor de agua (H <sub>2</sub> O)	18.0	462	85.8	0.444	0.334	1.33

**Unidades de calor.** El *calor* es energía transferida de un cuerpo a otro por una diferencia de temperatura. La unidad de calor del SI es el joule (J). Otras unidades de calor usadas comúnmente en cálculos de ingeniería son la kilocaloría (kcal) y la Btu (British thermal unit).

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N-m} = 2.389 \times 10^{-4} \text{ kcal} = 9,480 \times 10^{-4} \text{ Btu}$$

$$1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J} = \frac{1}{0.860} \text{ Wh} = 1.163 \text{ Wh}$$

$$1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J} = 778 \text{ ft-lb}_f$$

Desde el punto de vista de la ingeniería, la kilocaloría puede considerarse como la energía necesaria para elevar la temperatura de un kilogramo de agua de 14.5 a 15.5°C. La Btu puede considerarse como la energía requerida para elevar una libra de agua un grado Fahrenheit a algún nivel de temperatura escogido arbitrariamente. (Estas unidades dan aproximadamente los mismos valores que los definidos antes.)

**Ley del gas perfecto.** Considérese un gas perfecto que cambia de un estado representado por  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  a un estado representado por  $p_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ . Si la temperatura se mantiene constante en  $T$  pero la presión (presión absoluta) cambia de  $p_1$  a  $p_2$ , entonces el volumen del gas cambiará de  $V_1$  a  $V'$  de modo tal que

$$p_1 V_1 = p_2 V' \quad (5-1)$$

Si la presión se mantiene constante pero la temperatura se incrementa de  $T_1$  a  $T_2$ , entonces el volumen del gas llega a  $V_2$ . Así,

$$\frac{V'}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (5-2)$$

Al eliminar  $V'$  entre las Ecs. (5-1) y (5-2), tenemos

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Esto significa que para una cantidad fija de un gas perfecto, sin importar los cambios físicos que ocurran,  $pV/T$  será constante. En consecuencia, podemos escribir

$$\frac{pV}{T} = \text{constante}$$

En presiones bajas y temperaturas bastante altas todo gas se acerca a una condición tal que

$$pV = mRT \quad (5-3)$$

donde  $p(\text{N/m}^2)$  es la presión absoluta del gas,  $V(\text{m}^3)$  el volumen del gas,  $m(\text{kg})$  la masa del gas,  $T(\text{K})$  la temperatura absoluta del gas, y  $R(\text{N-m/kg K})$  una constante del gas que depende del mismo.

Si el volumen del gas corresponde a un peso molecular, la constante del gas es la misma para todos los gases. Así que si definimos el volumen ocupado por un mole de gas como  $\bar{v}$  ( $\text{m}^3/\text{kg mol}$ ), la ley del gas perfecto viene a ser

$$p\bar{v} = \bar{R}T \quad (5-4)$$

donde  $\bar{R}$  se llama la *constante del gas universal*. El valor de la constante del gas universal es

$$\bar{R} = 8314 \text{ N-m/kg-mole K} = 1545 \text{ ft-lb}_f/\text{lb-mole } ^\circ\text{R}$$

El gas satisface la Ec. (5-4) se define como un *gas perfecto*. Los gases reales por abajo de la presión crítica y por arriba de la temperatura crítica tienden a obedecer la ley del gas perfecto.

**Ejemplo 5-3.** Hállese el valor de  $R_{\text{aire}}$ , la constante del gas para el aire.

De la Ec. (5-3)

$$R = \frac{pV}{mT} = \frac{pv}{T}$$

donde  $v = V/m =$  volumen específico. El volumen específico del aire a la presión y la temperatura estándar es

$$v = 0.7733 = \frac{1}{1.293} \text{ m}^3/\text{kg}$$

La presión y la temperatura estándar son

$$p = 1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs}$$

$$T = 273 \text{ K}$$

Entonces, se sigue que

$$R_{\text{aire}} = \frac{1.0133 \times 10^5}{1.293 \times 273} = 287 \text{ N-m/kg K} = 29.27 \text{ kg}_f\text{-m/kg K}$$

En términos de las unidades BES,

$$v = 12.39 \text{ ft}^3/\text{lb}$$

$$p = 14.7 \text{ lb}_f/\text{in.}^2 \text{ abs}$$

$$T = 492^\circ\text{R}$$

Y así,

$$R_{\text{aire}} = \frac{14.7 \times 144 \times 12.39}{492} = 53.3 \text{ ft-lb}_f/\text{lb } ^\circ\text{R}$$

**Propiedades termodinámicas de los gases.** Si un gas adquiere calor de sus alrededores, una porción de la energía se usa como una adición a la energía interna (como elevación de la temperatura) y el resto como un trabajo externo (como expansión del volumen). Así pues, el calor puede convertirse en trabajo y viceversa.

Aun cuando la energía se transforme de una forma a otra, no puede ser creada ni destruida. A este hecho se refiere la *primera ley de la termodinámica*.

Entre el trabajo mecánico  $L(\text{N-m})$  y la energía calorífica  $Q(\text{kcal})$ , existe la siguiente relación

$$L = JQ \quad \text{o} \quad Q = AL$$

donde

$$J = \text{equivalente mecánico del calor} = 4186 \text{ N-m/kcal}$$

$$= 426.9 \text{ kg}_f\text{-m/kcal} = 778 \text{ ft-lb}_f/\text{Btu} = 4.186 \text{ J/cal}$$

$$A = \text{equivalente térmico del trabajo}$$

$$= \frac{1}{J} = \text{recíproco del equivalente mecánico del calor}$$

Como se observó, si de los alrededores se aumenta un calor  $Q$  a un sistema, entonces una porción de calor se almacena como energía interna en forma de elevación de la temperatura y el resto se transforma en trabajo externo. Así,

$$Q = U_2 \neq U_1 + AL$$

donde

$$U_1 = \text{energía interna en el estado inicial}$$

$$U_2 = \text{energía interna en el estado final}$$

$$AL = \text{calor transformado en trabajo mecánico}$$

**Calores específicos.** El *calor específico* de un gas se define como la relación entre la cantidad de calor requerida para elevar la unidad de masa del gas un grado, y la requerida para elevar la unidad de masa del agua un grado a alguna temperatura especificada, utilizando el mismo sistema de unidades. Generalmente se usan para los gases dos calores específicos: uno a presión constante ( $c_p$ ) y otro a volumen constante ( $c_v$ ).

**Cambios de estado en el gas perfecto.** Un proceso se llama proceso *reversible* si tanto el sistema como sus alrededores pueden volver a sus estados

originales; de otro modo se le define como *irreversible*. Todos los procesos reales con irreversibles.

Expongamos brevemente los cambios de estado en un gas perfecto. La figura 5-28 muestra curvas presión-volumen de un gas perfecto. En el siguiente análisis, los subíndices 1 y 2 se refieren a los estados inicial y final, respectivamente.

1. *Cambio de estado a volumen constante* ( $p_2/p_1 = T_2/T_1$ ). Esto corresponde al cambio de estado cuando el volumen se mantiene constante como se muestra en la curva 1 de la Fig. 5-28. El calor  $Q_v$  kcal añadido al sistema de  $m$  kg de gas de los alrededores se suma a la energía interna, puesto que el volumen permanece constante, no se hace trabajo externo. Por lo tanto,

$$L = 0$$

y

$$U_2 - U_1 = Q_v = mc_v(T_2 - T_1) \quad \text{kcal}$$

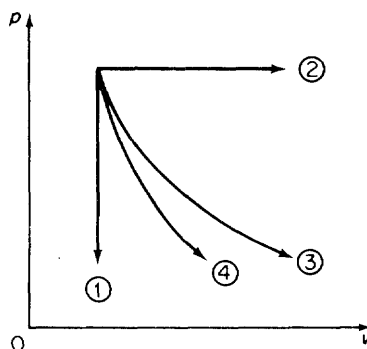


Fig. 5-28. Curvas presión-volumen de un gas perfecto.

2. *Cambio de estado a presión constante* ( $V_2/V_1 = T_2/T_1$ ). Corresponde al cambio de estado cuando la presión se mantiene constante como lo muestra la curva 2 de la Fig. 5-28. Si se añade un calor  $Q_p$  kcal al sistema de  $m$  kg de gas de los alrededores, una porción de él se usa para expandir el volumen y el resto se conserva como una adición a la energía interna. En relación con la Ec. (5-3),

$$L = p(V_2 - V_1) = mR(T_2 - T_1) \quad \text{N-m}$$

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= Q_p - AL = mc_p(T_2 - T_1) - AmR(T_2 - T_1) \\ &= m(c_p - AR)(T_2 - T_1) \quad \text{kcal} \end{aligned}$$

3. *Cambio de estado a temperatura constante (Isotérmico)* ( $p_2/p_1 = V_1/V_2$ ). Esta situación corresponde al cambio de estado cuando la temperatura se mantiene constante como lo muestra la curva 3 en la Fig. 5-28. Aquí, el calor  $Q_T$  kcal añadido al sistema de los alrededores se usa como trabajo externo (no hay incremento en la energía interna porque no hay cambio en



la temperatura. Por lo tanto,  $U_2 - U_1 = 0$  y el trabajo realizado es

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = mRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{N-m}$$

y

$$AL = Q_T \quad \text{kcal}$$

4. *Cambio de estado adiabático reversible (Isentrópico)* ( $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$ ).

El cambio de estado adiabático se refiere al estado en el cual no se transfiere calor al o del sistema. El cambio de estado adiabático reversible (adiabático sin fricción) se llama cambio de estado *isentrópico*. El cambio adiabático se muestra en la curva 4 de la Fig. 5-28. La relación entre la presión  $p$  y el volumen  $V$  es

$$pV^k = \text{constante}$$

donde  $k$  se llama *exponente adiabático*. Para un gas perfecto, es lo mismo que  $c_p/c_v$  o bien

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1.40$$

En el cambio de estado adiabático el calor  $Q$  kcal transferido al sistema o del sistema es cero. Así,

$$Q = 0$$

Y por lo tanto, el trabajo  $L$  hecho por el gas es igual al cambio en la energía interna o

$$AL = U_1 - U_2 = mc_v(T_1 - T_2) = \frac{c_v}{R}(p_1 V_1 - p_2 V_2) \quad \text{kcal}$$

Nótese que la compresión o expansión del aire en el cilindro neumático es casi adiabática.

5. *Cambio de estado politrópico* ( $p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$ ). El cambio de estado real de un gas real cualquiera, no cae exactamente en ninguno de los cuatro casos antes enlistados. Este puede representarse escogiendo apropiadamente el valor de  $n$  en la ecuación

$$pV_n = \text{constante}$$

El cambio de estado dado por esta última ecuación se llama *politrópico* y el exponente  $n$  se llama *exponente politrópico*. El cambio de estado politrópico es bastante general en el sentido de cubrir los cuatro cambios de estado antes mencionados escogiendo apropiadamente el valor de  $n$ . De hecho, dando al exponente politrópico diferentes valores, los cambios precedentes pueden ser casos especiales del cambio politrópico; esto es, para  $n = 1$ ,  $n = 0$ ,  $n = \infty$  y  $n = k$ , el cambio de estado es isotérmico, a presión constante, a volumen constante e isentrópico, respectivamente.

### \*5-4 FLUJO DE GASES A TRAVÉS DE ORIFICIOS

Puesto que el gas es compresible, el flujo de gas a través de tubos y orificios es más complicado que el flujo de líquidos. En esta sección se expone el análisis del flujo de gas a través de un orificio. En sistemas de presión neumática industrial, el flujo laminar ocurre rara vez; en consecuencia, aquí estamos interesados en el flujo turbulento a través de tubos, orificios y válvulas.

Comenzaremos obteniendo ecuaciones del flujo de gas a través de un orificio y mostraremos que en ciertas condiciones la velocidad del gas a través suyo llega a ser igual a la velocidad del sonido. Después obtendremos para la razón de flujo de masa del gas que fluye a través de un orificio. Finalmente, se obtendrán ecuaciones de la razón de flujo de masa para circuitos neumáticos.

**Flujo de gas perfecto a través de un orificio.** El flujo de un gas real a través de orificios y toberas puede aproximarse mediante un flujo isentrópico (adiabático sin fricción) si los efectos de la fricción y la transferencia de calor son despreciables.

Consideremos el flujo estable de un gas perfecto a través de un orificio como en la Fig. 5-29. Aquí la sección transversal 1 se ha tomado corriente arriba del orificio. La sección transversal en la vena contracta (donde el área del chorro emitido llega a ser mínimo) se denota como sección 2.

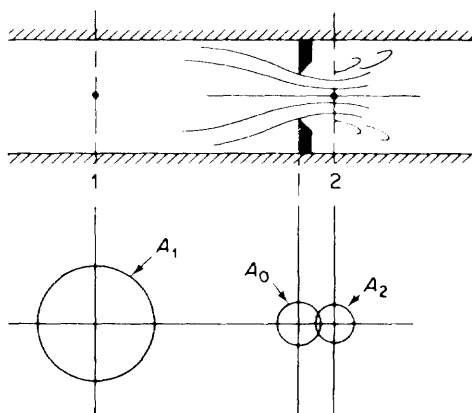


Fig. 5-29. Flujo permanente de un gas perfecto a través de un orificio.

El área de corriente  $A_2$  del chorro emitido es menor que el área del orificio  $A_0$ . La relación de  $A_2$  y  $A_0$  es el coeficiente de contracción  $C_c$  o

$$A_2 = C_c A_0$$

\*Las secciones marcadas con asterisco tratan temas más desafiantes que el resto del libro. Dependiendo de los objetivos del curso, estas secciones (aunque son importantes) pueden omitirse de la exposición en clase sin perder la continuidad del tema principal.

En relación con la Fig. 5-29, el estado del gas en la sección 1 es  $p_1, v_1, T_1$  y la correspondiente a la sección 2 es  $p_2, v_2, T_2$ . Las velocidades en la sección 1 y la sección 2 están denotadas por  $w_1$  y  $w_2$ , respectivamente. Las presiones  $p_1$  y  $p_2$  son presiones absolutas.

Para el cambio de estado isentrópico, tenemos

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k = \text{constante}$$

Notando que el volumen específico  $v$  es el recíproco de la densidad,

$$v = \frac{1}{\rho}$$

Por lo tanto,

$$p_1 = \rho_1^k p_2 \rho_2^{-k} \quad (5-5)$$

En la Sec. 4-4, derivamos la ecuación de Euler, entonces la Ec. (4-4) reescrita es

$$w dw + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0$$

donde  $w$  se usa para la velocidad. Despreciando el cambio en elevación, la ecuación de Euler se hace

$$w dw + \frac{dp}{\rho} = 0$$

Entonces, diferenciando la Ec. (5-5) con respecto a  $p_1$  y advirtiendo que  $p_2 \rho_2^{-k} = \text{constante}$ , tenemos

$$dp_1 = k \rho_1^{k-1} dp_1 p_2 \rho_2^{-k} \quad (5-6)$$

La ecuación de Euler en la sección 1 es

$$w_1 dw_1 + \frac{dp_1}{\rho_1} = 0$$

Sustituyendo la Ec. (5-6) en esta última ecuación da

$$w_1 dw_1 + p_2 \rho_2^{-k} k \rho_1^{k-2} dp_1 = 0$$

Observando otra vez que  $p_2 \rho_2^{-k} = p_1 \rho_1^{-k} = \text{constante}$  e integrando esta última ecuación, encontramos

$$\frac{w_1^2}{2} + p_2 \rho_2^{-k} k \frac{\rho_1^{k-1}}{k-1} = \text{constante}$$

o bien

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \text{constante}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (5-7)$$

De la ecuación de continuidad

$$\rho_1 w_1 A_1 = \rho_2 w_2 A_2$$

se tiene que

$$w_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{A_2}{A_1} w_2 = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/k} \frac{A_2}{A_1} w_2 \quad (5-8)$$

Si sustituimos la Ec. (5-8) en la Ec. (5-7) y simplificamos, el resultado es

$$\frac{w_2^2}{2} = \frac{\frac{k}{k-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)}{1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2} \quad (5-9)$$

Si el área  $A_2$  es suficientemente pequeña comparada con el área  $A_1$  y observando entonces que  $p_2/p_1 < 1$ , podemos suponer

$$1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \div 1$$

Con esta suposición, la Ec. (5-9) se simplifica a

$$\frac{w_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$

La sustitución de  $\rho_2 = (p_2/p_1)^{1/k} \rho_1$  en esta última ecuación da

$$\frac{w_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]$$

o bien

$$w_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]} \quad (5-10)$$

La razón de flujo de masa  $G$  es

$$G = \rho_2 w_2 A_2 = \rho_2 A_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]}$$

Puesto que  $\rho_2 = (p_2/p_1)^{1/k} \rho_1$  y  $A_2 = C_c A_0$ , esta última ecuación puede escribirse

$$G = C_c A_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 \rho_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]}$$

Al obtenerla, no se consideran los efectos de la fricción debidos a la viscosidad del gas. Incluyendo tanto los efectos de la fricción que fueron despreciados y el coeficiente de contracción  $C_c$ , podemos introducir un coeficiente de descarga  $c$  (cuyo valor exacto puede determinarse experimentalmente) y escribir la razón de flujo de masa como

$$G = c A_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 \rho_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]} \quad (5-11)$$

Observando que  $p_1 = \rho_1 R T_1$ , la Ec. (5-11) puede modificarse en la siguiente forma

$$G = c A_0 \rho_1 \sqrt{\frac{2k}{k-1} R T_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]}$$

$$= c A_0 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{R} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]} \quad (5-12)$$

**Presión crítica, velocidad crítica y razón de flujo de gas máxima.** Para valores dados de  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $A_0$  y  $c$ , la razón de flujo de masa  $G$  se hace una función solamente de  $p_2$ . En la Fig. 5-30 se muestra una curva que relaciona a  $G$  y a  $p_2$ . La razón de flujo de masa se hace máxima en el punto  $B$ . El valor particular de la presión  $p_2$  que corresponde al punto  $B$  puede obtenerse como la presión  $p_2$  para la cual

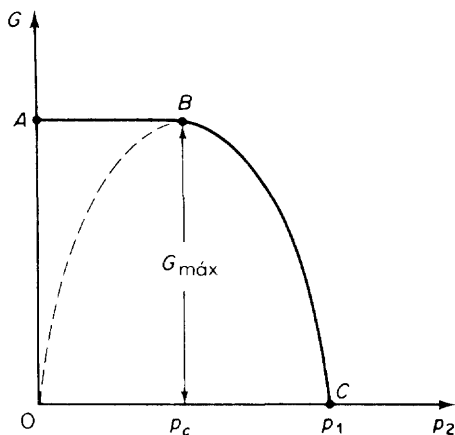
$$\frac{\partial G}{\partial p_2} = 0$$

En relación con la Ec. (5-12), esta condición puede modificarse a

$$\frac{\partial \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]}{\partial p_2} = 0$$

la cual resulta en

$$\frac{2}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(2/k)-1} \left( \frac{1}{p_1} \right) - \frac{k+1}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/k} \left( \frac{1}{p_1} \right) = 0$$



**Fig. 5-30.** Curva de relación entre la razón de flujo de masa  $G$  y la presión  $p_2$ .

Al denotar este valor particular de  $p_2$  como  $p_c$ , tenemos

$$\left( \frac{p_c}{p_1} \right)^{(k-1)/k} = \frac{2}{k+1}$$

o bien

$$p_c = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} p_1 \quad (5-13)$$

La presión  $p_c$  dada por la Ec. (5-13) se llama *presión crítica*.

La razón máxima de flujo de masa  $G_{máx}$  que ocurre cuando  $p_2 = p_c$  se

obtiene sustituyendo  $p_2 = p_c$  en la Ec. (5-11).

$$\begin{aligned} G_{\max} &= cA_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1}} p_1 \rho_1 \left[ \left( \frac{p_c}{p_1} \right)^{2/k} - \left( \frac{p_c}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right] \\ &= cA_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1}} p_1 \rho_1 \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right)^{2/(k-1)} - \left( \frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(k-1)} \right] \\ &= cA_0 \sqrt{\frac{2k}{k+1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{2/(k-1)}} p_1 \rho_1 \end{aligned} \quad (5-14)$$

Puesto que el valor de  $cA_0$  es constante y el valor de  $k$  para un gas dado es también una constante, la razón de flujo de masa máxima  $G_{\max}$  depende solamente de la condición en la sección 1.

**Velocidad crítica.** Sustituyendo  $p_2 = p_c$  en la Ec. (5-10) da la velocidad crítica  $w_c$ .

$$\begin{aligned} w_c &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_c}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left( 1 - \frac{2}{k+1} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_1}{\rho_1}} \end{aligned} \quad (5-15)$$

Nótese que para el cambio de estado isentrópico

$$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_c}{\rho_c^k} \quad (5-16)$$

De la Ec. (5-13) tenemos

$$p_1 = p_c \left( \frac{2}{k+1} \right)^{-k/(k-1)} \quad (5-17)$$

Y así, usando las Ecs. (5-16) y (5-17), encontramos

$$\frac{p_1^k}{\rho_1^k} = \frac{p_1}{\rho_1^k} p_1^{k-1} = \frac{p_c}{\rho_c^k} p_c^{k-1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{-k} = \frac{p_c^k}{\rho_c^k} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{-k}$$

o bien

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{-1} \frac{p_c}{\rho_c}$$

Al sustituir esta última ecuación en la Ec. (5-15), la velocidad crítica  $w_c$  se da como

$$w_c = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{-1} \frac{p_c}{\rho_c}} = \sqrt{k \frac{p_c}{\rho_c}} = \sqrt{kRT_c}$$

Nótese que  $c = \sqrt{kRT}$  es la velocidad del sonido. (Refiriéndose al problema A-5-9.) Por lo tanto, la velocidad  $w_c$  es igual a la velocidad del sonido. (La velocidad del sonido en un gas depende de la naturaleza del gas y de su temperatura absoluta.)

**Resumen del flujo de gas a través de un orificio.** La relación entre la razón de flujo de masa de gas a través de un orificio y la caída de presión no pueden expresarse mediante una sola ecuación porque hay dos tipos distintos de condiciones de flujo, la sónica y la subsónica. En la condición de flujo sónica  $p_2$  en la vena contracta permanece a la presión crítica  $p_c$ , independientemente de la presión corriente abajo. Así, la falta de efectos corriente abajo se reflejará posteriormente en la presión  $p_2$ .

En relación con la Fig. 5-30, si el valor de  $p_2$  se hace variar de un valor muy pequeño (comparando con  $p_1$ ) al valor igual a  $p_1$ , entonces la razón de flujo de masa  $G$  sigue la curva  $ABC$ . La razón de flujo de masa es constante en  $G_{\max}$  hasta que  $p_2$  se incrementa y se hace igual a  $p_c$  y de allí en adelante la razón de flujo de masa decrece y finalmente se hace cero cuando  $p_2$  alcanza  $p_1$ . El flujo de gas es sónico entre los puntos  $A$  y  $B$  y subsónico entre los puntos  $B$  y  $C$ .

**Formas alternativas de las ecuaciones de razón de flujo de masa.** La razón de flujo de masa para la condición de flujo subsónico está dada por la Ec. (5-11) o la Ec. (5-12). Introduzcamos el factor de expansión  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{k}{k-1} \frac{p_1^2}{p_2(p_1 - p_2)}} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right] \quad (5-18)$$

la cual también puede escribirse

$$\epsilon = \sqrt{\frac{k}{k-1} \frac{1}{(p_1/p_2) - 1} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{(k-1)/k} \left[ \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{(k-1)/k} - 1 \right]}$$

El valor del factor de expansión  $\epsilon$  depende de los valores de  $k$  y  $p_2/p_1$ . Sin embargo, esto es aproximadamente constante para  $p_1 \geq p_2 \geq p_c$ .

En términos de este factor de expansión, la Ec. (5-12) puede escribirse

$$G = c A_0 \epsilon \sqrt{\frac{2}{RT_1}} \sqrt{p_2(p_1 - p_2)} \quad (5-19)$$

La ventaja de introducir el factor de expansión  $\epsilon$  consiste en que para  $A_2 \ll A_1^2$ , donde las áreas  $A_1$  y  $A_2$  están definidas en la Fig. 5-29, las ecuaciones exactas para la razón de flujo de masa pueden ser aproximadas por expresiones más simples a expensas de introducir un error de sólo un bajo porcentaje.

La razón de flujo de masa para la condición de flujo sónico está dada por la Ec. (5-14). A continuación aparecen dos formas alternativas de esta ecuación. Al sustituir  $p_1 = p_1 RT_1$  en la Ec. (5-14), encontramos

$$G_{\max} = c A_0 p_1 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \sqrt{\frac{2kRT_1}{k+1}}$$

Sustituyendo  $p_1 = p_1/(RT_1)$  en la Ec. (5-14) da

$$G_{\max} = c A_0 \frac{p_1}{\sqrt{RT_1}} \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(k-1)}} \quad (5-20)$$

Las Ecs. (5-19) y (5-20) sirven como ecuaciones básicas para los cálculos de la razón de flujo de masa en el flujo de gas a través de un orificio.

**Flujo de aire a través de un orificio.** El análisis precedente puede aplicarse al análisis del flujo de aire en un controlador neumático, del flujo de aire del suministro al cilindro de potencia, etc. En el siguiente material obtendremos las ecuaciones de razón de flujo de masa para el aire mediante la sustitución de los valores apropiados de las constantes  $k$  y  $R$  en las Ecs. (5-19) y (5-20).

Considérese el flujo de aire a través de un orificio. (Consulte la Fig. 5-29.) Nótese primero que de las Ecs. (5-16) y (5-17) tenemos

$$\frac{p_c}{p_1} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \quad (5-21)$$

También

$$\frac{T_c}{T_1} = \frac{p_c}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_c} = \frac{2}{k+1} \quad (5-22)$$

Para el aire,  $k = 1.40$ . Así que usando las Ecs. (5-13), (5-21) y (5-22) obtenemos

$$\frac{p_c}{p_1} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} = 0.528 \quad \text{para } k = 1.40$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_1} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} = 0.634 \quad \text{para } k = 1.40$$

$$\frac{T_c}{T_1} = \frac{2}{k+1} = 0.833 \quad \text{para } k = 1.40$$

En relación con la Fig. 5-29, las últimas tres ecuaciones muestran que la presión crítica para el flujo de aire es 52.8% de la presión en la sección 1, la densidad se reduce en 37% y la temperatura absoluta cae alrededor de 17% de la sección 1 a la sección 2.

**Ecuación de la razón de flujo de masa para el aire cuando  $p_2 > 0.528p_1$ .** Cuando la condición de presión a través del orificio es tal que  $p_2 > 0.528p_1$ , la velocidad del flujo de aire a través del orificio es subsónica y la razón de flujo de masa se puede obtener sustituyendo  $R = R_{\text{aire}}$  en la Ec. (5-19) como sigue:

$$G_{\text{aire}} = c A_0 \epsilon \sqrt{\frac{2}{R_{\text{aire}} T_1}} \sqrt{p_2(p_1 - p_2)} \quad (5-23)$$

Al suponer que  $A_0$  se mide en  $\text{m}^2$ ,  $p_1$  y  $p_2$  en  $\text{N/m}^2$  abs, y  $T_1$  en K y sustituyendo  $R_{\text{aire}} = 287 \text{ N-m/kg K}$  en esta última ecuación, tenemos

$$G_{\text{aire}} = 0.0835 c A_0 \epsilon \frac{1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{p_2(p_1 - p_2)} \text{ kg/s} \quad (5-24)$$

donde el valor del factor de expansión  $\epsilon$  dado por la Ec. (5-18) puede ser



aproximado para  $k = 1.40$  y  $1 \geq p_2/p_1 \geq 0.528$  mediante la ecuación lineal

$$\epsilon = 0.97 + 0.0636 \left( \frac{p_2}{p_1} - 0.528 \right) \quad \left( 1 \geq \frac{p_2}{p_1} \geq 0.528 \right) \quad (5-25)$$

El valor de  $\epsilon$  varía linealmente de  $\epsilon = 1$  a  $p_2/p_1$ , a  $\epsilon = 0.97$  a  $p_2/p_1 = 0.528$ .

Puesto que el valor de  $\epsilon$  es casi constante para  $1 \geq p_2/p_1 \geq 0.528$ , al usar un valor promedio de 0.985 para  $\epsilon$ , la razón de flujo de masa  $G_{\text{aire}}$  está dado por

$$G_{\text{aire}} = 0.0822cA_0 \frac{1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{p_2(p_1 - p_2)} \text{ kg/s} \quad \left( 1 \geq \frac{p_2}{p_1} > 0.528 \right) \quad (5-26)$$

donde  $A_0$  se mide en  $\text{m}^2$ ,  $p_1$  y  $p_2$  en  $\text{N/m}^2$  abs, y  $T_1$  en K. Esta es una ecuación aproximada de la razón de flujo de masa para el flujo de aire a través de un orificio cuando  $p_2 > 0.528p_1$  y  $A_2^2 \ll A_1^2$ . La razón de flujo de masa  $G_{\text{aire}}$  depende del valor de  $c$ ,  $A_0$ , la temperatura corriente arriba  $T_1$ , la presión absoluta corriente arriba  $p_1$  y la presión absoluta  $p_2$ . Mientras sea  $p_2 > 0.528p_1$ , la velocidad del flujo de aire es subsónica y la Ec. (5-26) da la razón de flujo de masa.

**Ecuación de la razón de flujo para el aire cuando  $p_2 \leq 0.528p_1$ .** Cuando la condición de presión a través del orificio es tal que  $p_2 \leq 0.528p_1$ , el flujo del aire a través del orificio se produce a la velocidad del sonido y la razón de flujo de masa no está influida por la presión posterior del orificio. La razón de flujo de masa para esta condición se obtiene al sustituir  $k = 1.40$  y  $R = 287 \text{ N-m/kg K}$  en la Ec. (5-20); esto es,

$$G_{\text{aire, máx}} = 0.0404cA_0 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} \text{ kg/s} \quad \left( \frac{p_2}{p_1} \leq 0.528 \right) \quad (5-27)$$

donde  $A_0$  se mide en  $\text{m}^2$ ,  $p_1$  en  $\text{N/m}^2$  abs, y  $T_1$  en K. La razón de flujo de masa máxima  $G_{\text{aire, máx}}$  depende de los valores de  $c$ ,  $A_0$ , la temperatura corriente arriba  $T_1$  y la presión absoluta corriente arriba  $p_1$ , pero es independiente de la presión absoluta  $p_2$ . Mientras sea  $p_2 \leq 0.528p_1$ , la velocidad del flujo es sónica y la razón de flujo de masa permanece constante en  $G_{\text{aire, máx}}$ .

Nótese que las Ecs. (5-24) y (5-27) dan la misma razón de flujo de masa cuando  $p_2 = 0.528p_1$ . Para verificar esta declaración, adviértase primero que de la Ec. (5-25) tenemos  $\epsilon = 0.97$  para  $p_2/p_1 = 0.528$ . Entonces, sustituyendo  $\epsilon = 0.97$  y  $p_2 = 0.528p_1$  en la Ec. (5-24) da

$$G_{\text{aire}} = 0.0835 \times 0.97cA_0 \frac{1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{0.528p_1(1 - 0.528)p_1} = 0.0404cA_0 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}$$

la cual es la misma que la Ec. (5-27).

**Ejemplo 5-4.** En relación con la Fig. 5-29, supóngase que  $A_0 = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $c = 0.68$ ,  $p_1 = 2.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs, y  $T_1 = 273 \text{ K}$ . Suponiendo también que fluye aire, calcúlense las razones de flujo de masa para los dos casos siguientes.

- (a) La presión  $p_2$  es  $2 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs}$  y la condición de flujo es subsónica.  
 (b) La condición de flujo es sónica; esto es,  $p_2 \leq 0.528p_1$ , donde  $p_1$  y  $p_2$  son presiones absolutas.

Para las condiciones de flujo subsónicas, se aplica la Ec. (5-26); para las condiciones de flujo sónicas puede usarse la Ec. (5-27).

- (a) La razón de flujo de masa se obtiene sustituyendo los valores numéricos dados en la Ec. (5-26) como

$$G_{\text{aire}} = 0.0822 \times 0.68 \times 3 \times 10^{-4} \frac{1}{\sqrt{273}} \sqrt{2 \times 10^5 (2.5 \times 10^5 - 2 \times 10^5)} \\ = 0.101 \text{ kg/s}$$

- (b) La razón de flujo de masa se obtiene sustituyendo los valores numéricos dados en la Ec. (5-27) como

$$G_{\text{aire, máx}} = 0.0404 \times 0.68 \times 3 \times 10^{-4} \frac{2.5 \times 10^5}{\sqrt{273}} = 0.125 \text{ kg/s}$$

**Ejemplo 5-5.** Considérese el sistema neumático de presión mostrado en la Fig. 5-31 y suponga que, para  $t < 0$ , la presión absoluta de aire en el sistema es  $\bar{P}$ . En  $t = 0$  la presión en el lado izquierdo del orificio se cambia de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_i$ , donde  $p_i$  puede ser positiva o negativa. (En el presente análisis, suponemos que  $p_i$  es positiva. Si  $p_i$  fuera negativa, la dirección del flujo se invertiría.) Entonces, la presión de aire en el recipiente cambiará de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_o$ . Suponemos que los cambios en la presión (tanto  $p_i$  como  $p_o$ ) son suficientemente pequeños comparados con la presión absoluta  $\bar{P}$ . Suponiendo que la temperatura del sistema permanece constante, muéstrase que la razón de flujo de masa  $q$  es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presión  $\Delta p = p_i - p_o$ . Trácese una curva típica de  $\Delta p$  contra  $q$ .

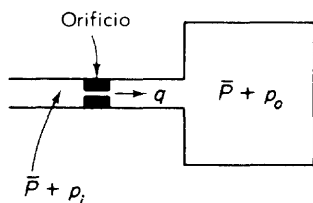


Fig. 5-31. Sistema de presión neumática.

Puesto que tanto  $p_i$  como  $p_o$  son suficientemente pequeñas comparadas con  $\bar{P}$ , la condición del flujo es subsónica [ $\bar{P} + p_o > 0.528(\bar{P} + p_i)$ ] y la Ec. (5-23) se aplica a este caso. Al sustituir  $p_1 = \bar{P} + p_i$  y  $p_2 = \bar{P} + p_o$  en la Ec. (5-23), tenemos

$$q = G_{\text{aire}} = cA_0 \epsilon \sqrt{\frac{2}{R_{\text{aire}} T_1}} \sqrt{(\bar{P} + p_o)(p_i - p_o)} \\ = cA_0 \epsilon \sqrt{\frac{2\bar{P}}{R_{\text{aire}} T_1}} \sqrt{1 + \frac{p_o}{\bar{P}}} \sqrt{p_i - p_o} \quad (5-28)$$

Dado que se supuso que  $p_0$  es suficientemente pequeña comparada con  $\bar{P}$ , como una primera aproximación tenemos

$$\sqrt{1 + \frac{p_0}{\bar{P}}} \doteq 1 + \frac{1}{2} \frac{p_0}{\bar{P}} \doteq 1$$

Entonces, la Ec. (5-28) puede simplificarse a

$$q = K\sqrt{p_i - p_o} = K\sqrt{\Delta p} \quad (5-29)$$

donde

$$K = cA_0\epsilon\sqrt{\frac{2\bar{P}}{R_{\text{aire}}T_1}} = 0.985cA_0\sqrt{\frac{2\bar{P}}{R_{\text{aire}}T_1}} = \text{constante}$$

$$\Delta p = p_i - p_o$$

Así pues, la razón de flujo de masa  $q$  es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presión  $\Delta p = p_i - p_o$  si  $p_o$  es suficientemente pequeña comparada con  $\bar{P}$ , donde  $\bar{P}$  es la presión absoluta del aire en estado estable. La figura 5-32 representa una curva típica  $\Delta p$  contra  $q$  basada en la Ec. (5-29).

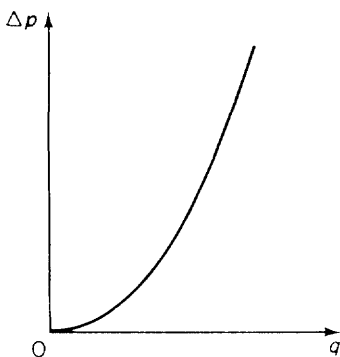


Fig. 5-32. Curva de diferencia de presión contra razón de flujo de masa.

Obsérvese que si la razón de flujo de masa  $q$  del sistema neumático de presión mostrado en la Fig. 5-31 se mide experimentalmente y la diferencia de presión  $\Delta p$  se traza contra la razón de flujo de masa  $q$ , entonces puede obtenerse una curva no lineal similar a la que se muestra en la Fig. 5-32. Tal curva desempeña un papel importante en la determinación del modelo matemático del sistema neumático mostrado en la Fig. 5-31. (Véanse detalles en la Sec. 5-5.)

**Áreas efectivas de secciones transversales en componentes neumáticas.** Al obtener las Ecs. (5-26) y (5-27), se supuso que el aire fluye a través de un orificio. Sin embargo, estas dos ecuaciones pueden servir como ecuaciones básicas para el cálculo de la razón de flujo de masa para el flujo de aire a través de válvulas y otros dispositivos restrictores del flujo en circuitos neumáticos, si el flujo a través de una componente neumática que

incluya a una válvula u otro dispositivo restrictor del flujo puede considerarse equivalente al flujo a través de un orificio.

Aunque el área  $A_0$  puede no estar definida para una válvula u otro dispositivo restrictor de flujo, sería posible definir un área de orificio equivalente para una componente neumática dada, que incluya los mismos dispositivos. Tal área de orificio equivalente puede determinarse como sigue. Aplíquese la presión  $p_1$  a la entrada de la componente neumática. Entonces, aparecerá la presión  $p_2$  a la salida de la componente. Para una presión dada  $p_1$ , si medimos la temperatura  $T_1$ , la razón de flujo de masa  $G$ , y la presión  $p_2$ , entonces se puede estimar un área de orificio equivalente  $cA_0$  usando la Ec. (5-26) o la (5-27). (Las presiones  $p_1$  o  $p_2$  se miden en  $\text{N/m}^2$  abs y la temperatura  $T_1$  en K.) Este tipo de área de orificio equivalente  $cA_0$  con frecuencia se llama *área de sección transversal efectiva* de una componente neumática. El concepto de área de sección transversal efectiva es útil para calcular la razón de flujo de masa en componentes neumáticas.

**Flujo de aire a través de una válvula en un circuito neumático.** Si se abre una válvula en un circuito neumático, la relación de presiones  $p_2/p_1$  (donde  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones absolutas corriente arriba y corriente abajo de la válvula) inicialmente puede ser pequeña ( $p_2/p_1 \leq 0.528$ ) de modo que el flujo de aire a través de la válvula se hace flujo sónico y la razón de flujo de masa puede darse mediante la Ec. (5-27) donde el área de sección transversal efectiva de la válvula se usa en  $cA_0$ . Al transcurrir el tiempo y la relación de presión  $p_2/p_1$  se incrementa y se haga  $p_2/p_1 > 0.528$ , el flujo de aire a través de la válvula se hace subsónico y la razón de flujo de masa se determina de acuerdo a la Ec. (5-26), donde el área de sección transversal efectiva de la válvula se usa en  $cA_0$ .

## 5-5 ELABORACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS (MODELADO MATEMÁTICO) DE SISTEMAS NEUMÁTICOS

Como en los sistemas mecánicos, eléctricos e hidráulicos, tres tipos de elementos (resistivos, capacitivos y de inercia) constituyen los elementos básicos de los sistemas neumáticos. Los modelos matemáticos de estos sistemas pueden escribirse en términos de los tres.

Comenzaremos esta sección obteniendo expresiones específicas de los elementos básicos de los sistemas neumáticos basadas en las definiciones generales de la resistencia, la capacitancia y la inercia expuestas en la sección 4-5, seguidas por la derivación de un modelo matemático de un sistema de presión neumática consistente en un recipiente y un tubo con un orificio.

**Resistencia.** La *resistencia* al flujo de aire en tubos, orificios, válvulas y cualesquiera otros dispositivos restrictores de flujo puede definirse como

el cambio en la presión diferencial (existente entre la corriente arriba y la corriente abajo de un dispositivo restrictor de flujo)  $(\text{N/m}^2)$  necesaria para hacer un cambio unitario en la razón de flujo de masa  $(\text{kg/s})$  o

$$\text{Resistencia } R = \frac{\text{cambio en la presión diferencial}}{\text{cambio en la razón de flujo de masa}} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}}$$

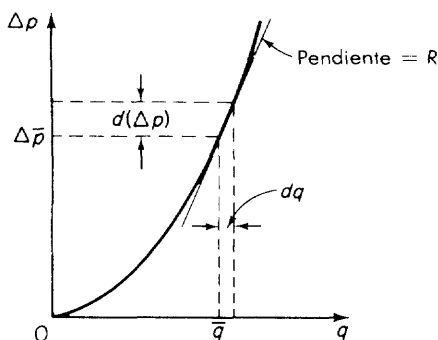
$$\text{o también } \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

Por lo tanto, la resistencia  $R$  puede expresarse como

$$R = \frac{d(\Delta p)}{dq} \quad (5-30)$$

donde  $d(\Delta p)$  es un cambio en la presión diferencial y  $dq$  es un cambio en la razón de flujo de masa.

En flujo estable, donde  $\Delta p = \text{constante} = \bar{\Delta p}$  y  $q = \text{constante} = \bar{q}$ , la resistencia  $R$  en esta condición de operación puede obtenerse fácilmente si se dispone de una curva experimental que relacione  $\Delta p$  y  $q$ . En relación con la Fig. 5-33, considérese un pequeño cambio  $d(\Delta p)$  cercano a la condición de operación  $\bar{\Delta p}$ . El pequeño cambio correspondiente  $dq$  alrededor de la condición de operación  $\bar{q}$  puede encontrarse en la curva  $\Delta p$  contra  $q$ . La resistencia  $R$  es entonces  $d(\Delta p)/dq$  y es igual a la pendiente de la línea que aproxima a la curva cerca del punto de la condición de operación  $\Delta p = \bar{\Delta p}$ ,  $q = \bar{q}$  como se muestra en la figura. Nótese que el valor de la resistencia  $R$  del flujo de aire no es constante, sino que varía con el cambio en la condición de operación.



**Fig. 5-33.** Diagrama que muestra la resistencia  $R$  como la pendiente de una curva de diferencia de presión contra razón de flujo de masa, en el punto de operación.

**Ejemplo 5-6.** Considérese un flujo de aire a través de una válvula y supóngase que la presión absoluta corriente arriba es  $p_1$  y la presión absoluta corriente abajo es  $p_2$ . Supóngase también que la presión diferencial  $\Delta p = p_1 - p_2$  es lo suficientemente pequeña comparada con  $p_1$  y que la razón de flujo de masa a través de la válvula es  $q$ . Determinése la resistencia  $R$  de la válvula.

Cuando la caída de presión en un dispositivo restrictivo del flujo (como un orificio y una válvula) es lo suficientemente pequeña, la razón de flujo de masa  $q$  es pro-

porcional a la raíz cuadrada de la caída de presión  $\Delta p = p_1 - p_2$ . [Consulte la Ec. (5-29).] Así,

$$q = K\sqrt{\Delta p} \quad (5-31)$$

donde  $K$  es una constante. Entonces, en relación con la Ec. (5-30), la resistencia  $R$  en cualquier punto de operación  $\Delta p = \Delta \bar{p}$ ,  $q = \bar{q}$  se encuentra como

$$R = \frac{d(\Delta p)}{dq} \Big|_{\Delta p = \Delta \bar{p}, q = \bar{q}} = \frac{2 \Delta \bar{p}}{q} \Big|_{\Delta p = \Delta \bar{p}, q = \bar{q}} = \frac{2 \Delta \bar{p}}{\bar{q}} \quad (5-32)$$

Nótese que la Ec. (5-32) es una ecuación aproximada, puesto que está basada en la Ec. (5-31), la cual es válida cuando  $\Delta p$  es pequeña comparada con la presión absoluta  $p_1$ .

Los sistemas neumáticos pueden operar en tal forma que el flujo promedio o en estado estable a través de la válvula sea cero; esto es, que la condición de operación normal sea  $\Delta p = 0$ ,  $\bar{p} = 0$ . Si la condición de operación normal es  $\Delta p = 0$ ,  $q = 0$  y las escalas de  $\Delta p$  y  $q$  son  $-\Delta p_1 < \Delta p < \Delta p_1$  y  $-q_1 < q < q_1$ , respectivamente, entonces, para propósitos prácticos, la resistencia promedio  $R$  puede aproximarse mediante la pendiente de la línea que conecta el punto  $\Delta p = \Delta p_1$ ,  $q = q_1$  y el punto  $\Delta p = -\Delta p_1$ ,  $q = -q_1$  como se muestra en la Fig. 5-34.

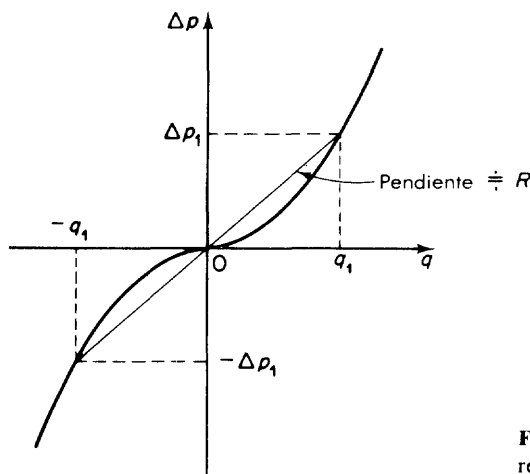


Fig. 5-34. Diagrama que muestra una resistencia promedio  $R$ .

Al modelar matemáticamente un sistema neumático, es siempre deseable tener una curva experimental que relacione  $\Delta p$  y  $q$  para las escalas de operación completas, dispuesta de modo que la resistencia  $R$  pueda determinarse gráficamente con exactitud razonable.

**Capacitancia.** En un recipiente de presión neumática, la *capacitancia* puede definirse como el cambio en la masa de aire (kg) en el recipiente, requerido para hacer un cambio unitario en la presión ( $\text{N/m}^2$ ) o

$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{cambio en la masa de aire}}{\text{cambio en la presión}} \quad \frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2} \text{ o } \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{N}}$$

la cual puede expresarse como

$$C = \frac{dm}{dp} = V \frac{d\rho}{dp} \frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2} \quad (5-33)$$

donde

$m$  = masa del aire en el recipiente, kg

$p$  = presión absoluta del aire, N/m<sup>2</sup>

$V$  = volumen del recipiente, m<sup>3</sup>

$\rho$  = densidad de masa del aire, kg/m<sup>3</sup>

Tal capacitancia  $C$  puede calcularse mediante el uso de la ley del gas perfecto.

Como se estableció en la sección 5-3, para el aire tenemos

$$pv = \frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{M} T = R_{\text{aire}} T \quad (5-34)$$

donde

$p$  = presión absoluta del aire, N/m<sup>2</sup>

$v$  = volumen específico del aire, m<sup>3</sup>/kg

$M$  = peso molecular del aire por mol, kg/kg-mol

$\bar{R}$  = Constante del gas universal, N-m/kg-mol K

$R_{\text{aire}}$  = constante de gas del aire, N-m/kg K

$T$  = temperatura absoluta del aire, K

Si el cambio de estado del aire es entre isotérmico y adiabático, entonces el proceso de expansión puede expresarse como politrópico y puede darse mediante

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{constante} \quad (5-35)$$

donde

$n$  = exponente politrópico

Puesto que  $dp/dp$  puede obtenerse de la Ec. (5-35) como

$$\frac{dp}{dp} = \frac{p}{np}$$

al sustituir la Ec. (5-34) en esta última ecuación, tenemos

$$\frac{dp}{dp} = \frac{1}{nR_{\text{aire}} T} \quad (5-36)$$

Por tanto, la capacitancia  $C$  de un recipiente se encuentra de las Ecs. (5-33) y (5-36) como

$$C = \frac{V}{nR_{\text{aire}} T} \frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2} \quad (5-37)$$

Obsérvese que si un recipiente se llena con un gas a presión diferente del aire, la capacitancia  $C$  está dada por

$$C = \frac{V}{nR_{\text{gas}} T} \frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2} \quad (5-38)$$

donde  $R_{\text{gas}}$  es la constante del gas particular involucrado.

Del análisis precedente, está claro que la capacitancia  $C$  de un recipiente a presión no es constante, sino que depende del proceso de expansión involucrado, la naturaleza del gas (aire,  $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2$ , etc.), y la temperatura del gas en el recipiente. El valor del exponente politrópico  $n$  es aproximadamente constante ( $n = 1.0$  a  $1.2$ ) para gases en recipientes metálicos no aislados.

**Ejemplo 5-7.** Encuéntrese la capacitancia  $C$  de un recipiente a presión de  $2 \text{ m}^3$  que contiene aire a  $50^\circ\text{C}$ . Supóngase que la expansión y la compresión del aire ocurren lentamente y que hay suficiente tiempo para que el calor se transfiera hacia y desde el recipiente de modo que el proceso de expansión pueda considerarse isotérmico, es decir,  $n = 1$ .

La capacitancia  $C$  se encuentra sustituyendo  $V = 2 \text{ m}^3$ ,  $R_{\text{AIRE}} = 287 \text{ N-m/kg K}$ ,  $T = 273 + 50 = 323 \text{ K}$ , y  $n = 1$  en la Ec. (5-37) como sigue:

$$C = \frac{V}{nR_{\text{aire}}T} = \frac{2}{1 \times 287 \times 323} = 2.16 \times 10^{-5} \text{ kg-m}^2/\text{N}$$

**Ejemplo 5-8.** En relación con el ejemplo 5-7, si el mismo recipiente de presión se llena con hidrógeno ( $\text{H}_2$ ) en lugar de aire, ¿cuál es la capacitancia? Supóngase que la temperatura del gas es de  $50^\circ\text{C}$  y que el proceso de expansión es isotérmico o  $n = 1$ .

La constante del gas para el hidrógeno es

$$R_{\text{H}_2} = 4121 \text{ N-m/kg K}$$

Al sustituir  $V = 2 \text{ m}^3$ ,  $R_{\text{H}_2} = 4121 \text{ N-m/kg K}$ ,  $T = 273 + 50 = 323 \text{ K}$ , y  $n = 1$  en la Ec. (5-38), tenemos

$$C = \frac{V}{nR_{\text{H}_2}T} = \frac{2}{1 \times 4121 \times 323} = 1.50 \times 10^{-6} \text{ kg-m}^2/\text{N}$$

**Inertancia.** La *inertancia* en un sistema neumático se refiere al cambio de presión ( $\text{N/m}^2$ ) requerido para hacer un cambio de razón unitario en la razón de flujo de masa (esto es, el cambio en la razón de flujo de masa por segundo) ( $\text{kg/s}^2$ ) o

$$\text{Inertancia } I = \frac{\text{cambio en la presión}}{\text{cambio en razón de flujo de masa por segundo}} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}^2} \text{ o } \frac{1}{\text{m}}$$

El aire (o el gas) en tubos puede presentar vibraciones sostenidas (resonancia acústica) porque el aire (o el gas) tiene inercia y más aún, es elástico. Nótese que la combinación *inertancia-capacitancia* en un sistema neumático actúa como una combinación *masa-resorte* en un sistema mecánico, causando vibraciones.



**Ejemplo 5-9.** Considérese un flujo de aire en un tubo y obténgase la inercancia del flujo de aire.

La inercancia del flujo de aire puede obtenerse como la diferencia de presión entre dos secciones del tubo, requerida para causar un cambio de razón unitario en la razón de flujo. Es similar a la inercancia del flujo líquido presentada en el ejemplo 4-2.

Supóngase que el área de la sección transversal de un tubo es constante e igual a  $A \text{ m}^2$  y que la diferencia de presión entre dos secciones del tubo es  $\Delta p \text{ N/m}^2$ . Entonces la fuerza  $A \Delta p$  acelerará el aire entre las dos secciones de acuerdo con la segunda ley de Newton o

$$M \frac{dv}{dt} = A \Delta p \quad (5-39)$$

donde  $M \text{ kg}$  es la masa del aire en el tubo entre dos secciones y  $v \text{ m/s}$  es la velocidad del aire. Observando que

$$M = \rho AL$$

donde  $\rho \text{ kg/m}^3$  es la densidad del aire y  $L \text{ m}$  es la distancia entre dos secciones, la Ec. (5-39) puede escribirse

$$\rho AL \frac{dv}{dt} = A \Delta p$$

En términos de la razón de flujo de masa  $Q = \rho Av \text{ kg/s}$ , esta ecuación puede escribirse

$$L \frac{dQ}{dt} = A \Delta p$$

Entonces la inercancia  $I$  del flujo de aire se obtiene como

$$\text{Inercancia del flujo de aire } I = \frac{\Delta p}{dQ/dt} = \frac{L}{A} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}^2} \text{ o } \frac{1}{\text{m}}$$

**Elaboración de modelos matemáticos de un sistema neumático.** El sistema neumático de presión mostrado en la Fig. 5-35(a) consiste en un recipiente a presión y un tubo de conexión con una válvula. En la figura,

$\bar{P}$  = presión en estado estable del sistema,  $\text{N/m}^2$

$p_i$  = pequeño cambio en la presión del flujo de entrada,  $\text{N/m}^2$

$p_0$  = pequeño cambio en la presión de aire en el recipiente,  $\text{N/m}^2$

$V$  = volumen del recipiente,  $\text{m}^3$

$m$  = masa del aire en el recipiente,  $\text{kg}$

$q$  = razón de flujo de masa,  $\text{kg/s}$

Obtengamos un modelo matemático de este sistema neumático de presión. Supóngase que el sistema opera de tal modo que el flujo promedio a través de la válvula es cero, o que la condición de operación normal corresponde a  $p_i - p_0 = 0$ ,  $q = 0$ , y que la condición del flujo es subsónica en la escala completa de operación.

En relación con la Fig. 5-35(b), la resistencia promedio  $R$  de la válvula puede escribirse

$$R = \frac{p_i - p_0}{q}$$

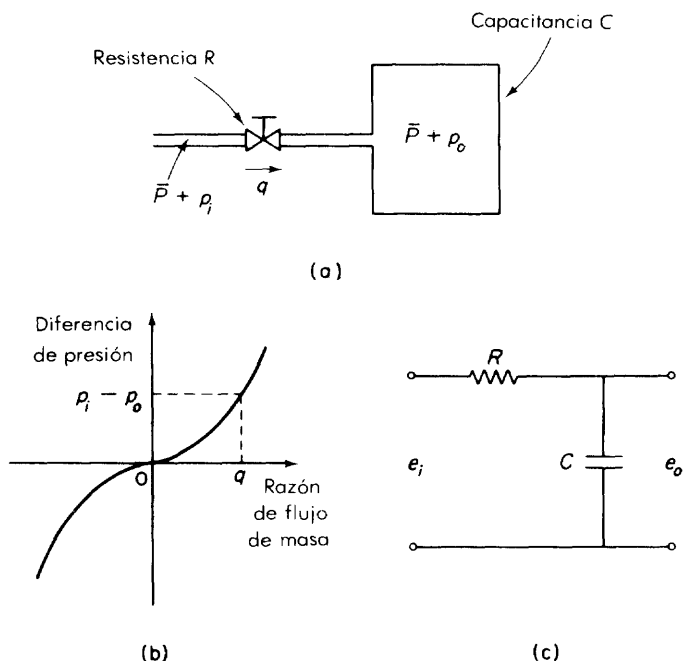


Fig. 5-35. (a) Sistema neumático de presión; (b) curva de diferencia de presión contra razón de flujo de masa; (c) sistema eléctrico análogo.

Y en relación con la Ec. (5-33), la capacitancia  $C$  del recipiente a presión puede escribirse

$$C = \frac{dm}{dp_o}$$

o bien

$$C dp_o = dm$$

Esta última ecuación establece que el producto de la capacitancia  $C$  veces el cambio de presión  $dp_o$  (durante  $dt$  segundos) es igual a  $dm$ , el cambio de la masa de aire en el recipiente (durante  $dt$  segundos). El cambio en la masa  $dm$  es igual al flujo de masa durante  $dt$  segundos, o  $q dt$ . Por lo tanto,

$$C dp_o = q dt$$

Al sustituir  $q = (p_i - p_o)/R$  en esta última ecuación, tenemos

$$C dp_o = \frac{p_i - p_o}{R} dt$$

Reescribiendo

$$RC \frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i \quad (5-40)$$

La ecuación (5-40) es un modelo matemático del sistema mostrado en la Fig. 5-35(a).

Nótese que el sistema de presión neumática considerado aquí es análogo al sistema eléctrico mostrado en la Fig. 5-35(c), cuyo modelo matemático es

$$RC \frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$

Nótese también que en los modelos matemáticos de los dos sistemas,  $RC$  tiene la dimensión del tiempo y es la constante de tiempo del sistema respectivo.

**Comentarios.** Los controladores neumáticos industriales pueden consistir en fuelles, toberas, orificios, válvulas y tubos de conexión de estos elementos. Los materiales presentados en esta sección son aplicables al modelado matemático y al análisis de los controladores neumáticos. Puesto que los controladores neumáticos se describen en detalle en el capítulo 8, se pospone hasta entonces una discusión adicional sobre sistemas de presión neumática

## \*5-6 INTRODUCCIÓN A LOS DISPOSITIVOS FLUÍDICOS

Los dispositivos fluídicos a través de los cuales el aire (o los gases o los líquidos) fluyen por canales intrincados y precisos, y realizan sensibilización, lógica, amplificación, control, procesamiento de información, etcétera, se llaman *dispositivos fluídicos*. Éstos no tienen partes móviles y están hechos de vidrio, plástico, aluminio, bronce o acero inoxidable. La *fluídica* es el estudio general de los dispositivos y sistemas fluídicos.

Un sistema de control fluídico es aquel en el cual se usan dispositivos fluídicos (amplificadores de flujo, dispositivos de interfaz, etc.) para controlar un sistema. El control fluídico puede ser digital o analógico.

**Amplificador de fluido.** El elemento básico que controla el flujo de un fluido es el *amplificador de fluido*, el cual permite que se controle un fluido o presión mediante una o más señales de entrada de un valor menor de presión o flujo que el fluido que se está controlando. Los amplificadores de fluido utilizan una variedad de principios básicos en su operación que se pueden clasificar como

1. Amplificadores de la atracción de pared
2. Amplificadores de turbulencia
3. Amplificadores de interacción de inyección
4. Amplificadores de vórtice

\*Las secciones con asterisco tratan temas más desafiantes que el resto del libro. Dependiendo de los objetivos del curso, estas secciones (aunque importantes) pueden omitirse de las exposiciones de clase sin perder la continuidad del tema principal.

La mayor parte de los amplificadores de fluido disponibles comercialmente caen dentro de estas cuatro categorías o algunas combinaciones de ellas.

**Definiciones.** Antes de exponer los dispositivos flúidicos, definamos cierta terminología.

*Señal de entrada.* Una señal de entrada en un dispositivo flúidico es una presión o flujo dirigido hacia un puerto de entrada de un elemento o de una función lógica.

*Señal de salida.* Una señal de salida de un dispositivo flúidico es la presión o flujo que sale por el puerto de salida de un elemento o de una función lógica.

*Respiradero.* Un respiradero es un puerto que permite al fluido descargarse a una presión de referencia o del ambiente.

*Fan-in.* El fan-in se refiere al número de entradas separadas disponibles en un elemento.

*Fan-out.* El fan-out significa el número de elementos similares que pueden operarse en paralelo desde un elemento flúidico simple. Aquí "similar" se refiere a la impedancia y no a dispositivos que realicen la misma función.

[Como en el caso de los sistemas eléctricos, la restricción total al flujo en el circuito, representada por la resistencia, la capacitancia y la inercia, combinadas en una resultante, se llama *impedancia flúidica*. (La impedancia es un cambio en la presión dividido entre un cambio en el flujo.)]

*Transductor flúidico.* Un transductor flúidico es un dispositivo que usa un fenómeno de la dinámica del fluido en su operación de convertir una señal de un medio (p. ej., presión de aire) a una señal en otro medio (p. ej., voltaje eléctrico).

**Efecto de la atracción de pared.** El líquido que fluye de un grifo atraerá el aire de su alrededor y hará que se mueva en la misma dirección. En la Fig. 5-36 un suministro de aire adecuado puede ser atraído en el mayor espacio a la derecha de la corriente para reemplazar al extraído por la acción de la corriente. Sin embargo, el lado izquierdo tiene un espacio limitado y es difícil para el aire reemplazar al que fue atraído hacia afuera. A la izquierda se forma un vacío parcial, y la corriente se mueve hacia la pared para recuperar las pérdidas. Ayudada por la presión atmosférica, la corriente se acerca más a la pared y dado el caso se adhiere a ella. Allí permanecerá adherida hasta que se le perturbe. Este fenómeno se llama *efecto de pared*.

Un chorro fluido puede ser desviado de la trayectoria normal de su flujo introduciendo otro chorro (chorro de control) perpendicular al primero como se muestra en la Fig. 5-37. Si el chorro de fluido entra a una cámara relativamente estrecha y el chorro toca una pared, se adhiere a la pared como se muestra en la Fig. 5-38. Es posible romper tales efectos de pared si la

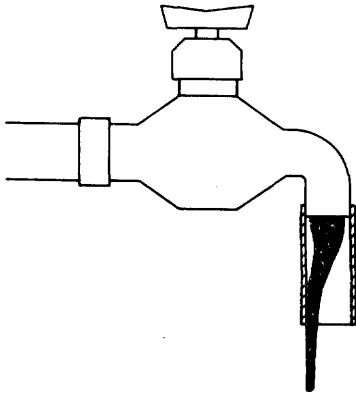


Fig. 5-36. Flujo de líquido en un grifo.

corriente o el chorro aplica a la región de baja presión por abajo del punto donde el chorro toca la pared. Este hecho hace posible diseñar un dispositivo biestable, o flip-flop, proveyendo chorros de control a cada lado del chorro principal. Un dispositivo biestable es aquel que tiene dos salidas posibles y que alternará de una salida a la otra al recibir señales de entrada correctamente en fase. Tal dispositivo biestable fluidico, llamado *amplificador digital fluidico*, es adecuado para operaciones lógicas que usen señales binarias. (Un amplificador digital es un elemento que opera por el principio de “todo o nada”. Dará una salida completa o no dará salida alguna, dependiendo de la entrada o señal de control aplicada.)

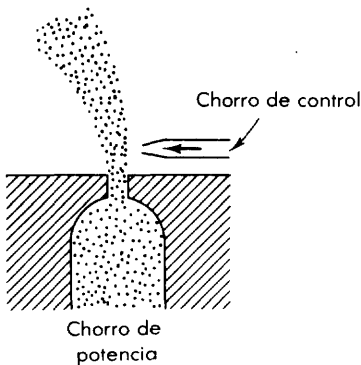


Fig. 5-37. Chorro de fluido desviado de su trayectoria normal por un chorro de control.

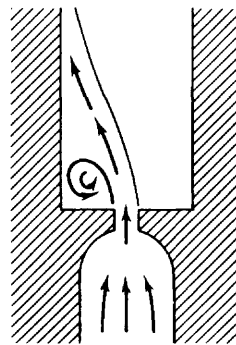


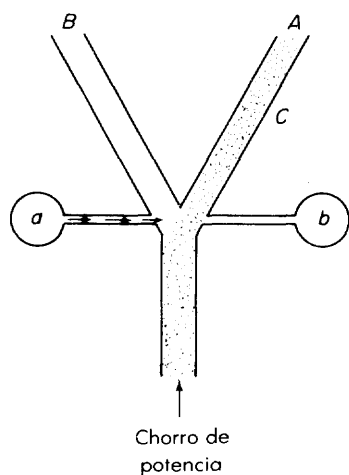
Fig. 5-38. Fenómeno de la atracción de pared.

**Amplificadores de la atracción de pared.** Los amplificadores fluidicos cuyo principio de operación está basado en el fenómeno de la atracción de pared se llaman *amplificadores de la atracción de pared*. Un ejemplo de uno de ellos aparece en la Fig. 5-39. Es un amplificador fluidico biestable o flip-flop y opera como sigue.

1. Una señal de control en "a" proporciona flujo de salida en el puerto A.
2. La remoción de la presión de control no cambia el flujo (se pega a la pared C).
3. Una señal en "b" desvía el flujo al puerto B.

Así pues, este dispositivo tiene una memoria. Tal amplificador biestable o flip-flop sirve como banco de memoria en un sistema fluido.

En los dispositivos fluidicos una representación porcentual de la salida captada en relación con el suministro, tal como la presión de salida contra presión de entrada, comúnmente se usa para indicar el grado de recuperación. En el amplificador biestable considerado aquí, la presión de salida máxima es alrededor de 35% de la presión de suministro, en tanto que el flujo máximo de salida es alrededor de 50% del flujo de suministro. El 50%



**Fig. 5-39.** Amplificador de la atracción de pared.

restante del flujo de suministro saldrá a través de los respiraderos de escape. (La potencia recuperada es normalmente alrededor de 15% de la potencia suministrada.) La presión de control mínima que se necesita para causar la conmutación es alrededor de 10% de la presión de suministro. El fan-in del amplificador de la atracción de pared es alrededor de cuatro.

**Amplificadores de turbulencia.** Otro tipo de dispositivo fluido es el *amplificador de turbulencia*, el cual depende del cambio en las condiciones del flujo que resultan en un cambio de flujo laminar a turbulento en una corriente fluida. La Fig. 5-40 muestra un diagrama esquemático de un amplificador de turbulencia. Un fluido puede hacerse fluir en una corriente laminar recta a través de un claro para producir una salida, o puede ser impedido de hacerlo mediante un pequeño chorro que hace turbulenta la

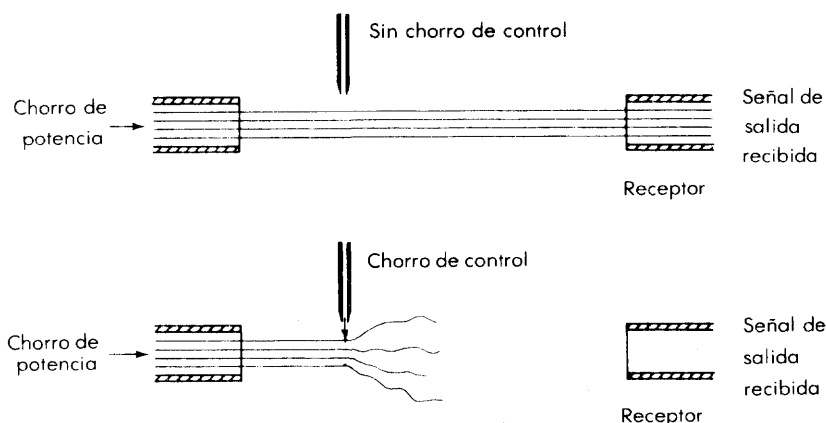


Fig. 5-40. Amplificador de turbulencia.

corriente. Si un tubo liso de orificio pequeño se alimenta con aire a baja presión, es posible emitir una corriente laminar. Esta corriente permanecerá laminar en una distancia considerable antes de hacerse turbulento. (La corriente laminar que sale de un tubo capilar de diámetro  $d$  puede permanecer laminar durante aproximadamente  $100d$ .) Por lo tanto, si un tubo de salida se coloca en línea con el tubo de suministro antes del punto de turbulencia, la corriente de fluido cruzará el claro para fluir hacia aquel, y resultará una salida. Una señal de control de entrada colocada en ángulo recto respecto al chorro principal mueve el punto de turbulencia, disminuye el flujo hacia el tubo de salida, y de hecho, evita una señal de salida. La potencia en la señal de entrada necesaria para interrumpir el chorro laminar y hacerlo turbulento es extremadamente pequeña. Así que tal dispositivo ofrece una gran ganancia en la presión. El fan-out de los amplificadores de turbulencia es alrededor de ocho, el cual es dos veces mayor que el de los amplificadores de la atracción de pared. Nótese que mientras mayor sea el fan-out, más fácil es interconectarlo y construirlo en un sistema. En el amplificador de turbulencia, se pueden posicionar varios chorros de entrada alrededor de la corriente, haciendo posible combinar muchas señales de entrada en un elemento. Así que el fan-in puede hacerse razonablemente alta (por ejemplo, cinco a seis).

**Amplificadores de interacción de inyección.** Aunque los amplificadores de la atracción de pared son dispositivos biestables básicamente, pueden cambiarse en dispositivos proporcionales ampliando los conductos siguientes de la tobera donde ocurre la adherencia a la pared, como se muestra en la Fig. 5-41, el flujo del chorro principal se distribuye entre los dos conductores de salida de acuerdo con el balance de chorros de control. Este tipo de

amplificador fluido se llama *amplificador de interacción de inyección*. Es un amplificador proporcional.

El principio de operación de los amplificadores de interacción de inyección no depende del fenómeno de la atracción de pared sino de la interacción directa entre el chorro de control y chorro de potencia principal. En relación con la Fig. 5-41, la señal de entrada es la presión diferencial que existe entre los puertos "a" y "b". La salida es la presión diferencial que existe entre los canales "A" y "B". Por lo tanto, es una unidad analógica. (Sin embargo, si el suministro de control se hace lo suficientemente grande, la salida se desvía completamente y el amplificador se hace un elemento lógico digital.)

Para tener alguna idea de la ganancia de tal amplificador, nótese que es posible una ganancia de presión de 10 y una ganancia de potencia de 100 por etapa. Si se ponen en cascada dos de tales dispositivos (véase la Fig. 5-42), entonces las ganancias resultan multiplicadas.

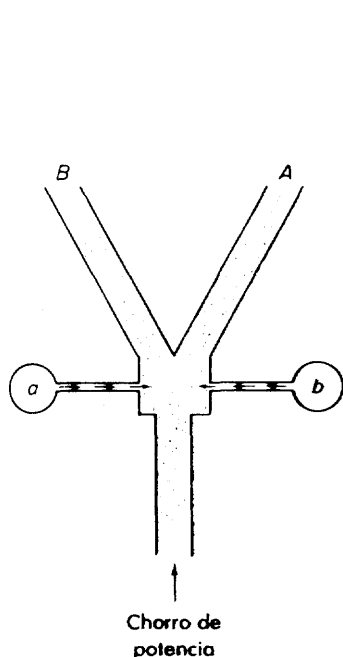


Fig. 5-41. Amplificador de interacción de inyección.

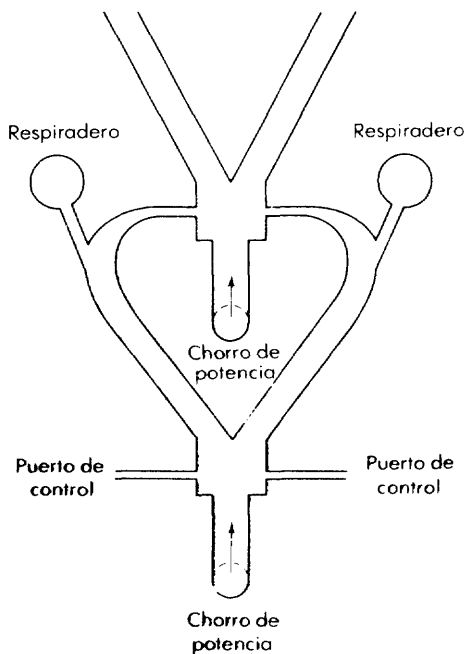


Fig. 5-42. Amplificador de interacción de inyección en cascada.

**Amplificadores de vórtice.** La figura 5-43 es un diagrama esquemático de un *amplificador de vórtice* que consiste en una cámara de vórtice cilíndrica, un puerto de suministro, un puerto de control y un puerto de salida conectada a un tubo receptor. Como está explicado abajo, un amplificador de



vórtice actúa como una válvula que controla el flujo mediante un vórtice restringido. (Se usa un chorro de control para generar un vórtice o flujo en espiral.) Como medio de trabajo se pueden usar aire, gases o líquidos.

En relación con la Fig. 5-43, el chorro de potencia (flujo de potencia principal) es admitido a través del puerto de suministro. Si no está presente un chorro de control, hay un chorro uniforme en estado estable que deja el puerto de salida y entra al tubo receptor. Cualquier flujo en exceso pasa al respiradero y se descarga a la atmósfera si el medio fluido es aire o a un depósito de baja presión si se usan gases (diferentes del aire) o líquidos.

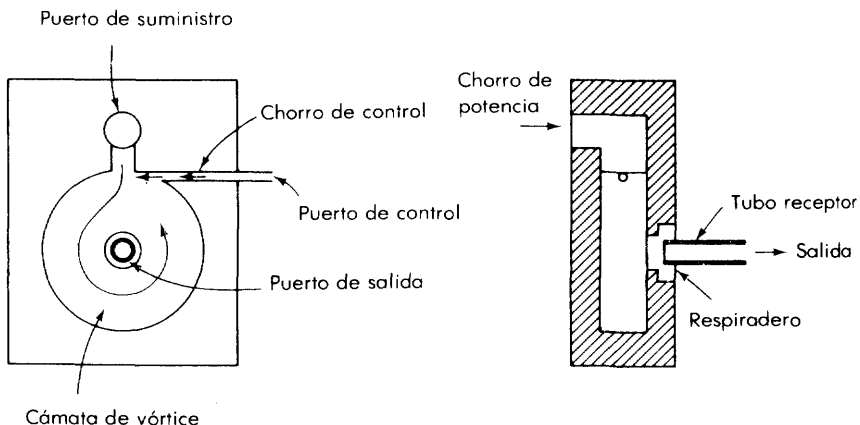


Fig. 5-43. Amplificador de vórtice.

La razón de flujo de salida está determinada por el área del puerto de salida y la presión de suministro. Puesto que el puerto de suministro se hace más grande que el puerto de salida, si no está presente un chorro de control, la presión en la cámara del vórtice es constante y es igual a la presión de suministro. Cuando se admite el chorro de control a través del puerto de control tangencial, se mezcla con el chorro de potencia y genera un vórtice en la cámara. Por la conservación de la cantidad de movimiento angular, a medida que el radio decrece, la velocidad tangencial se incrementa y la presión en el vórtice disminuye. Debido al gradiente de la presión radial en el vórtice controlarán el flujo desde la salida plena hasta alrededor de 10% te. De hecho, a medida que el vórtice se hace más fuerte la mayor parte del flujo se descarga por el respiradero y un poco fluye a través del receptor. Por lo tanto, un amplificador de vórtice actúa esencialmente como una válvula de partes fijas fluidicas y ofrece medios simples y confiables de controlar el flujo de fluidos. En la mayoría de los equipos, los amplificadores de vórtice controlarán el flujo desde la plena salida hasta alrededor de 10% de la salida plena.

Las ventajas del amplificador de vórtice utilizado como una válvula de control de fluido sobre la válvula de control convencionales son (a) la con-

fiabilidad es buena porque no se incluyen partes en movimiento y (b) no hay histéresis en las curvas características de la válvula.

Las desventajas se pueden establecer como: (a) la razón de flujo de la salida no puede ser reducido a cero exactamente, (b) la presión de control debe ser 30 a 70% mayor que la presión de suministro, y (c) el consumo de potencia puede ser alto, aunque los amplificadores de vórtice pueden recuperar hasta 40% de la potencia que se les suministra.

Si se usa aire como medio fluido, la presión de suministro es normalmente  $1.4 \times 10^5$  hasta  $7 \times 10^5$  manométrica (aproximadamente 2.3 a 101.5 psig, la cual corresponde aproximadamente a 1.43 hasta 7.14 kg<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup> manométrica), pero en algunos casos especiales la presión de suministro puede hacerse mucho menor o mucho mayor.

**Velocidad de respuesta de los dispositivos fluidicos.** Por lo que respecta a la velocidad de respuesta de los dispositivos fluidicos, estos son comparables a los dispositivos neumáticos e hidráulicos o a los relevadores electro-mecánicos. Esto significa que la velocidad de respuesta de los dispositivos fluidicos es mucho más lenta que la de los dispositivos electrónicos. Las respuestas electrónicas generalmente se expresan en términos de microsegundos ( $10^{-6}$  segundo) o nanosegundo ( $10^{-9}$  segundo)), mientras que las respuestas fluidicas se expresan en términos de milisegundos ( $10^{-3}$  segundo).

**Ventajas de los dispositivos fluidicos.** Las ventajas de los dispositivos fluidicos sobre otros tipos de dispositivos que realizan funciones semejantes pueden resumirse como sigue.

1. Por la ausencia de partes móviles mecánicas, los dispositivos fluidicos son robustos.
2. Los dispositivos son simples; de tamaño pequeño; altamente confiables; muy duraderos; pueden operarse con aire, gas o cualquier líquido de baja viscosidad; y requieren muy poco mantenimiento.
3. Son a prueba de incendio y explosión si se usa aire (o cualquier otro fluido no combustible) como el medio fluido.
4. Las conexiones pueden cambiarse mientras el sistema fluido está energizado sin el riesgo de choques inherentes en los sistemas eléctricos y electrónicos.
5. Los dispositivos fluidicos no se ven afectados por alta o baja temperatura (si se usa aire o gas como medio fluido), vibración, fuerza G (aceleración), campo eléctrico o magnético, y radiación nuclear, todos los cuales invalidan a las componentes eléctricas. (Así que pueden realizar funciones de control y computación en ambientes adversos y son ideales para operaciones en lugares riesgosos, tales como minas, refinerías y plantas químicas, en las cuales pueden fallar otros dispositivos.)
6. Si se producen masivamente, son baratos.

**Desventajas de los dispositivos fluidicos.** Las desventajas de los dispositivos fluidicos se enlistan a continuación.

1. Los dispositivos fluidicos requieren fluido muy limpio, especialmente en circuitos amplificadores.
2. Su respuesta es mucho más lenta que la correspondiente a los dispositivos electrónicos.
3. Consumen potencia relativamente alta. (Mientras está operando un dispositivo fluidico, hay un constante flujo de fluido a través suyo. El consumo de alta potencia puede ser una indudable desventaja en ciertas instalaciones donde la potencia disponible es bastante limitada, tal como en un sistema satélite.)
4. El diseño de dispositivos de interfaz adecuados se encuentra retrasado.

### \*5-7 FLUÍDICA DIGITAL Y CIRCUITOS LÓGICOS

Muchos de los circuitos electrónicos usados en equipo de cómputo funcionan como conmutadores de alta velocidad. La operación que realizan se puede manejar también mediante dispositivos fluidicos pero a velocidades mucho más bajas. A causa de que los circuitos de conmutación fluidicos producen señales de salida solamente cuando existen condiciones de entrada, se les denomina *circuitos lógicos* o *elementos de decisión*.

Después de revisar primero la lógica matemática, describiremos los circuitos lógicos fluidicos y luego expondremos procedimientos generales para construir los circuitos lógicos deseados usando elementos NOR.

**Fluidica digital.** Los *dispositivos de fluidica digital* son aquellos componentes fluidicos que realizan funciones lógicas. (Una función lógica es un conjunto de elementos lógicos que puede producir un efecto deseado cuando se satisfacen ciertas condiciones.)

Una *compuerta* es un dispositivo o circuito que permite sólo el paso de una señal si se han satisfecho ciertos requisitos de control. Como veremos, las compuertas lógicas fluidicas se pueden construir en circuitos digitales familiares.

Adicionalmente a la realización de las mismas funciones lógicas que sus contrapartidas electrónicas, la fluidica digital ofrece una alta confiabilidad. Aunque su velocidad de operación es mucho menor que la de los dispositivos electrónicos, cuando la confiabilidad en condiciones extremas del ambiente (por ejemplo, alta temperatura o alta radiación) es más importante que la rapidez de la operación, son muy superiores y, en algunos casos,

\*Las secciones con asterisco tratan temas más desafiantes que el resto del libro. Dependiendo de los objetivos del curso, estas secciones (aunque importantes) pueden omitirse de la exposición en clase sin perder la continuidad del tema principal.

pueden ser la única solución. Los componentes fluidicos de la actualidad que son capaces de proporcionar funciones lógicas están disponibles comercialmente. Algunas aplicaciones del presente de la fluidica digital ocurren con frecuencia en el almacenaje automático, la alimentación, secuenciación y manejo de máquinas, y operaciones similares.

**Lógica matemática.** Las funciones lógicas se escriben con frecuencia en la notación funcional del álgebra booleana, un tipo de álgebra particularmente adecuado a la descripción y diseño de circuitos de conmutación.

La lógica es esencialmente bivaluada; esto es, o verdadero o falso. La convención es que el 1 (UNO) representa el "sí" y el 0 (CERO) representa el "no" de una proposición. La misma convención se aplica en este libro, y el símbolo "1" denota la presencia de una señal (señal positiva o declaración verdadera) y el símbolo "0" denota la ausencia de una señal (señal cero o declaración falsa).

En cualquier sistema de control la función del conjunto de circuitos lógicos es aceptar la información de entrada (señales), tomar decisiones basadas en esa información, e inicializar señales para la acción de control. Al tomar estas decisiones, los operadores lógicos básicos definen las relaciones deseadas entre la información recibida y así determinan la decisión que se toma.

En el siguiente material las señales de entrada se denotan mediante las letras  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y así sucesivamente y las señales de salida por las letras que ocupan el final del alfabeto,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Los signos entre las letras muestran sus relaciones.

• denota "y"

+ denota "o"

Así que  $A \cdot B$  se lee  $A$  y  $B$ . Como en otros tipos de notación algebraica, el punto como signo puede omitirse y se puede escribir  $AB$ . Similarmente,  $A + B$  se lee  $A$  o  $B$ . Si se coloca una barra sobre una letra significa su complemento o valor lógico negativo. Así que si  $A = 1$ , entonces  $\bar{A} = 0$ .

**Funciones lógicas básicas.** Tres de las funciones lógicas básicas son AND, OR y NOT. Sus símbolos se repiten abajo.

$$\text{AND: } A \text{ y } B \text{ y } C = A \cdot B \cdot C = ABC$$

$$\text{OR: } A \text{ o } B \text{ o } C = A + B + C$$

$$\text{NOT: No } A = \bar{A}$$

Nótese que hay dos relaciones OR: la OR INCLUSIVA y la OR EXCLUSIVA. La diferencia entre las dos puede verse de las siguientes interpretaciones de  $A$  o  $B$ .

OR INCLUSIVA:  $A$  o  $B$  o ambas  $A$  y  $B$

OR EXCLUSIVA:  $A$  o  $B$ , pero no ambas  $A$  y  $B$

La función OR EXCLUSIVA (frecuentemente llamada el *medio sumador*) entrega una señal de salida solamente cuando sus dos señales de entrada son diferentes. El circuito medio sumador se usa a menudo como un comparador y proporciona una forma conveniente de realizar la adición binaria de dos señales de entrada. En este libro OR se refiere a la OR INCLUSIVA a menos que se establezca específicamente de otro modo.

Hay dos funciones lógicas además de AND, OR y NOT. Tales funciones, sin embargo, pueden construirse de combinaciones de las tres. Por ejemplo, considérese la OR EXCLUSIVA. La expresión matemática para la OR EXCLUSIVA es

$$(A + B)\overline{AB}$$

la cual se interpreta como  $A$  o  $B$  pero no ambas  $A$  y  $B$ . Considérese otro ejemplo, el INHIBIDOR. “ $A$  es inhibido por  $B$ ” significa que  $A$  ocurre si  $B$  no está presente. La expresión lógica matemática para el INHIBIDOR es

$$A\overline{B}$$

**Identidades y leyes básicas de la lógica matemática.** Primero, presentamos las identidades básicas

$$A0 = 0$$

$$1A = A$$

$$A\overline{A} = 0$$

$$AA = A$$

$$A + A = A$$

$$0 + A = A$$

$$1 + A = 1$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Las leyes básicas que siguen a todas las expresiones lógicas son

La ley conmutativa:

$$A + B = B + A$$

$$AB = BA$$

La ley asociativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C$$

La ley distributiva:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)(C + D) = AC + BC + AD + BD$$

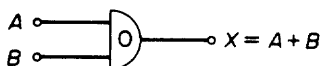
La tabla 5-2 muestra algunas identidades útiles para las ecuaciones lógicas. (En la tabla 5-2, las identidades 15, 16, 19, 20, 21 y 22 se prueban en el problema A-5-15.)

**Circuitos lógicos básicos.** La mayor parte de los operadores fundamentales que forman las funciones lógicas son

### OR, AND, NOT, NOR, NAND, FLIP-FLOP

Estos operadores se describen abajo, junto con sus respectivas tablas de verdad. (Una *tabla de verdad* es una correlación tabular de relaciones de entrada y salida de elementos lógicos.) Se verá que los dispositivos fluídicos digitales pueden operar por compuerta o inhibir la transmisión de señales mediante la aplicación o remoción de las señales de entrada.

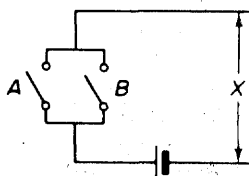
**Circuito OR.** La figura 5-44(a) muestra un *circuito OR* de dos entradas y su tabla de verdad. Este circuito tiene dos entradas y produce una salida cuando la señal de entrada se aplica a una o a ambas terminales de entrada. Si el circuito tiene más de dos terminales de entrada, la aplicación de una cualquiera o más de un número de señales de entrada da una señal de salida positiva. Esto es, el circuito OR realiza la operación lógica de producir una salida verdadera ("1") cuando una cualquiera o más de las entradas es verdadera ("1"), y una salida falsa ("0") cuando ninguna de sus entradas es verdadera. En la Fig. 5-44(b) un análogo eléctrico del circuito OR de dos entradas se muestra. Al cerrar uno o ambos interruptores se origina una señal



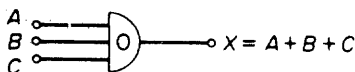
(a)

A	B	X
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

(b)



(c)



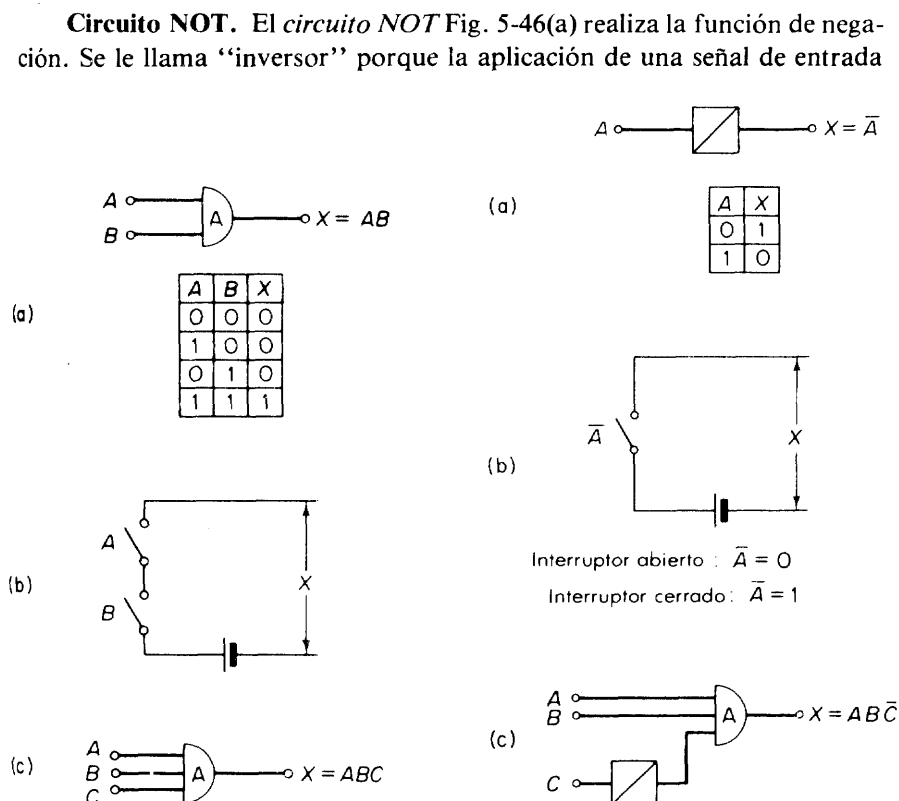
**Fig. 5-44.** (a) Circuito OR de dos entradas y su tabla de verdad; (b) análogo eléctrico; (c) circuito OR de tres entradas.

**Tabla 5-2. ALGUNAS IDENTIDADES ÚTILES PARA LAS ECUACIONES LÓGICAS**

1	$A0 = 0$
2	$1A = A$
3	$A\bar{A} = 0$
4	$AA = A$
5	$A + A = A$
6	$0 + A = A$
7	$1 + A = 1$
8	$A + \bar{A} = 1$
9	$\bar{\bar{A}} = A$
10	$A + B = B + A$
11	$AB = BA$
12	$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$
13	$A(BC) = (AB)C = ABC$
14	$A(B + C) = AB + AC$
15	$A(A + B + C) = A$
16	$A + BC = (A + B)(A + C)$
17	$\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}$
18	$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$
19	$A + AB = A$
20	$A + \bar{A}B = A + B$
21	$A\bar{B} + \bar{A}B = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$
22	$(A + \bar{B})(\bar{A} + B) = AB + \bar{A}\bar{B}$

que será llevada a  $X$ . La figura 5-44(c) ilustra un circuito OR de tres entradas. La salida  $X$  es  $A + B + C$ . Lo anterior se lee:  $X$  es igual a  $A$  o  $B$  o  $C$ .

**Circuito AND.** El *circuito AND* tiene dos o más entradas y una salida. Una característica de este circuito es que produce una salida solamente cuando todas las entradas se aplican simultáneamente. En otras palabras, la función AND requiere que todas las señales de entrada estén presentes simultáneamente antes de entregar una señal de salida. La figura 5-45(a) muestra un circuito AND de dos entradas (con las entradas designadas como  $A$  y  $B$ ) y su tabla de verdad. En la salida  $X$  aparece una señal positiva solamente cuando haya señales presentes en las dos entradas  $A$  y  $B$ . La salida es  $X = AB$ . Esto se lee:  $X$  es igual a  $A$  y  $B$ . En la Fig. 5-45(b) tenemos un análogo eléctrico de un circuito AND de dos entradas. Ambos interruptores deben cerrarse antes de que aparezca una señal positiva en  $X$ . La Fig. 5-45(c) muestra un circuito AND de tres entradas.



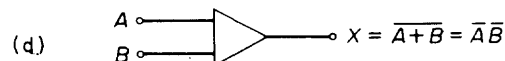
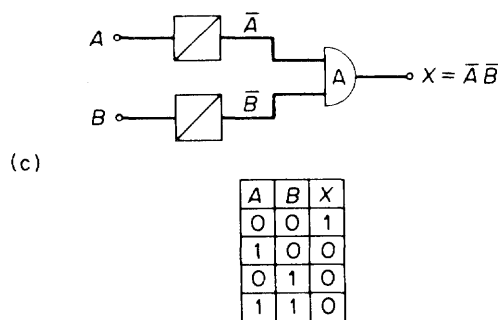
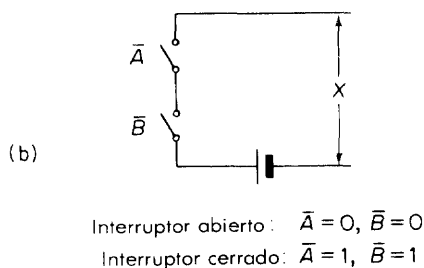
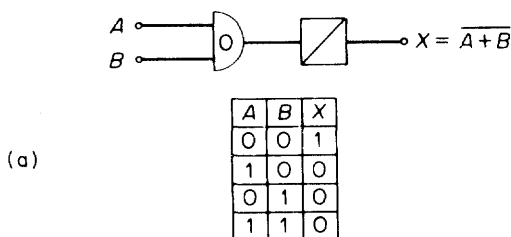
**Fig. 5-45.** (a) Circuito AND de dos entradas y su tabla de verdad; (b) análogo eléctrico; (c) circuito AND de tres entradas.

**Fig. 5-46.** (a) Circuito NOT; (b) análogo eléctrico; (c) combinación de circuitos AND y NOT.



elimina la salida. Este circuito no produce salida cuando la entrada está presente. Si la señal de entrada se remueve, la salida será positiva. Si se designa  $A$  a la terminal de entrada y  $X$  a la salida, entonces  $X = \bar{A}$ . Esto se lee:  $X$  no es igual a  $A$ . La figura 5-46(b) representa un análogo eléctrico del circuito NOT. La aplicación de la señal  $A$  interrumpe el circuito y la salida  $X$  cesará. (Nótese que cerrar el interruptor corresponde a  $\bar{A} = 1$ , lo cual implica que  $A = 0$ . Un interruptor abierto corresponde a  $\bar{A} = 0$  o  $A = 1$ .)

En la Fig. 5-46(c) se muestra una combinación de los circuitos AND y NOT. La salida es  $X = ABC$ . Si se aplica una entrada a la terminal  $C$  ( $C =$



**Fig. 5-47.** (a) Circuito NOR y su tabla de verdad; (b) análogo eléctrico; (c) circuito consistente en dos elementos NOT y un elemento AND y su tabla de verdad; (d) diagrama simplificado del circuito NOR.

1), entonces no habrá salida del circuito NOT y por lo tanto no habrá entrada por una de las terminales AND y no habrá salida en  $X$  ( $X = 0$ ). La presencia de una entrada en el circuito NOR inhibe el circuito y por lo tanto no se produce salida. (La salida de este circuito ocurre solamente cuando la entrada  $C$  está ausente, y  $A$  y  $B$  ocurren simultáneamente. Tal circuito se llama circuito *inhibidor*. Utiliza una señal de entrada suplementaria para inhibir o apagar la salida. Así que ocurrirá una salida del circuito solamente cuando la señal inhibidora esté ausente. Esta característica es útil en circuitos digitales si deseamos obtener una salida solamente cuando se hayan satisfecho ciertas condiciones en otras componentes del sistema.

**Circuito NOR.** El *circuito NOR* es una combinación de un circuito OR y un circuito NOT. La figura 5-47(a) ilustra el circuito NOR y su tabla de verdad. La función NOR requiere que todas las señales de entrada sean removidas antes de hacer posible una salida. Así que en la Fig. 5-47(a) la salida  $X$  es igual a  $\overline{A + B}$ . No pueden estar presentes  $A$  ni  $B$  si la salida  $X$  se requiere.

La figura 5-47(b) muestra un análogo eléctrico del circuito NOR. La operación de un interruptor abrirá el circuito y evitará la salida positiva en  $X$ .

Nótese que la tabla de verdad para el circuito mostrado en la Fig. 5-47(c), el cual consiste en dos elementos NOT y un elemento AND, es la misma que la del circuito mostrado en la Fig. 5-47(a). La salida  $X$  en el circuito mostrado en la Fig. 5-47(c) es  $X = \overline{A}\overline{B}$ . Puesto que las tablas de verdad de los dos circuitos son las mismas, obtenemos

$$\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}$$

Esta relación conserva su validez para circuitos con muchas entradas, y la expresión general es

$$\overline{A + B + C + \dots} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \dots$$

Esta relación se llama la *ley de la adición de De Morgan*.

El elemento NOR es importante en los circuitos lógicos. Aunque puede construirse mediante otros elementos lógicos (tales como los elementos OR y NOT), este elemento puede considerarse una función lógica primaria y como tal puede usarse como un bloque de construcción básico del cual se genere cualquier otra función lógica. Expondremos este tema en detalle posteriormente. El diagrama simplificado del circuito NOR consiste en un triángulo, terminales de entrada y terminal de salida, como se muestra en la Fig. 5-47(d) y puede usarse provechosamente en el trazo de diagramas lógicos.

**Circuito NAND.** La función NAND es la inversa de la función AND. El *circuito NAND* es una combinación de un circuito AND y un circuito NOT. La figura 5-48(a) muestra un circuito NAND y su tabla de verdad. La salida  $X$  es  $\overline{AB}$ . En el circuito NAND todas las señales de entrada deben estar presentes antes que la salida cese. Así que ambas  $A$  y  $B$  deben aplicarse para parar la salida.

La figura 5-48(b) muestra un análogo eléctrico del circuito NAND. Aquí los interruptores normalmente cerrados deben abrirse todos antes que la señal en  $X$  cese.

Nótese que el circuito mostrado en la Fig. 5-48(c), el cual consiste en dos elementos NOT y un elemento OR tiene la misma tabla de verdad que el de la Fig. 5-48(a). Puesto que la salida del circuito de la Fig. 5-48(a) es  $X = \overline{A}\overline{B}$  y que en la Fig. 5-48(c) es  $X = \overline{A} + \overline{B}$ , vemos que

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

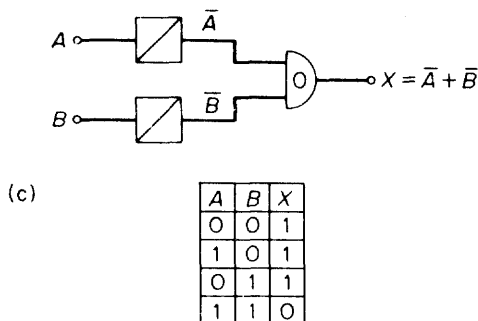
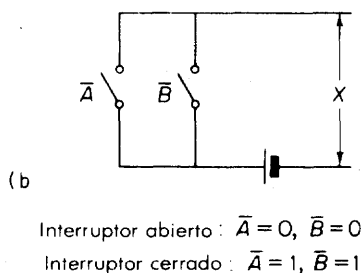
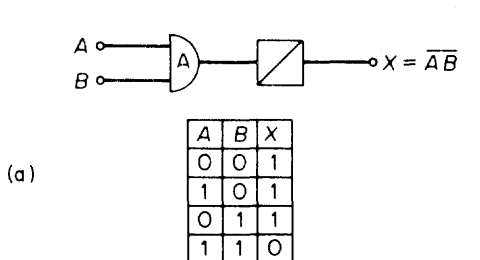
Esta relación conserva su validez para el caso de muchas entradas, y la expresión general es

$$\overline{ABC \dots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots$$

Esta relación se llama la *ley de la multiplicación de De Morgan*.

**FLIP-FLOP.** El *flip-flop* es una función de memoria. En la Fig. 5-49(a) se representa un circuito flip-flop que consta de dos elementos NOR. La salida de un elemento NOR se alimenta a la entrada del otro elemento NOR.

Si una señal de entrada breve (tal como una señal de pulso) se aplica a una de las terminales de entrada, este circuito convierte la señal de entrada breve en una señal sostenida. Esta señal sostenida puede removerse al aplicar una segunda señal de entrada breve por la otra terminal de entrada.



**Fig. 5-48.** (a) Circuito NAND y su tabla de verdad; (b) análogo eléctrico; (c) circuito consistente en dos elementos NOT y un elemento OR y su tabla de verdad.

En la Fig. 5-49(b) aparece un análogo eléctrico del circuito flip-flop. En este circuito una operación momentánea del contacto normalmente abierto *A* causa que se energice la bobina del solenoide, la cual, a su vez, cierra el contacto *C*. Así que la corriente continuará fluyendo a través del contacto *C* al solenoide, manteniendo de ese modo la condición y proporcionando una señal a *X*. Si el contacto normalmente cerrado *B* se abre momentáneamente, se interrumpirá el flujo de corriente al solenoide, se abrirá el contacto *C* y la salida *X* cesará.

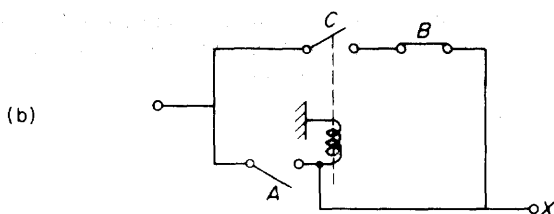
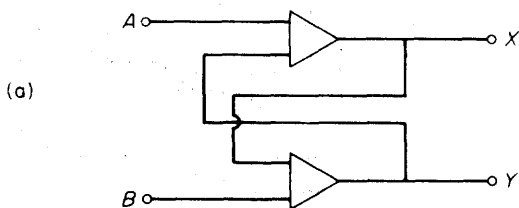


Fig. 5-49. (a) Circuito flip-flop;  
(b) análogo eléctrico.

**Ejemplo 5-10.** Con el objeto de ilustrar las propiedades de toma de decisiones de los circuitos lógicos, se darán aquí dos ejemplos. Considérense los circuitos mostrados en la Fig. 5-50(a) y (b). Cada circuito reconoce ciertas condiciones de entrada y produce una salida cuando estas condiciones de entrada existen.

El circuito mostrado en la Fig. 5-50(a) produce una salida en *X* ya sea que *C* esté presente o que *A* y *B* ocurran simultáneamente, o ambas. Así que  $X = AB + C$ .

En el circuito de la Fig. 5-50(b), tres circuitos AND de dos entradas detectan las tres combinaciones de las dos entradas: *A* y *B*, *A* y *C*, y *B* y *C*. Si la combinación de (*A* y *B*), o (*A* y *C*), pero no (*B* y *C*) ocurre, el circuito produce la salida. Así que la salida *X* es igual a  $(AB + AC)\bar{B}\bar{C} = AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$ , como puede verse del hecho que

$$\begin{aligned}(AB + AC)\bar{B}\bar{C} &= (AB + AC)(\bar{B} + \bar{C}) \\ &= AB\bar{B} + AC\bar{B} + A\bar{B}\bar{C} + AC\bar{C}\end{aligned}$$

Puesto que  $B\bar{B} = 0$ ,  $C\bar{C} = 0$ , tenemos

$$(AB + AC)\bar{B}\bar{C} = AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$

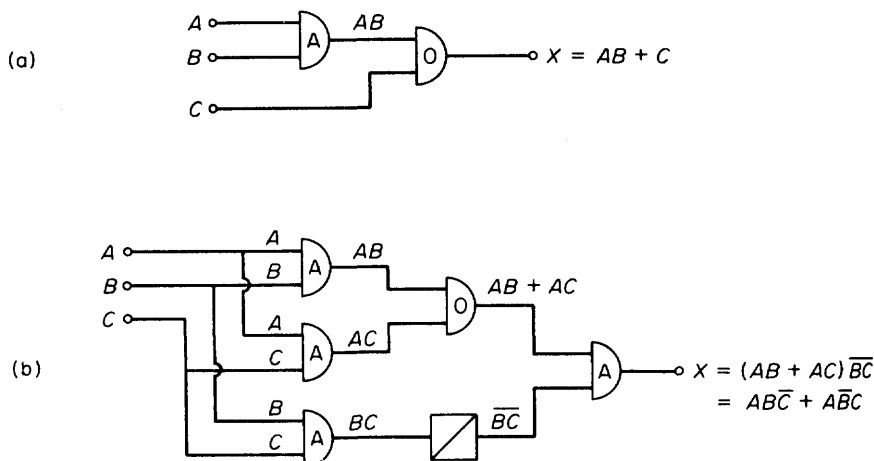


Fig. 5-50. Circuitos lógicos.

En este circuito lógico la combinación de  $B$  y  $C$  se detecta por uno de los circuitos AND. Esta señal, actuando a través del inversor, inhibe la salida. (Si  $B$  y  $C$  ocurren simultáneamente, no hay salida.)

### Construcción de circuitos lógicos mediante el uso de elementos NOR.

A continuación se mostrará que los elementos NOR pueden usarse para construir cualesquiera circuitos lógicos. En la Fig. 5-51 aparecen diagramas esquemáticos de un tipo de elemento NOR fluidico. Este tipo de elemento NOR se llama *amplificador de flujo controlado*. Es un amplificador de turbulencia y su operación se ilustra en la figura. Pueden armarse veinte o más de tales elementos NOR en un tablero, y estos elementos pueden conectarse para producir las señales lógicas deseadas.

El amplificador de flujo controlado tiene varias ventajas. Permite una conmutación de alta velocidad, mientras que, al mismo tiempo, es insensible a la vibración; puede combinarse en circuitos con sintonía; y es insensible a las variaciones de carga.

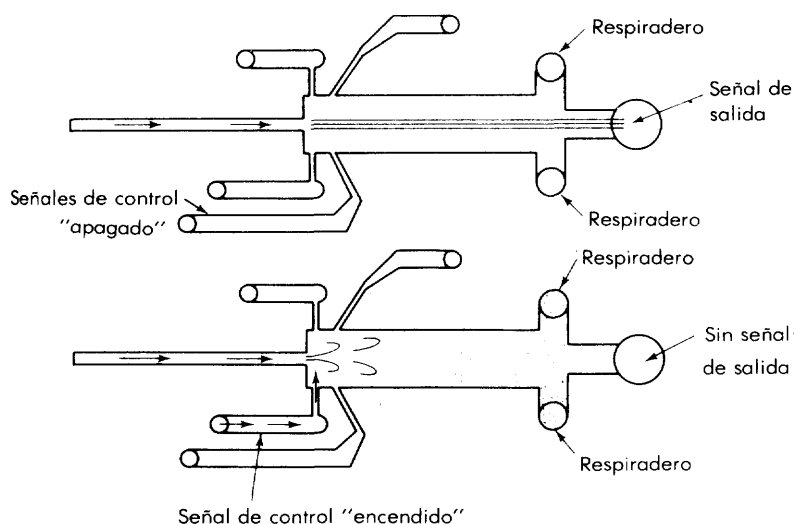


Fig. 5-51. Amplificador de control de flujo.

**Construcción de circuitos OR, AND, NAND mediante el uso de elementos NOR solamente.** Se muestra en la Fig. 5-52(a) un diagrama de un elemento NOR y su salida. Con el objeto de construir un circuito OR, necesitamos dos elementos NOR como en la Fig. 5-52(b). Un circuito AND puede construirse mediante el uso de tres elementos NOR como en la Fig. 5-52(c). En forma similar, se puede construir un circuito NAND mediante el uso de cuatro elementos NOR como en la Fig. 5-52(d).

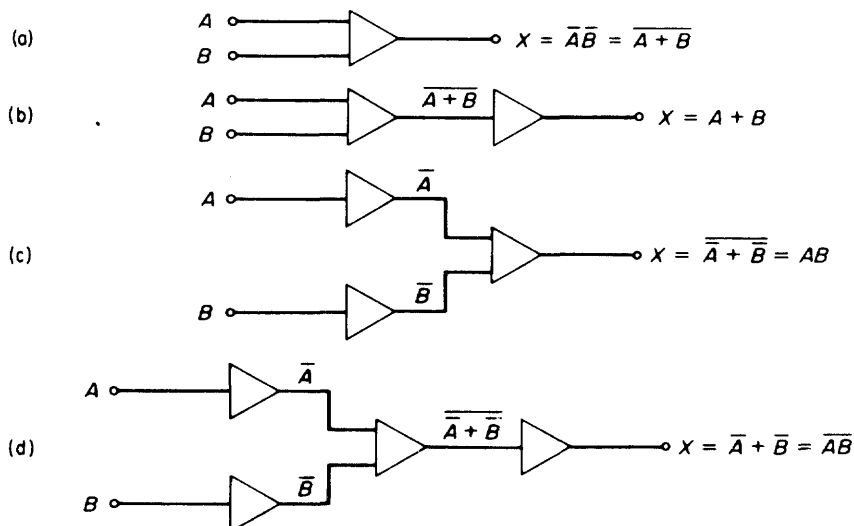


Fig. 5-52. Construcción de circuitos lógicos mediante el uso de elementos NOR solamente; (a) circuito NOR; (b) circuitos OR; (c) circuito AND; (d) circuito NAND.

**Procedimientos generales para construir circuitos lógicos deseados mediante el uso de elementos NOR.** Supóngase que deseamos obtener un circuito lógico para el sistema cuya tabla de verdad se da en la tabla 5-3. La condición de  $A$ ,  $B$ , y  $C$  bajo la cual  $X$  se hace "1" es  $A = 1, B = 0, C = 1$ . Por lo tanto,

$$X = A\bar{B}C = \overline{\bar{A} + B + \bar{C}}$$

El circuito lógico de esta expresión lógica aparece en la Fig. 5-53.

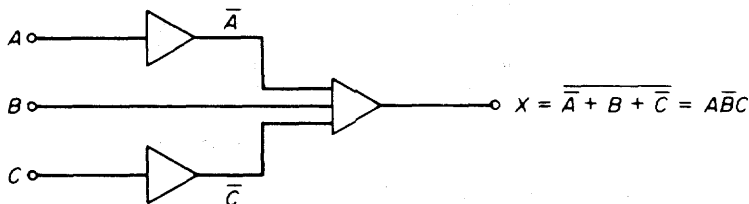


Fig. 5-53. Circuito lógico.

A continuación, consideremos otro problema. Supóngase que deseamos construir un circuito lógico que dé la tabla de verdad mostrada en la tabla 5-4. Con el objeto de encontrar la expresión lógica de  $X$  que sea

Tabla 5-3. TABLA DE VERDAD

$A$	$B$	$C$	$X$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Tabla 5-4. TABLA DE VERDAD

$A$	$B$	$C$	$X$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

equivalente a la información dada en esta tabla, determinamos las condiciones en las columnas del lado izquierdo en las cuales aparece un "1" en cada elemento de la columna  $X$ . En este problema están incluidas seis expresiones:

siones lógicas y la expresión lógica matemática para esta salida es

$$X = ABC\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

Esta expresión puede simplificarse usando las fórmulas dadas en la tabla 5-2.

$$\begin{aligned} X &= A\bar{C}(B + \bar{B}) + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) \\ &= A\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B} \\ &= A(\bar{C} + \bar{B}C) + \bar{A}(BC + \bar{B}) \\ &= A(\bar{C} + \bar{B}) + \bar{A}(\bar{B} + C) \\ &= (A + \bar{A})\bar{B} + A\bar{C} + \bar{A}C \\ &= \bar{B} + A\bar{C} + \bar{A}C \\ &= \bar{B} + \overline{A + C} + \overline{A + \bar{C}} \end{aligned}$$

La figura 5-54 muestra este circuito lógico. En forma análoga, se puede construir cualquier circuito lógico mediante el uso de elementos NOR solamente.

Nótese que puede obtenerse el mismo resultado mucho más fácilmente si escribimos la expresión lógica de  $\bar{X}$ . (Puesto que el número de elementos "0" en la columna  $X$  es mucho menor que el número de elementos "1" en la misma columna, la expresión lógica de  $\bar{X}$  es mucho más simple que la de  $X$ .) Las condiciones en las columnas del lado izquierdo en las cuales aparece un "0" en cada elemento de la columna  $X$  son  $ABC$  y  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ . Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \bar{X} &= ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \\ &= B(AC + \bar{A}\bar{C}) \\ &= B(\bar{A} + C)(A + \bar{C}) \end{aligned}$$

Y así

$$X = \overline{B(\bar{A} + C)(A + \bar{C})} = \bar{B} + \overline{A + C} + \overline{A + \bar{C}}$$

El circuito lógico de esta expresión es el mismo que el mostrado en la Fig. 5-54.

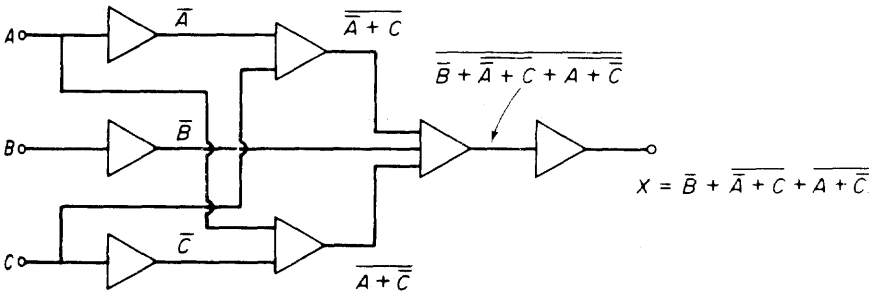


Fig. 5-54. Circuito lógico.



**Ejemplo 5-11.** Constrúyase un circuito lógico que dé las salidas de la tabla de verdad de la tabla 5-5.

Puesto que el número de elementos "0" en las columnas  $X$  y  $Y$  es mucho menor que el número de elementos "1", escribiremos las expresiones lógicas de  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$ .

$$\bar{X} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$\bar{Y} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$$

**Tabla 5-5.** TABLA DE VERDAD

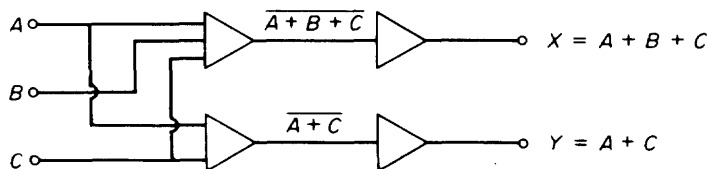
$A$	$B$	$C$	$X$	$Y$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

Estas dos expresiones se pueden escribir como

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \overline{A + B + C} = A + B + C \quad (5-41)$$

$$Y = \bar{Y} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} = \bar{A}\bar{C}(\bar{B} + B) = \bar{A}\bar{C} = \overline{A + C} = A + C \quad (5-42)$$

El circuito lógico que dará estas expresiones lógicas se muestra en la Fig. 5-55.



**Fig. 5-55.** Circuito lógico.

Obsérvese que el mismo resultado pudo obtenerse, por supuesto, obteniendo las expresiones lógicas de  $X$  y  $Y$  y simplificándolas.

$$X = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \quad (5-43)$$

$$Y = ABC + ABC\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \quad (5-44)$$

Las ecuaciones (5-43) y (5-44) pueden ser reducidas a las Ecs. (5-41) y (5-42), respectivamente. Los pasos de reducción se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} X &= AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}(C + \bar{C}) + \bar{A}B(C + \bar{C}) + \bar{A}\bar{B}C \\ &= AB + A\bar{B} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}C \\ &= A(B + \bar{B}) + \bar{A}(B + \bar{B}C) \\ &= A + \bar{A}(B + C) = (A + \bar{A}B) + (A + \bar{A}C) \\ &= A + B + A + C = A + B + C \\ Y &= AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}(C + \bar{C}) + \bar{A}C(B + \bar{B}) \\ &= AB + A\bar{B} + \bar{A}C = A(B + \bar{B}) + \bar{A}C \\ &= A + \bar{A}C = A + C \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAFÍA

- 5-1 ANDERSEN B. W., *The Analysis and Design of Pneumatic Systems*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- 5-2 CHAPMAN, W. O., "Fluidics: Progress and Growing Pains," *Mechanical Engineering*, **89**, No. 10, October 1967, pp. 48-51.
- 5-3 HENKE, R. W., "Digital Fluidics Works Now," *Control Engineering*, **14**, No. 1, January 1967, pp. 100-104.
- 5-4 JASKOLSKI, E. P. AND D. T. CAMP, "Fluidic Threshold Logic," *Mechanical Engineering*, **94**, No. 9, September 1972, pp. 24-28.
- 5-5 WALKER, J. H., "Inspection and Sorting with Fluidics," *Mechanical Engineering*, **92**, No. 3, March 1970, pp. 14-19.

## EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

**PROBLEMA A-5-1.** Considérese el sistema neumático mostrado en la Fig. 5-56. La carga consta de una masa  $m$  y fricción. Se supone la fuerza friccional  $\mu N = \mu mg$ . Si  $m = 1000$  kg,  $\mu = 0.3$ , y  $p_1 - p_2 = 5 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>, encuéntrase el área mínima de pistón necesaria para mover la carga.

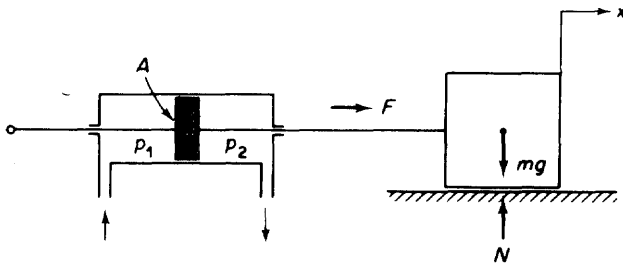


Fig. 5-56. Sistema neumático.

**Solución.** Supóngase que el área mínima del pistón es  $A \text{ m}^2$ . Entonces la fuerza mínima necesaria para mover la masa de la carga es

$$F = A(p_1 - p_2) = \mu mg$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{\mu mg}{p_1 - p_2} = \frac{0.3 \times 1000 \times 9.81}{5 \times 10^5} = 0.00589 \text{ m}^2$$

Así que el área mínima del pistón es  $58.9 \text{ cm}^2$ .

**PROBLEMA A-5-2.** En el sistema mostrado en la Fig. 5-57, supóngase que la fuerza de fricción que actúa sobre la masa es  $\mu N$ . Encuéntrese la diferencia de presión mínima  $\Delta p = p_1 - p_2$  necesaria para mover la carga  $m$ . El área del pistón es  $A$ .

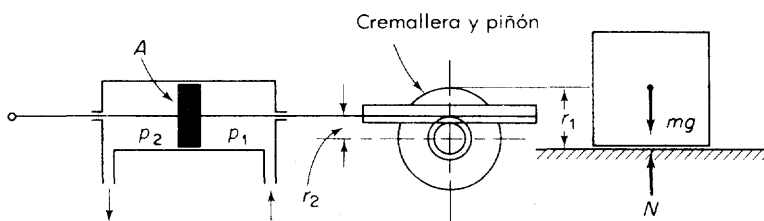


Fig. 5-57. Sistema neumático.

**Solución.** La fuerza mínima  $F$  necesaria para mover la carga es

$$F = A(p_1 - p_2) = \frac{r_1}{r_2} \mu N = \frac{r_1}{r_2} \mu mg$$

En consecuencia,

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{r_1 \mu mg}{r_2 A}$$

**PROBLEMA A-5-3.** En la Fig. 5-58 se muestra un polipasto de seis poleas. Si el área del pistón  $A$  es de  $30 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  y la diferencia de presión  $p_1 - p_2$  es de  $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ , encuéntrese la masa  $m$  de la máxima carga que pueda levantarse.

**Solución.** La fuerza neumática sobre el pistón es

$$A(p_1 - p_2) = 30 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^5 = 1500 \text{ N}$$

Obsérvese que en este sistema el pistón jala seis cables. Puesto que la tensión en el cable es la misma en toda su longitud, obtenemos

$$6F = 1500 \text{ N}$$

donde  $F$  es la tensión en el cable y también la fuerza elevadora. Esta fuerza debe ser igual a  $mg$ . Así que,

$$F = mg$$

o bien

$$m = \frac{1500}{9.81 \times 6} = 25.5 \text{ kg}$$

**PROBLEMA A-5-4.** Si la presión es de  $-30$  mm Hg manométrica y la presión atmosférica es  $755$  mm Hg, ¿cuál es la presión absoluta en  $\text{N/m}^2$ ,  $\text{kg}_f/\text{cm}^2$ , y  $\text{lb}_f/\text{in}^2$ ?

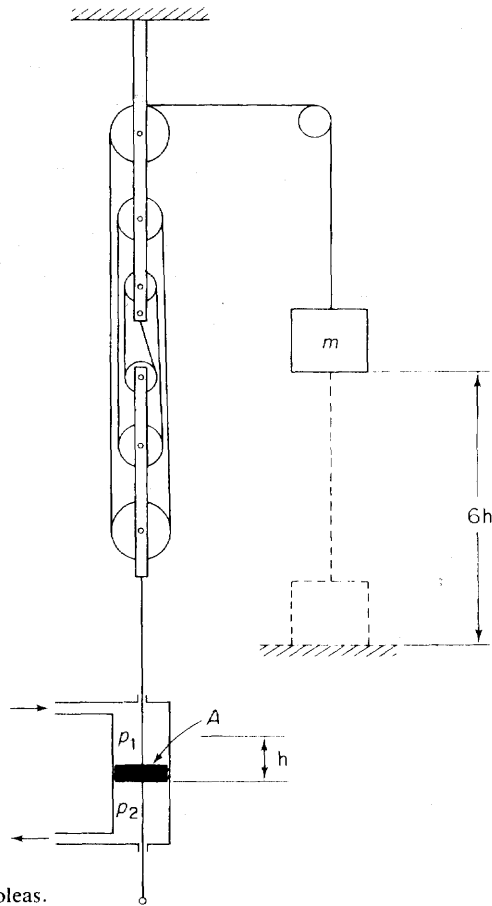


Fig. 5-58. Polipasto de seis poleas.

**Solución.** La presión absoluta  $p$  es

$$p = 755 - 30 = 725 \text{ mm Hg}$$

Puesto que

$$1 \text{ N/m}^2 = 7.501 \times 10^{-3} \text{ mm Hg}$$

$$1 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 = 735.6 \text{ mm Hg}$$

$$1 \text{ lb}_f/\text{in}^2 = 51.71 \text{ mm Hg}$$

obtenemos

$$p = \frac{725}{7.501 \times 10^{-3}} = 9.665 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \text{ abs}$$

$$p = \frac{725}{735.6} = 0.986 \text{ kg}_f/\text{cm}^2 \text{ abs}$$

$$p = \frac{725}{51.71} = 14.02 \text{ lb}_f/\text{in}^2 \text{ abs}$$

**PROBLEMA A-5-5.** Un cuerpo con masa de 50 kg es levantado 30 m. Encuéntrese el trabajo realizado en términos del calor  $Q$  en kcal.

**Solución.** El trabajo realizado  $L$  es

$$L = 50 \times 9.81 \times 30 = 1.47 \times 10^4 \text{ N-m}$$

Puesto que el equivalente mecánico del calor es  $J = 4186 \text{ N-m/kcal}$ , el calor  $Q$  en kcal es

$$Q = \frac{L}{J} = \frac{1.47 \times 10^4}{4186} = 3.51 \text{ kcal}$$

**PROBLEMA A-5-6.** La figura 5-59 muestra una válvula de seguridad de una caldera. La masa  $m$  del peso es de 20 kg. Despreciando el peso de la válvula y la palanca, determínese la distancia  $\overline{OC}$  donde la presión de disparo sea de  $6 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  manométrica (la cual es igual a  $6.12 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  manométrica o 87 psig). El área  $A$  de la válvula es de  $15 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ .

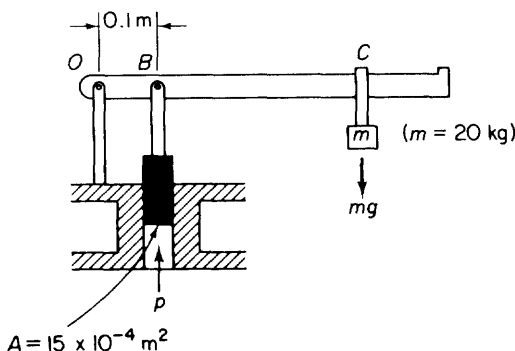


Fig. 5-59. Válvula de seguridad para una caldera.

**Solución.** La ecuación de balance de pares es

$$A \Delta p \times \overline{OB} = mg \times \overline{OC}$$

donde  $\Delta p$  es la diferencia de la presión dentro del tanque y la presión atmosférica. Así que  $\Delta p = 6 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ . Se sigue que

$$\overline{OC} = \frac{A \Delta p \times \overline{OB}}{mg} = \frac{15 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^5 \times 0.1}{20 \times 9.81} = 0.459 \text{ m}$$

**PROBLEMA A-5-7.** Supóngase que un cilindro contiene 0.5 kg de aire a la presión de  $2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs y a la temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . Si el aire se comprime isentrópicamente a  $4 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs, encuéntrese la temperatura final y el trabajo hecho sobre el gas.

**Solución.** Para el cambio de estado isentrópico,

$$p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$$

Observando que  $p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2$ , tenemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}$$

o bien

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} = (273 + 20) \left( \frac{4 \times 10^5}{2 \times 10^5} \right)^{(1.4-1)/1.4} \\ = 293 \times 2^{0.2857} = 293 \times 1.22 = 357 \text{ K} = 84^\circ\text{C}$$

Puesto que el cambio de estado es isentrópico, el trabajo realizado sobre el gas debe igualar al valor negativo de su incremento en energía interna. Así que el trabajo realizado  $AL$  por  $m$  kg masa del aire es

$$AL = U_1 - U_2 = mc_v(T_1 - T_2)$$

Por lo tanto,

$$AL = 0.1 \times 0.171 \times (293 - 357) = -1.10 \text{ kcal}$$

**PROBLEMA A-5-8.** Se comprime aire en un tanque cuyo volumen es de  $2 \text{ m}^3$ . La presión del aire comprimido es de  $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  manométrica y la temperatura es de  $20^\circ\text{C}$ . Encuéntrese la masa del aire en el tanque. También, encuéntrese el volumen específico y el peso específico del aire comprimido.

**Solución.** La presión y temperatura son

$$p = (5 + 1.0133) \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs}$$

$$T = 273 + 20 = 293 \text{ K}$$

En relación con el ejemplo 5-3, la constante de gas del aire es  $R_{\text{aire}} = 287 \text{ N-m/kg K}$ . Por lo tanto, la masa del aire comprimido es

$$m = \frac{pV}{R_{\text{aire}}T} = \frac{6.0133 \times 10^5 \times 2}{287 \times 293} = 14.3 \text{ kg}$$

El volumen específico  $v$  es

$$v = \frac{V}{m} = \frac{2}{14.3} = 0.140 \text{ m}^3/\text{kg}$$

El peso específico  $\gamma$  es

$$\gamma = \frac{mg}{V} = \frac{14.3 \times 9.81}{2} = 70.1 \text{ N/m}^3$$

**PROBLEMA A-5-9.** El sonido es un fenómeno de onda longitudinal que representa la propagación de ondas de compresión en un medio elástico. La rapidez  $c$  de la propagación de las ondas sonoras es la raíz cuadrada de la relación entre el módulo elástico  $E$  y la densidad  $\rho$  del medio, o sea,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Para gases

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Muéstrase que la rapidez  $c$  del sonido puede también darse por

$$c = \sqrt{kRT}$$

donde

$k$  = relación de calores específicos,  $c_p/c_v$

$R$  = constante del gas

$T$  = temperatura absoluta

**Solución.** Puesto que los cambios de presión y temperatura debidos al paso de una onda sonora son despreciables, el proceso puede considerarse isentrópico. Entonces,

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{kp}{\rho}$$

Puesto que  $p = \rho RT$ , obtenemos

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kRT}$$

Para un gas dado, los valores de  $k$  y  $R$  son constantes. Por lo tanto, la rapidez del sonido en gas solamente es función de su temperatura absoluta.

**PROBLEMA A-5-10.** Encuéntrese la rapidez del sonido en el aire cuando la temperatura es de 293 K.

**Solución.** Observando que para el aire

$$k = 1.40$$

$$R_{\text{aire}} = 287 \text{ N}\cdot\text{m/kg K}$$

tenemos

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{kR_{\text{aire}}T} = \sqrt{1.40 \times 287 \times 293} = 343.1 \text{ m/s} \\ &= 1235 \text{ km/h} = 1126 \text{ ft/s} = 768 \text{ mi/h} \end{aligned}$$

**PROBLEMA A-5-11.** Al ocuparse de los sistemas gaseosos, se encuentra conveniente trabajar en cantidades molares porque un mol de gas contiene el mismo número de moléculas. Así que un mol ocupa el mismo volumen si se mide bajo las mismas condiciones de presión y temperatura.

A la temperatura y presión estándar ( $1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs y 273 K, o 14.7 psia y 492°R), un kg mol de cualquier gas se encuentra ocupando  $22.4 \text{ m}^3$  (o 1 lb mol de cualquier gas se encuentra ocupando  $359 \text{ ft}^3$ ). Por ejemplo, a la presión y temperatura estándar, el volumen ocupado por 2 kg de hidrógeno, 32 kg de oxígeno o 28 kg de nitrógeno es el mismo,  $22.4 \text{ m}^3$ . Este volumen se llama volumen *modal* y se denota por  $\bar{v}$ .

Si consideramos una mol de gas, entonces

$$p\bar{v} = \bar{R}T \quad (5-45)$$

El valor de  $\bar{R}$  es el mismo para todos los gases en todas las condiciones. La constante  $\bar{R}$  es la constante del gas universal.

Encuéntrese el valor de la constante del gas universal en unidades SI y BES.

**Solución.** Al sustituir  $p = 1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs}$ ,  $\bar{v} = 22.4 \text{ m}^3/\text{kg-mol}$ , y  $T = 273 \text{ K}$  en la Ec. (5-45), obtenemos

$$\bar{R} = \frac{p\bar{v}}{T} = \frac{1.0133 \times 10^5 \times 22.4}{273} = 8314 \text{ N-m/kg-mol K}$$

Esta es la constante del gas universal en unidades SI.

Para obtener la constante del gas universal en unidades BES, sustitúyase  $p = 14.7 \text{ psia} = 14.7 \times 144 \text{ lb}_f/\text{ft}^2 \text{ abs}$ ,  $\bar{v} = 359 \text{ ft}^3/\text{lb-mol}$ , y  $T = 492^\circ\text{R}$  en la Ec. (5-45).

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{p\bar{v}}{T} = \frac{14.7 \times 144 \times 359}{492} = 1545 \text{ ft-lb}_f/\text{lb-mol } ^\circ\text{R} \\ &= 1.985 \text{ Btu/lb-mol } ^\circ\text{R}\end{aligned}$$

**PROBLEMA A-5-12.** El peso molecular de una sustancia pura es el peso de una molécula de la sustancia comparada con el peso de un átomo de oxígeno, cuyo valor se toma como 16. Eso es, el peso molecular del dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) es  $12 + (16 \times 2) = 44$ . Los pesos moleculares del oxígeno (molecular) y el vapor de agua son 32 y 18, respectivamente.

Determinése el volumen específico  $v$  de una mezcla que consta de  $100 \text{ m}^3$  de oxígeno,  $5 \text{ m}^3$  de dióxido de carbono, y  $20 \text{ m}^3$  de vapor de agua cuando la presión y la temperatura son  $1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs}$  y  $294 \text{ K}$ , respectivamente,

**Solución.** El peso molecular promedio de la mezcla es

$$M = \left(32 \times \frac{100}{125}\right) + \left(44 \times \frac{5}{125}\right) + \left(18 \times \frac{20}{125}\right) = 30.24$$

Así,

$$v = \frac{\bar{R}T}{Mp} = \frac{8314 \times 294}{30.24 \times 1.0133 \times 10^5} = 0.798 \text{ m}^3/\text{kg}$$

**PROBLEMA A-5-13.** En relación con el sistema neumático de presión mostrado en la Fig. 5-35(a), supóngase que el sistema se encuentra en estado estable durante  $t < 0$  y que la presión en estado estable del sistema es  $\bar{P} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ abs}$ . En  $t = 0$  la presión de entrada se cambia súbitamente de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_i$ , donde  $p_i$  es un cambio en forma de escalón con una magnitud igual a  $2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ . Este escalón causa que el aire fluya en el recipiente hasta que sea igual a la presión. Supóngase que la razón de flujo inicial es  $q(0) = 1 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$ . Al fluir el aire dentro del recipiente, la presión se eleva de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_0$ . Determinése  $p_2$  como una función del tiempo. Supóngase que el proceso de expansión es isotérmico ( $n = 1$ ), que la temperatura del sistema entero es constante en  $T = 293 \text{ K}$  y que el recipiente tiene una capacidad de  $0.1 \text{ m}^3$ .

**Solución.** La resistencia promedio de la válvula es

$$R = \frac{\Delta p}{q} = \frac{2 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^8 \text{ N-s/kg-m}^2$$

La capacitancia del recipiente es

$$C = \frac{V}{nR_{\text{aire}}T} = \frac{0.1}{1 \times 287 \times 293} = 1.19 \times 10^{-6} \text{ kg-m}^2/\text{N}$$



Un modelo matemático de este sistema se obtiene de

$$C dp_0 = q dt$$

donde

$$q = \frac{\Delta p}{R} = \frac{p_i - p_0}{R}$$

Así,

$$RC \frac{dp_0}{dt} + p_0 = p_i$$

Al sustituir los valores de  $R$ ,  $C$ , y  $p_i$  en esta última ecuación, tenemos

$$2 \times 10^8 \times 1.19 \times 10^{-6} \frac{dp_0}{dt} + p_0 = 2 \times 10^4$$

o bien

$$238 \frac{dp_0}{dt} + p_0 = 2 \times 10^4 \quad (5-46)$$

Definamos

$$x(t) = p_0(t) - 2 \times 10^4 \quad (5-47)$$

Entonces, al sustituir la Ec. (5-47) en la Ec. (5-46), obtenemos una ecuación diferencial en  $X$  como sigue

$$238 \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (5-48)$$

Notando que  $p_0(0) = 0$ , la condición inicial para  $x(t)$  es

$$x(0) = p_0(0) - 2 \times 10^4 = -2 \times 10^4$$

Al suponer la solución exponencial  $x = Ke^{\lambda t}$  y sustituirla en la Ec. (5-48), encontramos la ecuación característica

$$238\lambda + 1 = 0$$

de la cual

$$\lambda = -0.0042$$

Por lo tanto,  $x(t)$  puede escribirse

$$x(t) = Ke^{-0.0042t}$$

donde  $K$  es una constante que puede determinarse a partir de la condición inicial.

$$x(0) = K = -2 \times 10^4$$

Así,

$$x(t) = -2 \times 10^4 e^{-0.0042t}$$

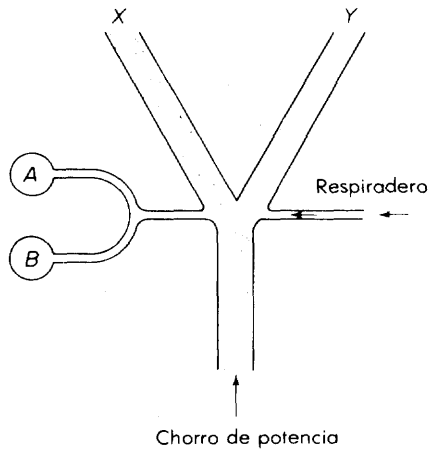
La sustitución de esta última ecuación en la Ec. (5-47) da

$$p_0(t) = x(t) + 2 \times 10^4 = 2 \times 10^4 (1 - e^{-0.0042t})$$

Puesto que la constante de tiempo del sistema es  $RC = 238$  segundos, tarda aproximadamente 950 segundos antes que la respuesta se modere dentro de un 2% del cambio total.

**\*PROBLEMA A-5-14.** La figura 5-60 es un diagrama esquemático de un dispositivo fluidoico. Es una versión ligeramente modificada del amplificador de la atracción de pared mostrado en la Fig. 5-39. Al ventilar un lado, en ese lado existe una alta presión. El chorro principal está en el puerto  $X$  si no existe una señal de entrada en " $A$ " o " $B$ ". (La salida está en el punto  $Y$  si está presente una señal de entrada en " $A$ " o " $B$ ". Cuando la señal de entrada está apagada, el chorro principal se conmuta del puerto  $Y$  a el puerto  $X$ .)

Constrúyase una tabla de verdad para este dispositivo. ( $A$  y  $B$  corresponden a las entradas y  $X$  y  $Y$  corresponden a las salidas.) ¿Qué función lógica realiza este dispositivo?



**Fig. 5-60.** Dispositivo fluidoico.

**Solución.** La tabla de verdad para este dispositivo se muestra en la tabla 5-60. En la tabla puede verse que el puerto  $X$  actúa como un dispositivo NOR y el puerto  $Y$  como un dispositivo OR.

**Tabla 5-6.** TABLA DE VERDAD

$A$	$B$	$X$	$Y$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

**\*PROBLEMA A-5-15.** Pruébese las siguientes identidades de la lógica matemática.

1.  $A(A + B + C) = A$
2.  $A + BC = (A + B)(A + C)$
3.  $A + AB = A$
4.  $A + \bar{A}B = A + B$
5.  $A\bar{B} + \bar{A}B = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$
6.  $(A + \bar{B})(\bar{A} + B) = AB + \bar{A}\bar{B}$

**Solución.**

1. Si  $A$  es 1, entonces  $A(A + B + C) = 1$  independientemente de  $B$  y  $C$  y si  $A$  es 0, entonces  $A(A + B + C) = 0$ , prescindiendo de  $B$  y  $C$ . Por lo tanto

$$A(A + B + C) = A$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (A + B)(A + C) &= AA + BA + AC + BC \\ &= A(A + B + C) + BC = A + BC \end{aligned}$$

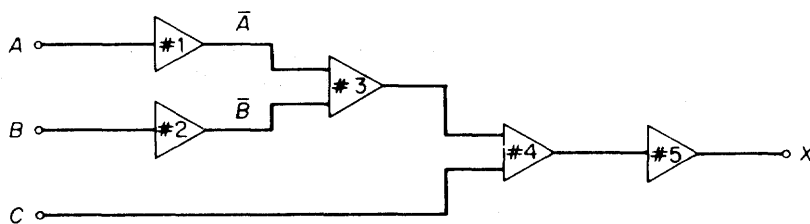
$$3. \quad A + AB = A(1 + B) = A1 = A$$

$$\begin{aligned} 4. \quad A + B &= (A + \bar{A})(A + B) = AA + \bar{A}A + AB + \bar{A}B \\ &= A(A + B) + \bar{A}B = A + \bar{A}B \end{aligned}$$

$$5. \quad (A + B)(\bar{A} + \bar{B}) = A\bar{A} + B\bar{A} + A\bar{B} + B\bar{B} = A\bar{B} + \bar{A}B$$

$$6. \quad (A + \bar{B})(\bar{A} + B) = A\bar{A} + \bar{B}\bar{A} + AB + \bar{B}B = AB + \bar{A}\bar{B}$$

**\*PROBLEMA A-5-16.** Considérese el circuito lógico mostrado en la Fig. 5-61 y encuentrese la expresión lógica de  $X$ . Constrúyase una tabla de verdad para este circuito. Muéstrese que la señal de entrada  $C$  actúa como una señal de supresión.



**Fig. 5-61.** Circuito lógico.

**Solución.** La salida del elemento NOR #3 es  $AB$  y la salida del elemento NOR #4 es  $AB + C$ . Por lo tanto, la salida  $X$  es igual a  $AB + C$ . De esta expresión vemos que siempre que  $C = 1$ , la salida es  $X = 1$ . Por lo tanto, la señal  $C$  es de supresión. Ésta activará el circuito sin importar qué valores tengan  $A$  y  $B$ . La tabla de verdad de este circuito se muestra en la tabla 5-7.

Tabla 5-7. TABLA DE VERDAD

A	B	C	X
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Tabla 5-8. TABLA DE VERDAD

A	B	C	X
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

**\*PROBLEMA A-5-17.** Obtégase un circuito lógico que realice la función lógica mostrada en la tabla 5-8.

**Solución.** La expresión lógica de  $X$  es

$$\begin{aligned}
 X &= A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} \\
 &= A\bar{B} + \bar{A}B\bar{C} \\
 &= \overline{\bar{A} + B} + \overline{A + \bar{B} + C}
 \end{aligned}$$

El circuito lógico para esta expresión se muestra en la Fig. 5-62.

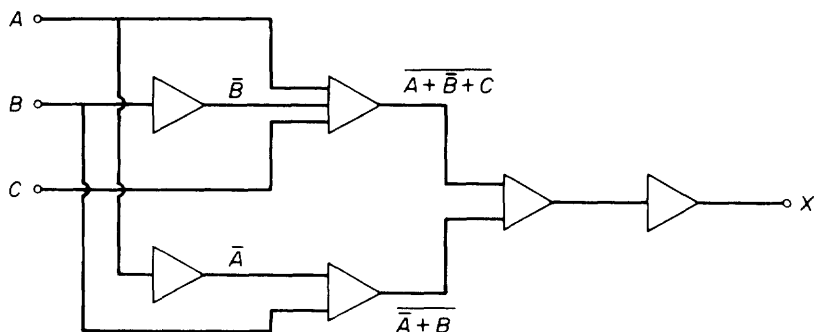


Fig. 5-62. Circuito lógico.

**\*PROBLEMA A-5-18.** Obténgase un circuito para la siguiente expresión lógica. Úsen-se solamente elementos NOR.

$$X = (A + BC)(\bar{A} + \bar{B}) + A(A + \bar{B} + C)$$

**Solución.** La expresión lógica puede simplificarse como sigue

$$\begin{aligned} X &= A\bar{A} + BC\bar{A} + A\bar{B} + BC\bar{B} + A \\ &= (A + \bar{A}BC) + A\bar{B} \\ &= A + BC + A\bar{B} \\ &= A + BC + \bar{B} \\ &= A(1 + \bar{B}) + BC \\ &= A + BC \\ &= A + \overline{\bar{B} + \bar{C}} \end{aligned}$$

En la Fig. 5-63 se da un circuito lógico para esta expresión simplificada.

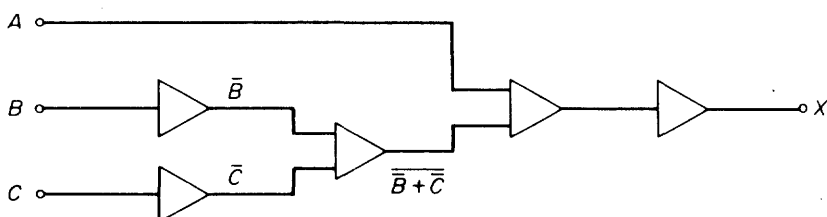


Fig. 5-63. Circuito lógico.

**\*PROBLEMA A-5-19.** Obténgase la expresión lógica para el circuito mostrado en la Fig. 5-64. Constrúyase una tabla de verdad para ese circuito.

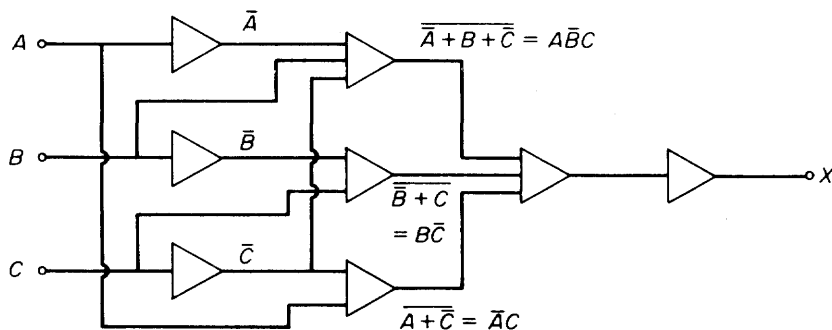


Fig. 5-64. Circuito lógico.

**Solución.** Del diagrama obtenemos

$$\begin{aligned} X &= A\bar{B}\bar{C} + B\bar{C} + \bar{A}C \\ &= (A\bar{B} + \bar{A})C + B\bar{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\bar{A} + \bar{B})C + B\bar{C} \\
 &= \bar{A}C + \bar{B}C + B\bar{C}
 \end{aligned}$$

En la tabla 5-9 se muestra una tabla de verdad de este circuito lógico.

**Tabla 5-9.** TABLA DE VERDAD

A	B	C	X
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

**\*PROBLEMA A-5-20.** Una línea de producción automatizada realiza una serie de cuatro pruebas sobre un producto manufacturado. Diseñese un circuito lógico que pueda examinar simultáneamente todos los resultados de las cuatro pruebas y decida en cuál de tres tolvas caerá la pieza. Si ésta pasa dos o tres pruebas, está abierta la tolva # 2. Si pasa una o ninguna de las pruebas, va a la tolva # 3. La tolva # 1 acepta solamente unidades perfectas.

**Solución.** Aquí las cuatro pruebas pueden considerarse como entradas al sistema, y las tolvas # 1, # 2 y # 3 consideradas como salidas. Definiendo las cuatro pruebas como las entradas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , y las tolvas # 1, # 2 y # 3 como las salidas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente, podemos construir una tabla de verdad para este problema como se muestra en la tabla 5-10. Las expresiones lógicas de  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  pueden obtenerse de esta tabla. Puesto que el número de ceros es menor que el número de unos en la columna  $Y$ , es mejor obtener la expresión lógica deseada de  $\bar{Y}$  si comenzamos con  $Y$ . De la tabla 5-10.

$$X = ABCD$$

$$\bar{Y} = ABCD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$Z = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

Por lo tanto,

$$\bar{X} = \overline{ABCD} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$$

$$X = \bar{\bar{X}} = \overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}}$$

Tabla 5-10. TABLA DE VERDAD

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1

A continuación, simplificamos la expresión lógica de *Z*.

$$\begin{aligned}
 Z &= A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \\
 &= (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) + (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) \\
 &\quad + (\bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) + (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) \\
 &= \bar{A}\bar{B}\bar{C}(D + \bar{D}) + \bar{B}\bar{C}\bar{D}(A + \bar{A}) \\
 &\quad + \bar{A}\bar{B}\bar{D}(C + \bar{C}) + \bar{A}\bar{C}\bar{D}(B + \bar{B}) \\
 &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}\bar{D} \\
 &= \overline{A + B + C + B + C + D} + \overline{A + B + D} + \overline{A + C + D}
 \end{aligned}$$

Observando que

$$\bar{Y} = ABCD + Z$$

obtenemos

$$\begin{aligned} Y &= \overline{ABCD + Z} = \overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} + Z} \\ &= \overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} + A + B + C + \bar{B} + C + D + A + B + D + A + C + D} \end{aligned}$$

En la Fig. 5-65 se muestra un circuito lógico de este sistema.

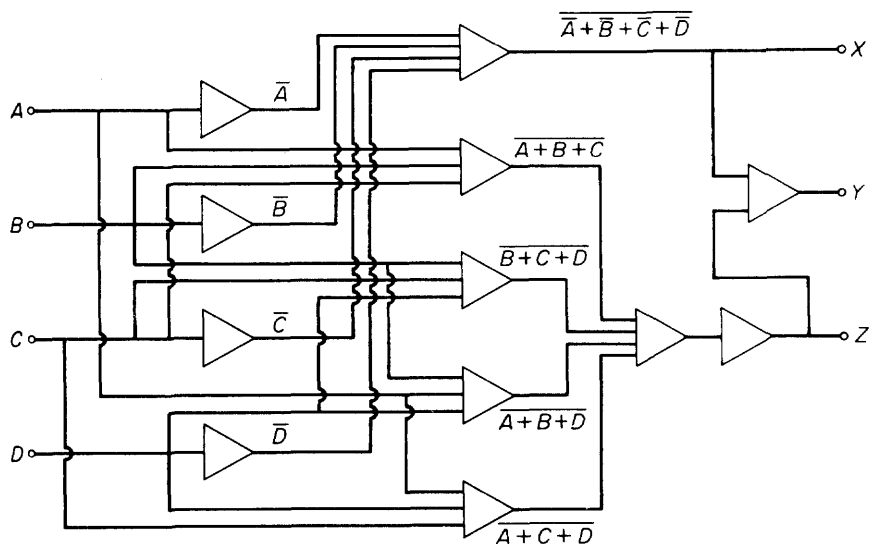


Fig. 5-65. Circuito lógico.

## PROBLEMAS

**PROBLEMA B-5-1.** Encuentre la diferencia de presión  $p_1 - p_2$  necesaria para mantener la barra sin masa  $AB$  horizontal en el sistema mostrado en la Fig. 5-66. Suponga que  $mg = 1000 \text{ N}$  y  $A = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ .

**PROBLEMA B-5-2.** En el sistema de la Fig. 5-67 se empuja la masa  $m$  hacia arriba a lo largo del plano inclinado mediante el cilindro neumático. La fuerza de fricción  $\mu N$  está actuando en oposición a la dirección del movimiento o donde se intenta el movimiento. Si se va a mover la carga, muestre que el área  $A$  del pistón no debe ser menor que

$$\frac{mg \sin(\theta + \alpha)}{(p_1 - p_2) \cos \theta}$$

donde  $\theta = \tan^{-1} \mu$  y  $\alpha$  es el ángulo de inclinación del plano.



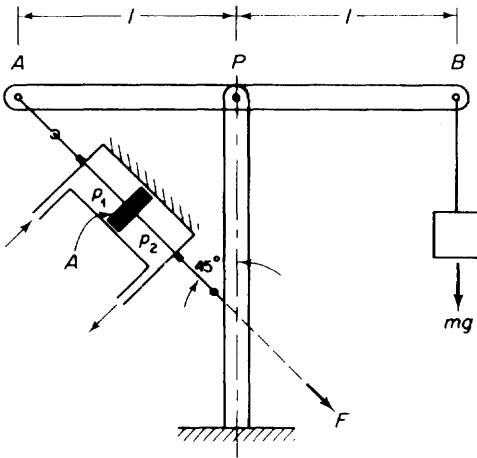


Fig. 5-66. Sistema neumático.

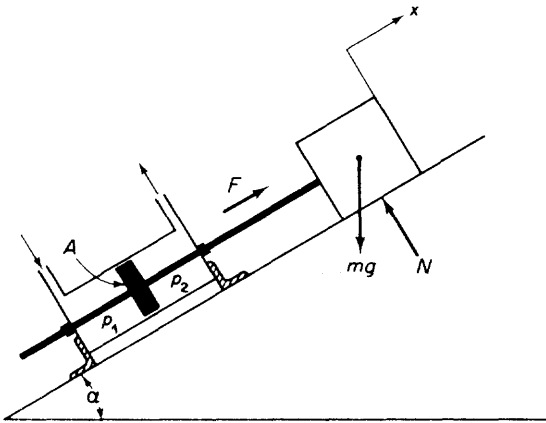


Fig. 5-67. Sistema neumático.

**PROBLEMA B-5-3.** La figura 5-68 muestra una junta de codillo. Pruebe que

$$F = 2 \frac{l_1}{l_2} R$$

**PROBLEMA B-5-4.** El sistema mostrado en la Fig. 5-69 consiste en un cilindro de potencia y un mecanismo de cremallera y piñón para impulsar la carga. El pistón *D* mueve la cremallera *C*, la cual, a su vez, causa que el pistón *B* gire sobre la cremallera *A*. Encuentre el desplazamiento *y* de la salida cuando el desplazamiento del pistón de potencia es *x*.

**PROBLEMA B-5-5.** Si la presión atmosférica es de 758 mm Hg y la presión medida es de 25 mm Hg manométrica, ¿cuál es la presión absoluta en  $\text{N/m}^2$ ,  $\text{kg}_f/\text{cm}^2$ , y  $\text{lb}_f/\text{in}^2$ ?

**PROBLEMA B-5-6.** Una masa de 100 kg se levanta verticalmente 10 m. Encuentre el trabajo realizado en términos de calor en kcal.

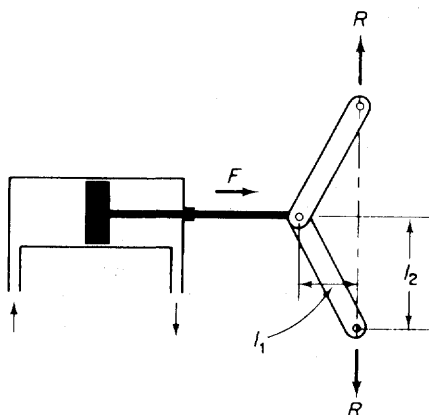


Fig. 5-68. Junta de codillo.

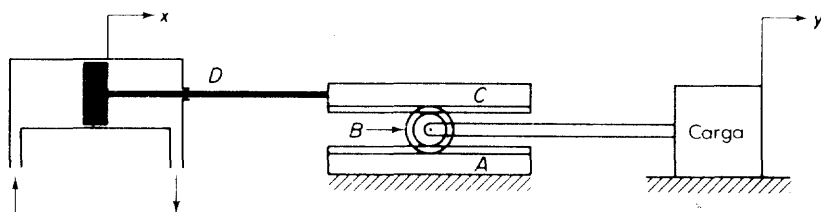


Fig. 5-69. Sistema neumático.

**PROBLEMA B-5-7.** Se comprime aire dentro de un tanque de  $10 \text{ m}^3$  de volumen. La presión es de  $7 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  y la temperatura es de  $20^\circ\text{C}$ . Encuentre la masa del aire en el tanque. Si la temperatura del aire comprimido se eleva a  $40^\circ\text{C}$ , ¿cuál es la presión manométrica en  $\text{N/m}^2$ ,  $\text{kg}_f/\text{cm}^2$ , y  $\text{lb}_f/\text{in}^2$ ?

**PROBLEMA B-5-8.** Expresé  $R_{\text{aire}}$ , la constante del gas del aire en términos de kilocalorías por kilogramo kelvin.

**PROBLEMA B-5-9.** Un cilindro contiene  $0.1 \text{ kg}$  de aire. Suponga que cuando el aire se comprime con  $1.2 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$  de trabajo realizado, se disipa a los alrededores una cantidad de calor de  $2 \text{ kcal}$ . Encuentre el incremento en energía interna del aire por kilogramo.

**PROBLEMA B-5-10.** La ecuación para la velocidad del sonido en un gas está dada por

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

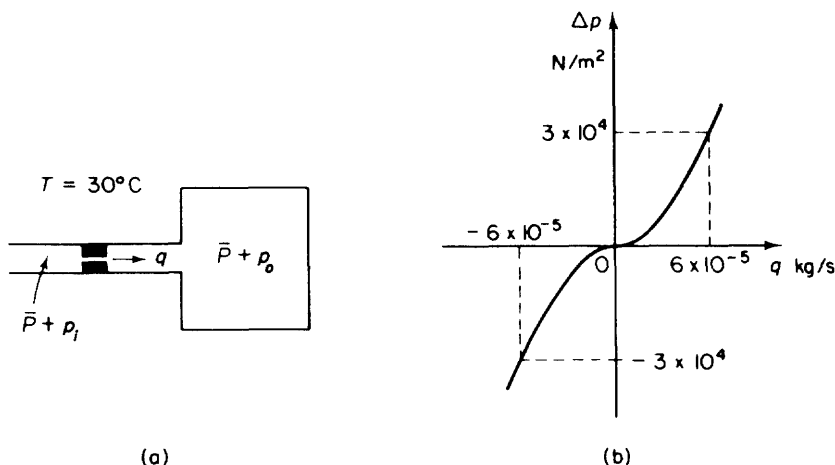
Muestre que también puede darse por

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

donde  $K$  es el módulo de elasticidad de dispersión del gas.

**PROBLEMA B-5-11.** Obtenga la capacitancia  $C$  de un recipiente de presión neumática que contiene  $10 \text{ m}^3$  de aire a la temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . Suponga que el proceso de expansión es isotérmico.

**PROBLEMA B-5-12.** El sistema neumático de presión mostrado en la Fig. 5-70(a) consta de un recipiente de presión y un tubo con un orificio. Suponga que el sistema se encuentra en estado estable durante  $t < 0$  y que la presión en estado estable es  $\bar{P}$ , donde  $\bar{P} = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  abs. En  $t = 0$  la presión se cambia de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_i$ , en un paso que causa que la presión en el recipiente cambie de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_0$ . Suponga también que la escala de operación de la diferencia de presión  $\Delta p = p_i - p_0$  se encuentra entre  $-3 \times 10^4 \text{ N/m}^2$  y  $3 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ . La capacidad del recipiente es de  $1 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , y la curva  $\Delta p$  contra  $q$  (razón de flujo de masa) se da en la Fig. 5-70(b). La temperatura del sistema completo es de  $30^\circ\text{C}$ , y el proceso de expansión se supone isotérmico. Obtenga un modelo matemático del sistema.



**Fig. 5-70.** (a) Sistema de presión neumática; (b) curva de diferencia de presión contra razón de flujo de masa.

**PROBLEMA B-5-13.** Considere el sistema neumático de presión mostrado en la Fig. 5-71. Durante  $t < 0$ , la válvula de entrada está cerrada, la válvula de salida está totalmente abierta a la atmósfera, y la presión  $p_2$  en el recipiente es la presión atmosférica. en  $t = 0$  la válvula de entrada se abre totalmente. El tubo de entrada está conectado a una fuente de presión que suministra aire a la presión constante de  $p_1$ , donde  $p_1 = 0.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  manométrica. Suponga que el proceso de expansión es isotérmico ( $n = 1$ ) y que la temperatura del sistema completo permanece constante.

Determine la presión en estado estable  $p_2$  en el recipiente después que la válvula de entrada se haya abierto completamente, suponiendo que las válvulas de entrada y salida son idénticas; es decir, ambas válvulas tienen idénticas características de flujo.

**\*PROBLEMA B-5-14.** Explique cómo el circuito mostrado en la Fig. 5-72 actúa como un circuito de memoria.



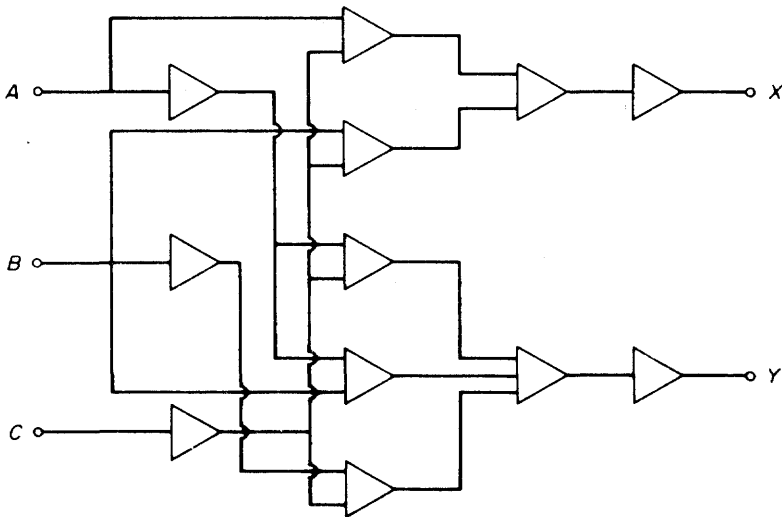
**Tabla 5-11. TABLA DE VERDAD**

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>X</i>
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

**Tabla 5-12. TABLA DE VERDAD**

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>X</i>
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

**\*PROBLEMA B-5-19.** En el circuito lógico mostrado en la Fig. 5-74, obtenga la expresión lógica para *X* y *Y*. Construya una tabla de verdad para este circuito.

**Fig. 5-74.** Circuito lógico.

**\*PROBLEMA B-5-20.** Usando solamente elementos NOR, construya un circuito lógico que represente la siguiente declaración. Una compuerta está normalmente en posición de cerrada. La compuerta se abre si los conmutadores *A* y *B* son ambos abiertos y/o se abre el conmutador de emergencia *C*.

# 6

## TRANSFORMADA DE LAPLACE

### 6-1 INTRODUCCIÓN

El método de la transformada de Laplace es un método operacional que puede usarse ventajosamente en la solución de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo. Su ventaja principal es que la diferenciación de la función del tiempo corresponde a la multiplicación de la transformada por una variable compleja  $s$ , y así las ecuaciones diferenciales en el tiempo se hacen ecuaciones algebraicas en  $s$ . La solución de la ecuación diferencial puede, por tanto, encontrarse mediante el uso de una tabla de transformadas de Laplace o por la técnica de expansión en fracciones parciales. Otra ventaja del método de la transformada de Laplace es que, al resolver la ecuación diferencial, las condiciones iniciales quedan automáticamente incluidas y tanto la solución particular como la solución homogénea pueden obtenerse simultáneamente.

En este capítulo no se hace énfasis en el rigor matemático sino en los métodos de aplicación a problemas asociados con el análisis y el diseño de sistemas lineales.

El esquema del resto del capítulo es como sigue. La sección 6-2 trata de los números complejos, las variables complejas y las funciones complejas, los cuales normalmente se incluyen en los cursos de matemáticas requeridos por los estudiantes de ingeniería del nivel de segundo grado. La sección 6-3 define la transformada de Laplace y deriva transformadas de Laplace en fun-

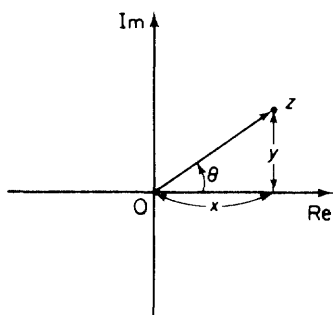
ciones del tiempo simples, y en la sección 6-4 se dan teoremas útiles sobre la transformada de Laplace. La transformada inversa de Laplace, o sea el proceso matemático de obtener funciones del tiempo de expresiones de variable compleja, transformadas de Laplace, se cubre en la Sec. 6-5. La sección final, Sec. 6-6, expone la solución de ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo a través del método de la transformada de Laplace.

## 6-2 NÚMEROS COMPLEJOS, VARIABLES COMPLEJAS Y FUNCIONES COMPLEJAS

Puesto que esta sección es una revisión de los números complejos, el álgebra compleja, las variables complejas, y las funciones complejas y puesto que la mayor parte del material cubierto generalmente se incluye en los cursos de matemáticas básicas para estudiantes de ingeniería, puede omitirse por completo o usarse simplemente para consulta personal.

**Números complejos.** Usando la notación  $j = \sqrt{-1}$ , todos los números en los cálculos de ingeniería se pueden expresar como

$$z = x + jy$$



**Fig. 6-1.** Representación en el plano complejo de un número complejo  $z$ .

donde a  $z$  se le llama *número complejo* y a  $x$  y  $y$  sus partes *real* e *imaginaria* respectivamente. Nótese que tanto  $x$  como  $y$  son reales y que la  $j$  es la única cantidad imaginaria en la expresión. La representación de  $z$  en el plano complejo se muestra en la Fig. 6-1. (Nótese también que el eje real y el eje imaginario definen el plano complejo y que la combinación de un número real y un número imaginario define un punto en el plano complejo.) Un número complejo  $z$  puede considerarse un punto en el plano complejo o un segmento de recta dirigido al punto; ambas interpretaciones son útiles.

La magnitud, o valor absoluto de  $z$ , se define como la longitud del segmento de recta dirigido, mostrado en la Fig. 6-1. El ángulo de  $z$  es el ángulo que el segmento de recta dirigido forma con el eje real positivo. Para la me-

dición de los ángulos se define como dirección positiva la del sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$\text{Magnitud de } z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{Ángulo de } z = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

En términos de la magnitud y el ángulo,  $z$  puede expresarse como  $z = |z|/\underline{\theta}$ , la cual se llama la *forma polar* de  $z$ , en oposición a la forma  $z = x + jy$ , la cual se llama *forma rectangular* de  $z$ . Así que  $z$  puede escribirse como

$$z = x + jy = |z|/\underline{\theta}$$

donde  $x = |z| \cos \theta$  y  $y = |z| \sin \theta$ .

**Complejo conjugado.** El *complejo conjugado* de  $z = x + jy$  se define como

$$\bar{z} = x - jy$$

Tiene la misma parte real que  $z$  y una parte imaginaria que es la negativa de la parte imaginaria de  $z$ . La Fig. 6-2 muestra a  $z$  y a  $\bar{z}$ . Nótese que

$$z = x + jy = |z|/\underline{\theta} = |z|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\bar{z} = x - jy = |z|/\underline{-\theta} = |z|(\cos \theta - j \sin \theta)$$

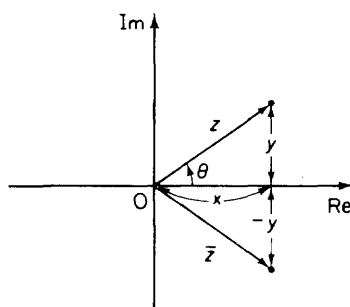


Fig. 6-2. Número complejo  $z$  y su complejo conjugado  $\bar{z}$ .

**Teorema de Euler.** Las expansiones de series de potencia de  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$  son, respectivamente,

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

Y por lo tanto,

$$\cos \theta + j \sin \theta = 1 + (j\theta) + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \dots$$

Puesto que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$



vemos que

$$\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta = e^{j\theta}$$

Ésta se conoce como *teorema de Euler*.

Al usar el teorema de Euler, podemos expresar seno y coseno en forma compleja. Observando que  $e^{-j\theta}$  es el complejo conjugado de  $e^{j\theta}$  y que

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta$$

encontramos, después de sumar y restar estas dos ecuaciones,

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

**Diferentes formas de representar números complejos.** Un número complejo puede escribirse en varias formas

$$z = x + jy \quad (\text{formas rectangulares})$$

$$z = |z| (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = |z| \frac{\theta}{\quad} \quad (\text{formas polares})$$

$$z = |z| e^{j\theta}$$

Convirtiendo números complejos de la forma rectangular a la polar,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Para convertir números complejos de la forma polar a la rectangular,

$$x = |z| \cos \theta, \quad y = |z| \operatorname{sen} \theta$$

**Álgebra compleja.** Si los números complejos se escriben en la forma adecuada, se pueden efectuar fácilmente operaciones como la adición, la sustracción, la multiplicación y la división.

**Igualdad de los números complejos.** Se dice que dos números complejos  $z$  y  $w$  son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. De modo que si se escriben dos números complejos

$$z = x + jy, \quad w = u + jv$$

entonces  $z = w$  si y sólo si  $x = u$  y  $y = v$ .

**Adición.** Dos números complejos en la forma rectangular se suman mediante la adición de las partes reales y las partes imaginarias separadamente.

$$z + w = (x + jy) + (u + jv) = (x + u) + j(y + v)$$

**Sustracción.** La sustracción puede considerarse como la adición del negativo.

$$z - w = (x + jy) - (u + jv) = (x - u) + j(y - v)$$

Nótese que la adición y la sustracción pueden hacerse fácilmente en el plano rectangular.

**Multiplicación.** Si un número complejo se multiplica por un número real, entonces resulta un número complejo cuyas partes real e imaginaria están multiplicadas por ese número real.

$$az = a(x + jy) = ax + jay$$

Si aparecen dos números complejos en su forma rectangular y queremos el producto en la forma rectangular, la multiplicación a cabo utilizando el hecho de que  $j^2 = -1$ . Así, si dos números complejos se escriben

$$z = x + jy, \quad w = u + jv$$

entonces

$$\begin{aligned} zw &= (x + jy)(u + jv) = xu + jyu + jxv + j^2yv \\ &= (xu - yv) + j(xv + yu) \end{aligned}$$

En la forma polar, la multiplicación de dos números complejos puede hacerse fácilmente. La magnitud del producto es el producto de las dos magnitudes, y el ángulo del producto es la suma de los dos ángulos. De modo que si dos números complejos se escriben

$$z = |z| / \underline{\theta}, \quad w = |w| / \underline{\phi}$$

entonces

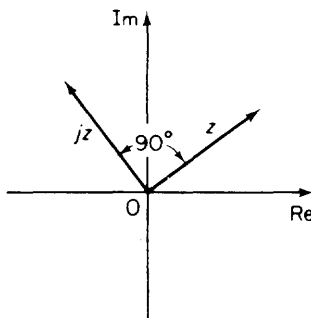
$$zw = |z||w| / \underline{\theta + \phi}$$

**Multiplicación por  $j$ .** Es importante notar que la multiplicación por  $j$  es equivalente a una rotación de  $90^\circ$  contraria al sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si

$$z = x + jy$$

entonces

$$jz = j(x + jy) = jx + j^2y = -y + jx$$



**Fig. 6-3.** Multiplicación de un número complejo  $z$  por  $j$ .

u observando que  $j = 1/\underline{90^\circ}$ , si

$$z = |z|/\underline{\theta}$$

entonces

$$jz = 1/\underline{90^\circ} \cdot |z|/\underline{\theta} = |z|/\underline{\theta + 90^\circ}$$

La figura 6-3 ilustra la multiplicación de un número complejo  $z$  por  $j$ .

**División.** Si un número complejo  $z = |z|/\underline{\theta}$  se divide entre otro número complejo  $w = |w|/\underline{\phi}$ , entonces

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|/\underline{\theta}}{|w|/\underline{\phi}} = \frac{|z|}{|w|} \underline{\theta - \phi}$$

Por lo tanto, el resultado consiste en el cociente de las magnitudes y la diferencia de los ángulos.

La división en la forma rectangular es inconveniente, pero puede efectuarse mediante la multiplicación del denominador y numerador por el complejo conjugado del denominador. Este procedimiento convierte el denominador en un número real y se simplifica así la división. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{x + jy}{u + jv} = \frac{(x + jy)(u - jv)}{(u + jv)(u - jv)} = \frac{xu + yv + j(yu - xv)}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + j \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

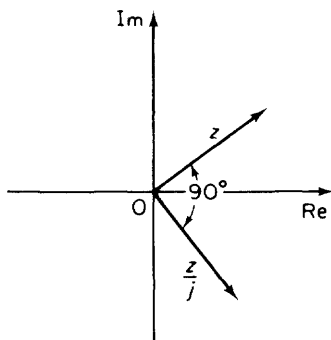
**División entre  $j$ .** Nótese que la división entre  $j$  es equivalente a una rotación de  $90^\circ$  en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si  $z = x + jy$ , entonces

$$\frac{z}{j} = \frac{x + jy}{j} = \frac{(x + jy)j}{jj} = \frac{jx - y}{-1} = y - jx$$

o bien

$$\frac{z}{j} = \frac{|z|/\underline{\theta}}{1/\underline{90^\circ}} = |z|/\underline{\theta - 90^\circ}$$

La figura 6-4 ilustra la división de un número complejo  $z$  entre  $j$ .



**Fig. 6-4.** División de un número complejo  $z$  entre  $j$ .

**Potencias y raíces.** Multiplicando  $z$  por sí mismo  $n$  veces, obtenemos

$$z^n = (|z|/\underline{\theta})^n = |z|^n/n\theta$$

La extracción de la raíz  $n$ -ésima de un número complejo es equivalente a elevar el número a la potencia  $1/n$ -ésima.

$$z^{1/n} = (|z|/\underline{\theta})^{1/n} = |z|^{1/n} \underline{\frac{\theta}{n}}$$

Por ejemplo,

$$(8.66 - j5)^3 = (10/\underline{-30^\circ})^3 = 1000/\underline{-90^\circ} = 0 - j1000 = -j1000$$

$$(2.12 - j2.12)^{1/2} = (3/\underline{-45^\circ})^{1/2} = \underline{3/\underline{-22.5^\circ}}$$

**Comentario.** Es importante notar que

$$|zw| = |z||w|$$

$$|z + w| \neq |z| + |w|$$

**Variable compleja.** Un número complejo tiene una parte real y una parte imaginaria y ambas partes son constantes. Si la parte real y/o la parte imaginaria son variables, el número complejo se llama *variable compleja*. En la transformada de Laplace usamos la notación  $s$  como una variable compleja; esto es,

$$s = \sigma + j\omega$$

donde  $\sigma$  es la parte real y  $\omega$  es la parte imaginaria.

**Función compleja.** Una función compleja  $F(s)$ , como función de  $s$ , tiene una parte real y una parte imaginaria o

$$F(s) = F_x + jF_y$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son cantidades reales. La magnitud de  $F(s)$  es  $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ , y el ángulo  $\theta$  de  $F(s)$  es  $\tan^{-1}(F_y/F_x)$ . El ángulo se mide en el sentido al de las manecillas del reloj desde el eje real positivo. El complejo conjugado de  $F(s)$  es  $\bar{F}(s) = F_x - jF_y$ .

Las funciones complejas comúnmente encontradas en el análisis de sistemas lineales son funciones univaluadas de  $s$  y están unívocamente determinadas para un valor dado de  $s$ . La forma típica de tales funciones es

$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

Los puntos en los cuales  $F(s)$  vale cero se llaman *ceros*. Esto es,  $s = -z_1$ ,  $s = -z_2$ ,  $\dots$ ,  $s = -z_m$  son ceros de  $F(s)$ . Los puntos en los cuales  $F(s)$  es igual a infinito se llaman *polos*. Esto es,  $s = -p_1$ ,  $s = -p_2$ ,  $\dots$ ,  $s = -p_n$  son polos de  $F(s)$ . Si el denominador de  $F(s)$  contiene factores de  $k$  múltiples  $(s + p)^k$ , entonces  $s = -p$  se llama *polo múltiple* de orden  $k$ . Si  $k = 1$ , el polo se llama *polo simple*.

Para ilustrar lo anterior, considere la función compleja

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}$$

$G(s)$  tiene ceros en  $s = -2$ ,  $s = -10$ , polos simples en  $s = 0$ ,  $s = -1$ ,  $s = -5$ , y un polo doble (polo múltiple de orden 2) en  $s = -15$ . Nótese que  $G(s)$  se hace cero en  $s = \infty$ . Puesto que para grandes valores de  $s$

$$G(s) \doteq \frac{K}{s^3}$$

$G(s)$  posee un triple cero (cero múltiple de orden 3) en  $s = \infty$ . Si se incluyen los puntos en el infinito,  $G(s)$  tiene el mismo número de polos y ceros. Resumiendo,  $G(s)$  tiene cinco ceros ( $s = -2$ ,  $s = -10$ ,  $s = \infty$ ,  $s = \infty$ ,  $s = \infty$ ) y cinco polos ( $s = 0$ ,  $s = -1$ ,  $s = -5$ ,  $s = -15$ ,  $s = -15$ ).

### 6-3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Además de la definición de la transformada de Laplace, esta sección incluye ejemplos de cómo obtener transformadas de Laplace de funciones comunes.

**Transformadas de Laplace.** Definamos

$f(t)$  = una función del tiempo tal que  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ .

$s$  = una variable compleja

$\mathcal{L}$  = un símbolo operacional que indica que la cantidad a la que antecede se va a transformar por la integral de Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$F(s)$  = transformada de Laplace de  $f(t)$

Entonces la transformada de Laplace está dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

El proceso inverso de encontrar la función del tiempo  $F(t)$  de la transformada de Laplace  $F(s)$  se llama *transformada inversa de Laplace*. La notación de la transformada inversa de Laplace es  $\mathcal{L}^{-1}$ . Así,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

**Existencia de la transformada de Laplace.** La transformada de Laplace de una función  $f(t)$  existe si la integral de Laplace converge. La integral converge si  $f(t)$  es continua seccionalmente en cada intervalo finito en el rango  $t > 0$  y si es de orden exponencial cuando  $t$  tienda a infinito. Se dice que una función  $f(t)$  es de orden exponencial si existe una constante real positiva  $\sigma$ , tal que la función tienda a cero cuando  $t$  tienda a infinito. Si el

$$e^{-\sigma t} |f(t)|$$

límite de la función  $e^{-\sigma t}|f(t)|$  tiende a cero para una  $\sigma$  mayor que  $\sigma_c$  y el límite tiende a infinito para una  $\sigma$  menor que  $\sigma_c$ , el valor  $\sigma_c$  se llama *abscisa de convergencia*.

Puede verse que, para funciones tales como  $t$ ,  $\sin \omega t$ , y  $t \sin \omega t$ , la abscisa de convergencia es igual a cero. Para funciones como  $e^{-ct}$ ,  $te^{-ct}$ ,  $e^{-ct} \sin \omega t$ , la abscisa de convergencia es igual a  $-c$ . En el caso de funciones que se incrementan más rápido que la función exponencial, sin embargo, es imposible encontrar valores adecuados de la abscisa de convergencia. En consecuencia, funciones tales como  $e^{t^2}$  y  $t\alpha^2$  no poseen transformada de Laplace.

No obstante, debe notarse que aunque  $e^{t^2}$  entre  $0 \leq t \leq \infty$  no posea transformada de Laplace, la función del tiempo definida por

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{t^2} && \text{para } 0 \leq t \leq T < \infty \\ &= 0 && \text{para } t < 0, T < t \end{aligned}$$

sí la posee, puesto que  $f(t) = e^{t^2}$  se define solamente para un intervalo limitado  $0 \leq t \leq T$  y no para  $0 \leq t \leq \infty$ . Así pues, se puede generar físicamente una señal. Nótese que las señales que se pueden generar físicamente tienen siempre la correspondiente transformada de Laplace.

Si las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son ambas transformables por Laplace, entonces la transformada de Laplace de  $f_1(t) + f_2(t)$  está dada por

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

**Función exponencial.** Considérese la función exponencial

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= Ae^{-\alpha t} && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $A$  y  $\alpha$  son constantes. La transformada de Laplace de esta función exponencial puede obtenerse como sigue

$$\mathcal{L}[Ae^{-\alpha t}] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{A}{s + \alpha}$$

Al efectuar esta integración, supusimos que la parte real de  $s$  es mayor que  $-\alpha$  (la abscisa de convergencia) y por lo tanto, que la integral converge. La transformada de Laplace  $F(s)$  de cualquier función transformable por Laplace  $f(t)$  obtenida de este modo es válida en todo el plano  $s$  excepto en los polos  $F(s)$ . (Aunque no presentamos una prueba de esta declaración, ésta puede probarse mediante el uso de la teoría de la variable compleja.)

**Función escalón.** Considérese la función escalón

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= A && \text{para } t > 0 \end{aligned}$$

donde  $A$  es una constante. Nótese que es un caso especial de la función ex-

ponencial  $Ae^{-\alpha t}$ , donde  $\alpha = 0$ . La función escalón es indefinida en  $t = 0$ . Su transformada de Laplace está dada por

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s}$$

La función escalón cuya altura es la unidad se llama *función escalón unitario*. La función escalón unitario que ocurre en  $t = t_0$  se escribe frecuentemente  $1(t - t_0)$ , notación que se usará en este libro. La función escalón precedente cuya altura es  $A$  se puede escribir  $A1(t)$ .

La transformada de Laplace de la función escalón unitario que está definida por

$$\begin{aligned} 1(t) &= 0 & \text{para } t < 0 \\ &= 1 & \text{para } t > 0 \end{aligned}$$

es  $1/s$  o

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

Físicamente, una función escalón que ocurre en  $t = t_0$  corresponde a una señal constante aplicada súbitamente al sistema en un instante  $t$  igual a  $t_0$ .

**Función rampa.** Considérese la función rampa

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & \text{para } t < 0 \\ &= At & \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $A$  es una constante. La transformada de Laplace de esta función rampa se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[At] &= \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt = At \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{Ae^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \end{aligned}$$

**Función senoidal.** La transformada de Laplace de la función senoidal

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & \text{para } t < 0 \\ &= A \sin \omega t & \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $A$  y  $\omega$  son constantes que se obtienen como sigue. Observando que

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

sen  $\omega t$  puede escribirse

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \operatorname{sen} \omega t] &= \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{A}{2j} \frac{1}{s - j\omega} - \frac{A}{2j} \frac{1}{s + j\omega} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

En forma similar, la transformada de Laplace de  $A \cos \omega t$  puede derivarse como sigue:

$$\mathcal{L}[A \cos \omega t] = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

**Comentarios.** La transformada de Laplace de cualquier función  $f(t)$  transformable por Laplace puede encontrarse multiplicando  $f(t)$  por  $e^{-st}$  y luego integrando el producto desde  $t = 0$  hasta  $t = \infty$ . Sin embargo, una vez que conozcamos el método para obtener la transformada de Laplace, no es necesario derivar la transformada de Laplace de  $f(t)$  cada vez. Pueden usarse convenientemente tablas de transformadas de Laplace para encontrar la transformada de cualquier función dada  $f(t)$ . La tabla 6-1 muestra transformadas de Laplace de funciones del tiempo que aparecerán frecuentemente en el análisis de sistemas lineales. En la tabla 6-2 se dan las propiedades de las transformadas de Laplace. La mayor parte de ellas se obtiene o se prueba en la sección 6-4.

#### 6-4 TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En la siguiente exposición explicaremos las transformadas de Laplace de varias funciones así como teoremas sobre la transformada de Laplace que son útiles en el estudio de los sistemas lineales.

**Función trasladada.** Obtengamos la transformada de Laplace de la función trasladada  $f(t - \alpha)1(t - \alpha)$ , donde  $\alpha \geq 0$ . Esta función es cero para  $t < \alpha$ . Las funciones  $f(t)1(t)$  y  $f(t - \alpha)1(t - \alpha)$  se muestran en la Fig. 6-5.

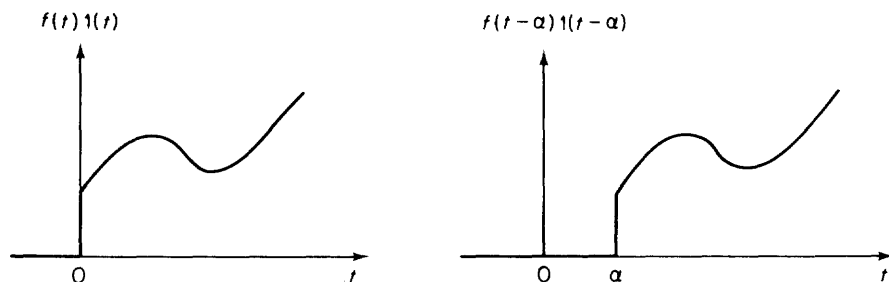


Fig. 6-5. Función  $f(t)1(t)$  y función trasladada  $f(t - \alpha)1(t - \alpha)$ .



Por definición, la transformada de Laplace de  $f(t - \alpha)1(t - \alpha)$  es

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = \int_0^{\infty} f(t - \alpha)1(t - \alpha)e^{-st} dt$$

Al cambiar la variable independiente de  $t$  a  $\tau$ , donde  $\tau = t - \alpha$ , obtenemos

$$\int_0^{\infty} f(t - \alpha)1(t - \alpha)e^{-st} dt = \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau$$

Observando que  $f(\tau)1(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ , podemos cambiar el límite inferior de integración de  $-\alpha$  a 0. Así,

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau &= \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}e^{-\alpha s} d\tau \\ &= e^{-\alpha s} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-\alpha s}F(s) \end{aligned}$$

donde

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Y así,

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = e^{-\alpha s}F(s) \quad \alpha \geq 0$$

Esta última ecuación establece que la traslación de la función del tiempo  $f(t)1(t)$  en  $\alpha$  (donde  $\alpha \geq 0$ ) corresponde a la multiplicación de la transformada  $F(s)$  por  $e^{-\alpha s}$

**Función pulso.** Considérese la función pulso

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A}{t_0} \quad \text{para } 0 < t < t_0 \\ &= 0 \quad \text{para } t < 0, t_0 < t \end{aligned}$$

donde  $A$  y  $t_0$  son constantes.

La función pulso puede considerarse aquí como una función escalón de altura  $A/t_0$  que empieza en  $t = 0$  y que está sobreimpuesta por una función escalón negativa de altura  $A/t_0$  que empieza en  $t = t_0$ , esto es,

$$f(t) = \frac{A}{t_0}1(t) - \frac{A}{t_0}1(t - t_0)$$

Entonces, la transformada de Laplace de  $f(t)$  se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}1(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}1(t - t_0)\right] \\ &= \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s}e^{-st_0} \\ &= \frac{A}{t_0 s}(1 - e^{-st_0}) \end{aligned} \tag{6-1}$$

**Tabla 6-1.** PARES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitario $\delta(t)$	1
2	Medida unitaria $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
7	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$

Tabla 6-1. (CONTINUACIÓN)

	$f(t)$	$F(s)$
17	$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2} (1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega} (\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

**Tabla 6-2.** PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_\pm \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0_\pm)$
4	$\mathcal{L}_\pm \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0_\pm) - \dot{f}(0_\pm)$
5	$\mathcal{L}_\pm \left[ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_\pm)$ <p style="text-align: center;">donde <math>f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)</math></p>
6	$\mathcal{L}_\pm \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[ \int f(t) dt \right]_{t=0_\pm}}{s}$
7	$\mathcal{L}_\pm \left[ \iint f(t) dt dt \right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[ \int f(t) dt \right]_{t=0_\pm}}{s^2} + \frac{\left[ \iint f(t) dt dt \right]_{t=0_\pm}}{s}$
8	$\mathcal{L}_\pm \left[ \int \cdots \int f(t) (dt)^n \right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[ \int \cdots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0_\pm}$
9	$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s}$
10	$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \quad \text{si } \int_0^\infty f(t) dt \text{ existe}$
11	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$
12	$\mathcal{L}[f(t - \alpha) 1(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} F(s) \quad \alpha \geq 0$
13	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
14	$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
15	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad n = 1, 2, 3, \dots$
16	$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{t} f(t) \right] = \int_s^\infty F(s) ds$
17	$\mathcal{L} \left[ f \left( \frac{t}{a} \right) \right] = aF(as)$

**Función impulso.** La función impulso es un caso especial del límite de la función pulso. Considérese la función impulso

$$f(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0} \quad \text{para } 0 < t < t_0 \\ = 0 \quad \text{para } t < 0, t_0 < t$$

Puesto que la altura de la función impulso es  $A/t_0$  y la duración es  $t_0$ , el área bajo el impulso es igual a  $A$ . Cuando la duración  $t_0$  tiende a cero, la altura  $A/t_0$  tiende a infinito, pero el área bajo el impulso permanece igual a  $A$ . Nótese que la magnitud del impulso se mide mediante esta área.

En relación con la Ec. (6-1), la transformada de Laplace de esta función impulso resulta ser:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[ \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right] \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0} (t_0 s)} = \frac{As}{s} = A \end{aligned}$$

Así, la transformada de Laplace de la función impulso es igual al área bajo el impulso.

La función impulso cuya área es igual a la unidad se llama *función impulso unitario* o *función delta de Dirac*. La función impulso unitario que ocurre en  $t = t_0$ , se denota usualmente por  $\delta(t - t_0)$ .  $\delta(t - t_0)$  satisface lo siguiente:

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{para } t \neq t_0$$

$$\delta(t - t_0) = \infty \quad \text{para } t = t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

Debe mencionarse que un impulso que tenga magnitud infinita y duración cero es una ficción matemática y no ocurre en los sistemas físicos. No obstante, si la magnitud de un pulso de entrada a un sistema es muy grande y su duración es muy corta comparada con las constantes de tiempo del sistema, entonces podemos aproximar el pulso de entrada mediante una función impulso. Por ejemplo, si una fuerza o par de entrada  $f(t)$  se aplica a un sistema durante muy corto tiempo  $0 < t < t_0$ , donde la magnitud de  $f(t)$  es suficientemente grande para que la integral  $\int_0^{t_0} f(t) dt$  sea no despreciable, entonces esta entrada puede considerarse una entrada impulso. (Nótese que cuando describimos la entrada impulso, el área o magnitud del impulso es lo más importante, pero la forma exacta del impulso casi siempre carece de importancia.) La entrada impulso suministra energía al sistema en un tiempo infinitesimal.

El concepto de función impulso es muy útil para diferenciar funciones discontinuas. La función impulso unitario  $\delta(t - t_0)$  puede considerarse como la derivada de la función escalón unitario  $1(t - t_0)$ : en el punto de la discontinuidad  $t = t_0$ , o bien

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} 1(t - t_0)$$

Recíprocamente, si se integra la función impulso unitario  $\delta(t - t_0)$ , el resultado es la función escalón unitario  $1(t - t_0)$ . Con el concepto de la función impulso podemos diferenciar una función que contenga discontinuidades, dando impulsos, cuyas magnitudes sean iguales a la magnitud de cada una de las correspondientes discontinuidades.

**Multiplicación de  $f(t)$  por  $e^{-\alpha t}$ .** Si  $f(t)$  es transformable por Laplace, siendo  $F(s)$  su transformada de Laplace, entonces la transformada de Laplace de  $e^{-\alpha t} f(t)$  se obtiene como

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = F(s + \alpha) \quad (6-2)$$

Vemos que la multiplicación de  $f(t)$  por  $e^{-\alpha t}$  tiene el efecto de reemplazar  $s$  por  $(s + \alpha)$  en la transformada de Laplace. Recíprocamente, cambiando a  $s$  por  $(s + \alpha)$  se tiene el equivalente de multiplicar  $f(t)$  por  $e^{-\alpha t}$ . (Nótese que  $\alpha$  puede ser real o compleja.)

La relación dada por la Ec. (6-2) es útil para encontrar las transformadas de Laplace de funciones tales como  $e^{-\alpha t} \sin \omega t$  y  $e^{-\alpha t} \cos \omega t$ . Por ejemplo, puesto que

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = F(s) \quad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} = G(s)$$

se sigue de la Ec. (6-2) que las transformadas de Laplace de  $e^{-\alpha t} \sin \omega t$  y  $e^{-\alpha t} \cos \omega t$  están dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = F(s + \alpha) = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \omega t] = G(s + \alpha) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

**Comentarios sobre el límite inferior de la integral de Laplace.** En algunos casos,  $f(t)$  posee una función impulso en  $t = 0$ . Por tanto, el límite inferior de la integral de Laplace debe ser claramente especificado como  $0^-$  o  $0^+$ , puesto que las transformadas de Laplace de  $f(t)$  difieren para esos dos límites inferiores. Si se necesita tal distinción entre los límites inferiores de la integral de Laplace, usamos las notaciones

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}_-[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}_+[f(t)] + \int_{0^-}^{0^+} f(t) e^{-st} dt$$

Si  $f(t)$  involucra una función impulso en  $t = 0$ , entonces

$$\mathcal{L}_+[f(t)] \neq \mathcal{L}_-[f(t)]$$

puesto que

$$\int_{0-}^{0+} f(t)e^{-st} dt \neq 0$$

para tal caso. Obviamente, si  $f(t)$  no posee una función impulso en  $t = 0$  (esto es, si la función por transformar es finita entre  $t = 0-$  y  $t = 0+$ ), entonces

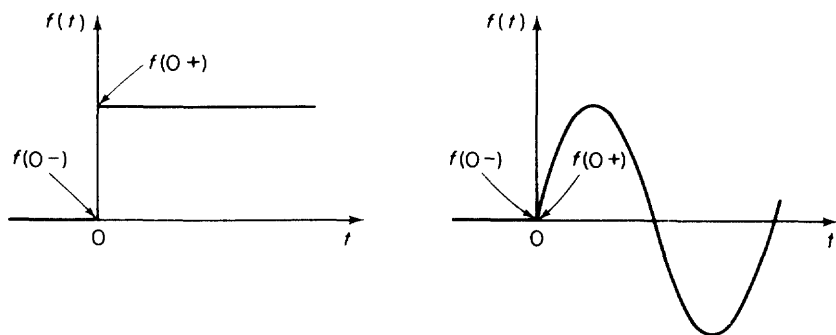
$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \mathcal{L}_-[f(t)]$$

**Teorema de la diferenciación.** La transformada de Laplace de la derivada de una función  $f(t)$  está dada por

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0) \quad (6-3)$$

donde  $f(0)$  es el valor inicial de  $f(t)$  evaluada en  $t = 0$ .

Para una función dada  $f(t)$ , los valores de  $f(0+)$  y  $f(0-)$  pueden ser los mismos o diferentes como se ilustra en la Fig. 6-6. La distinción entre  $f(0+)$  y  $f(0-)$  es importante cuando  $f(t)$  tiene una discontinuidad en  $t = 0$  porque en tal caso



**Fig. 6-6.** Función escalón y función seno indicando los valores iniciales en  $t = 0-$  y  $t = 0+$ .

$df(t)/dt$  involucrará una función impulso en  $t = 0$ . Si  $f(0+) \neq f(0-)$ , la Ec. (6-3) debe modificarse a

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0+)$$

$$\mathcal{L}_-\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0-)$$

Para probar el teorema de la diferenciación, Ec. (6-3), procedemos como sigue. La integración por partes de la integral de Laplace da

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

Por lo tanto,

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right]$$

Se sigue que

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0)$$

En forma similar, obtenemos la siguiente relación para la segunda derivada de  $f(t)$ :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

donde  $\dot{f}(0)$  es el valor de  $df(t)/dt$  evaluada en  $t = 0$ . Para obtener esta ecuación, definase

$$\frac{d}{dt} f(t) = g(t)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] &= \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} g(t) \right] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \\ &= s\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] - \dot{f}(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \end{aligned}$$

En forma similar, para la  $n$ -ésima derivada de  $f(t)$ , obtenemos

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - \overset{(n-1)}{f}(0)$$

donde  $f(0)$ ,  $\dot{f}(0)$ ,  $\dots$ ,  $\overset{(n-1)}{f}(0)$  representan los valores de  $f(t)$ ,  $df(t)/dt$ ,  $\dots$ ,  $d^{(n-1)}f(t)/dt^{(n-1)}$ , respectivamente, evaluadas en  $t = 0$ . Si es necesaria la distinción entre  $\mathcal{L}_+$  y  $\mathcal{L}_-$ , sustituimos  $t = 0+$  o  $t = 0-$  en  $f(t)$ ,  $df(t)/dt$ ,  $\dots$ ,  $d^{(n-1)}f(t)/dt^{(n-1)}$ , dependiendo de que tomemos  $\mathcal{L}_+$  o  $\mathcal{L}_-$ .

Nótese que para que existan las transformadas de Laplace de las derivadas de  $f(t)$ ,  $d^n f(t)/dt^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) deben ser transformables por Laplace.

Nótese también que si todos los valores iniciales de  $f(t)$  y sus derivadas son iguales a cero, entonces la transformada de Laplace de la  $n$ -ésima derivada de  $f(t)$  está dada por  $s^n F(s)$ .



**Ejemplo 6-1.** Considérese la función coseno.

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= A \cos \omega t && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

La transformada de Laplace de esta función coseno puede obtenerse directamente como en el caso de la función seno (véase la Sec. 6-3). El uso del teorema de la diferenciación, sin embargo, se demostrará aquí derivando la transformada de Laplace de la función coseno de la transformada de Laplace de la función seno. Si definimos

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= \sin \omega t && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La transformada de Laplace de la función coseno se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[A \cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{\omega} \sin \omega t\right)\right] = \frac{A}{\omega}[sF(s) - f(0)] \\ &= \frac{A}{\omega}\left[\frac{s\omega}{s^2 + \omega^2} - 0\right] = \frac{As}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

**Teorema del valor final.** El teorema del valor final relaciona el comportamiento de  $f(t)$  con el comportamiento de  $sF(s)$  en la vecindad de  $s = 0$ . Este teorema, sin embargo, se aplica si y sólo si  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe, [lo cual significa que  $f(t)$  se aproxima a un valor definido cuando  $t \rightarrow \infty$ .] Si todos los polos de  $sF(s)$  caen en la mitad izquierda del plano  $s$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe. Aún, si  $sF(s)$  tiene polos en el eje imaginario o en la mitad derecha del plano  $s$ ,  $f(t)$  contendrá funciones del tiempo oscilatorias o con incremento exponencial, respectivamente, y el  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  no existirá. El teorema del valor final no se aplica en tales casos. Por ejemplo, si  $f(t)$  es la función senoidal  $\sin \omega t$ ,  $sF(s)$  tiene polos en  $s = \pm j\omega$  y el  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  no existe. Por lo tanto, este teorema no es aplicable a tal función.

El teorema del valor final debe establecerse como sigue. Si  $f(t)$  y  $df(t)/dt$  son transformables por Laplace, si  $F(s)$  es la transformada de Laplace de  $f(t)$ , y si el  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Para probar el teorema, hagamos que  $s$  tienda a cero en la ecuación de la transformada de Laplace de la derivada de  $f(t)$  o

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

Puesto que  $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] dt &= f(t) \Big|_0^{\infty} = f(\infty) - f(0) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

de la cual

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

**Ejemplo 6-2.** Dada

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

¿cuál es el  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ ?

Puesto que el polo de  $sF(s) = 1/(s+1)$  cae en la mitad izquierda del plano  $s$ , el  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe. Por lo tanto, el teorema del valor final es aplicable en este caso.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

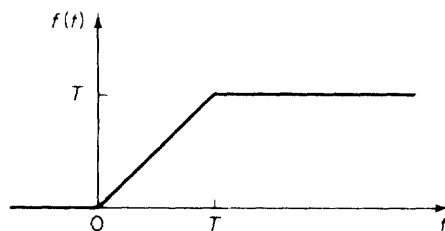
De hecho, este resultado puede verificarse fácilmente, puesto que

$$f(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{para } t \geq 0$$

**Comentarios.** El teorema del valor final no se aplica si  $sF(s)$  posee polos en el eje  $j\omega$  o en la mitad derecha del plano  $s$ . Debe notarse que  $sF(s)$  puede poseer formalmente un polo simple en el origen, entendiendo que no posee ningún otro polo en la mitad derecha del plano  $s$  incluyendo al eje  $j\omega$  y que el  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  exista.

Considérese la función

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & t < 0 \\ &= t & 0 \leq t \leq T \\ &= T & T < t \end{aligned}$$



**Fig. 6-7.** Función  $f(t)$  definida por  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ ,  $f(t) = t$  para  $0 \leq t \leq T$ , y  $f(t) = T$  para  $T < t$ .

Esta función está graficada en la Fig. 6-7. La función  $f(t)$  puede considerarse como

$$f(t) = t1(t) - (t - T)1(t - T)$$

La transformada de Laplace de  $f(t)$  es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \mathcal{L}[t1(t)] - \mathcal{L}[(t - T)1(t - T)] \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-Ts}}{s^2} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2}\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$sF(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Así,  $sF(s)$  posee formalmente un polo simple en el origen, pero no otros polos en la mitad derecha del plano  $s$ , incluyendo al eje  $j\omega$ . Puesto que

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-Ts})}{\frac{d}{ds}s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Te^{-Ts}}{1} = T\end{aligned}$$

vemos que el límite de  $sF(s)$  existe cuando  $s \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el teorema del valor final se aplica en este caso o

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = T$$

**Teorema del valor inicial.** El teorema del valor inicial expuesto a continuación es la contraparte del teorema del valor final. Mediante el uso de este teorema, somos capaces de encontrar el valor de  $f(t)$  en  $t = 0+$  directamente de la transformada de Laplace de  $f(t)$ . El teorema del valor inicial no da el valor de  $f(t)$  exactamente en  $t = 0$ , sino en un tiempo ligeramente mayor que cero.

El teorema del valor inicial puede establecerse como sigue. Si  $f(t)$  y  $df(t)/dt$  son ambas transformables por Laplace y si el  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  existe, entonces

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Para probar este teorema, usamos la ecuación de la transformada  $\mathcal{L}_+$  de  $df(t)/dt$ .

$$\mathcal{L}_+ \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0+)$$

En el intervalo de tiempo  $0+ \leq t \leq \infty$ , cuando  $s$  tiende a infinito,  $e^{-st}$  tien-

de a cero. (Nótese que debemos usar  $\mathcal{L}_+$  mejor que  $\mathcal{L}_-$  para esta condición.) En consecuencia,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0+)] = 0$$

o bien

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Al aplicar el teorema del valor inicial, no estamos limitados por la localización de los polos de  $sF(s)$ . Así que el teorema del valor inicial es válido para la función senoidal.

Debe notarse que el teorema del valor inicial y el teorema del valor final proporcionan una verificación conveniente de la solución, puesto que nos capacitan para predecir el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo sin transformar realmente las funciones en  $s$  de regreso a funciones del tiempo.

**Teorema de la integración.** Si  $f(t)$  es de orden exponencial, entonces la transformada de  $\int f(t)dt$  existe y está dada por

$$\mathcal{L} \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} \quad (6-4)$$

donde  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  y  $f^{-1}(0) = \int f(t)dt$ , evaluada en  $t = 0$ .

Nótese que si  $f(t)$  involucra una función impulso en  $t = 0$ , entonces  $f^{-1}(0+) \neq f^{-1}(0-)$ . Por lo tanto, si  $f(t)$  involucra una función impulso en  $t = 0$ , debemos modificar la Ec. (6-4).

$$\mathcal{L}_+ \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0+)}{s}$$

$$\mathcal{L}_- \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0-)}{s}$$

El teorema de la integración dado por la Ec. (6-4) puede probarse en la siguiente forma. La integración por partes da

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \int f(t) dt \right] &= \int_0^{\infty} \left[ \int f(t) dt \right] e^{-st} dt \\ &= \left[ \int f(t) dt \right] \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{1}{s} \int f(t) dt \Big|_{t=0} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s} \end{aligned}$$

por lo tanto, el teorema queda probado.

Vemos que la integración en el dominio del tiempo se convierte en división en el dominio de  $s$ . Si el valor inicial de la integral es cero, la transformada de Laplace de la integral de  $f(t)$  está dada por  $F(s)/s$ .

El precedente teorema de la integración puede modificarse ligeramente para considerar a la integral definida de  $f(t)$ . Si  $f(t)$  es de orden exponencial, la transformada de Laplace de la integral definida  $\int_0^t f(t) dt$  puede darse mediante

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (6-5)$$

Nótese que si  $f(t)$  involucra una función impulso en  $t = 0$ , entonces  $\int_{0+}^t f(t) dt \neq \int_{0-}^t f(t) dt$ , y debe observarse la siguiente distinción

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ \left[ \int_{0+}^t f(t) dt \right] &= \frac{\mathcal{L}_+[f(t)]}{s} \\ \mathcal{L}_- \left[ \int_{0-}^t f(t) dt \right] &= \frac{\mathcal{L}_-[f(t)]}{s} \end{aligned}$$

Para probar la Ec. (6-5), nótese primero que

$$\int_0^t f(t) dt = \int f(t) dt - f^{-1}(0)$$

donde  $f^{-1}(0)$  es igual a  $\int f(t) dt$  evaluada en  $t = 0$  y es una constante. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] &= \mathcal{L}\left[\int f(t) dt - f^{-1}(0)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] - \mathcal{L}[f^{-1}(0)] \end{aligned}$$

En relación con la Ec. (6-4) y observando que  $f^{-1}(0)$  es una constante tal que

$$\mathcal{L}[f^{-1}(0)] = \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

## 6-5 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

La transformada inversa de Laplace es un proceso que consiste en encontrar la función del tiempo  $f(t)$  a partir de la correspondiente transformada de Laplace  $F(s)$ . Se dispone de varios métodos para encontrar la transformada inversa de Laplace, el más simple de ellos consiste en (a) usar las tablas de transformadas de Laplace para encontrar la función del tiempo

$f(t)$  que le toca a una transformada de Laplace dada  $F(s)$  y (b) usar el método de expansión en fracciones parciales. En esta sección presentaremos el último. (No expondremos métodos adicionales, tales como el uso de la integral de inversión. Para ver este método, consúltese por ejemplo, la obra marcada con 6-4 en la bibliografía.)

**Método de expansión en fracciones parciales para encontrar transformadas inversas de Laplace.** Si  $F(s)$ , la transformada de  $f(t)$ , se separa en componentes

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

y si las transformadas inversas de Laplace de  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $\dots$ ,  $F_n(s)$  están fácilmente disponibles, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)] \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)\end{aligned}$$

donde  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $f_n(t)$  son las transformadas inversas de Laplace de  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $\dots$ ,  $F_n(s)$ , respectivamente. La transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  así obtenida es única, excepto posiblemente en los puntos donde la función del tiempo es discontinua. Donde quiera que la función del tiempo sea continua, la función del tiempo  $f(t)$  y su transformada de Laplace  $F(s)$  tendrán una correspondencia uno a uno.

En los problemas de análisis de sistemas,  $F(s)$  ocurre frecuentemente en la forma

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son polinomios en  $s$  y el grado de  $A(s)$  no es mayor que el de  $B(s)$ .

La ventaja del enfoque de la expansión en fracciones parciales es que los términos individuales de  $F(s)$ , resultantes de la expansión en fracciones parciales, son funciones muy simples de  $s$ ; en consecuencia, no es necesario consultar la tabla de transformadas de Laplace si memorizamos varios pares de transformadas de Laplace simples. Debe notarse, sin embargo, que al aplicar la técnica de expansión en fracciones parciales en la búsqueda de la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = A(s)/B(s)$ , las raíces del polinomio  $B(s)$  del denominador deben conocerse por anticipado. Es decir, este método no se aplica hasta que el polinomio del denominador haya sido factorizado.

Considérese  $F(s)$  escrita en la forma factorizada

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

donde  $1, p_2, \dots, p_n$  y  $z_1, z_2, \dots, z_m$  sean cantidades reales o complejas, pero por cada complejo  $p_i$  o  $z_i$  estará presente el complejo conjugado de  $p_i$  o  $z_i$ ,

respectivamente. Aquí la potencia más alta de  $s$  en  $B(s)$  se supone mayor que la de  $A(s)$ .

En la expansión de  $A(s)/B(s)$  en la forma de fracciones parciales, es importante que la potencia más alta de  $s$  en  $B(s)$  sea mayor que la más alta potencia de  $s$  en  $A(s)$ . Si no es ese el caso, el numerador  $A(s)$  debe dividirse entre el denominador  $B(s)$  con el objeto de producir un polinomio en  $s$  más un residuo (una razón de polinomios en  $s$  cuyo numerador sea de menor grado que el denominador.) (Para ver detalles, consulte el ejemplo 6-4.)

**Expansión en fracciones parciales cuando  $F(s)$  involucra solamente polos diferentes.** En este caso,  $F(s)$  puede expandirse siempre en una suma de fracciones parciales simples.

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

donde  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) son constantes. El coeficiente  $a_k$  se llama *residuo* del polo en  $s = -p_k$ . El valor de  $a_k$  puede encontrarse multiplicando ambos lados de esta última ecuación por  $(s + p_k)$  y haciendo  $s = -p_k$ , lo cual da

$$\begin{aligned} \left[ (s + p_k) \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=-p_k} &= \left[ \frac{a_1}{s + p_1} (s + p_k) + \frac{a_2}{s + p_2} (s + p_k) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_k}{s + p_k} (s + p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} (s + p_k) \right]_{s=-p_k} \\ &= a_k \end{aligned}$$

Vemos que todos los términos de la expansión desaparecen con la excepción de  $a_k$ . Así, el residuo  $a_k$  se encuentra a partir de

$$a_k = \left[ (s + p_k) \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=-p_k} \quad (6-6)$$

Nótese que, puesto que  $f(t)$  es una función real del tiempo, si  $p_1$  y  $p_2$  son complejos conjugados,  $a_1$  o  $a_2$  necesitan ser evaluadas porque la otra se conoce automáticamente.

Puesto que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_k}{s + p_k} \right] = a_k e^{-p_k t}$$

$f(t)$  se obtiene como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t} \quad (t \geq 0)$$

**Ejemplo 6-3.** Obténgase la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

La expansión en fracciones parciales de  $F(s)$  es

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  se encuentran utilizando la Ec. (6-6).

$$a_1 = \left[ (s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \left[ \frac{s+3}{s+2} \right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[ (s+2) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = \left[ \frac{s+3}{s+1} \right]_{s=-2} = -1$$

Así,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-1}{s+2} \right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

**Ejemplo 6-4.** Obténgase la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

Aquí, puesto que el grado del polinomio del numerador es más alto que el del polinomio del denominador, debemos dividir el numerador entre denominador.

$$G(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Nótese que la transformada de Laplace de la función impulso unitario  $\delta(t)$  es 1 y que la transformada de Laplace de  $d\delta(t)/dt$  es  $s$ . El tercer término del lado derecho de esta última ecuación es  $F(s)$  en el ejemplo 6-3. Por lo tanto, la transformada inversa de Laplace de  $G(s)$  está dada como

$$g(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0-)$$

**Ejemplo 6-5.** Encuéntrese la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

Obsérvese que el polinomio del denominador puede factorizarse como

$$s^2 + 2s + 5 = (s+1+j2)(s+1-j2)$$

Si la función  $F(s)$  involucra un par de polos conjugados, es conveniente no expandir  $F(s)$  en las fracciones parciales usuales sino expandirla en la suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

Observado que  $s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + \omega^2$  y en relación con las transformadas de Laplace  $e^{-\alpha t}$  sen  $\omega t$  y  $e^{-\alpha t}$  cos  $\omega t$ , reescribiéndola así,

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \text{ sen } \omega t] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \text{ cos } \omega t] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$



la  $F(s)$  dada puede escribirse como la suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10 + 2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} \\ &= 5 \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} + 2 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] \\ &= 5e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

**Expansión en fracciones parciales cuando  $F(s)$  involucra polos múltiples.** En lugar de exponer el caso general, usaremos un ejemplo para mostrar cómo obtener la expansión en fracciones parciales de  $F(s)$ . (Véase también el problema A-6-14.)

Considérese la siguiente  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

La expansión en fracciones parciales de esta  $F(s)$  incluye a tres términos

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{b_3}{(s + 1)^3} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_1}{s + 1}$$

donde  $b_3$ ,  $b_2$  y  $b_1$  se determinan como sigue. Al multiplicar ambos lados de esta última ecuación por  $(s + 1)^3$ , tenemos

$$(s + 1)^3 \frac{A(s)}{B(s)} = b_3 + b_2(s + 1) + b_1(s + 1)^2 \quad (6-7)$$

Después, haciendo  $s = -1$ , la Ec. (6-7) da

$$\left[ (s + 1)^3 \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=-1} = b_3$$

También, diferenciando ambos lados de la Ec. (6-7) con respecto a  $s$  da

$$\frac{d}{ds} \left[ (s + 1)^3 \frac{A(s)}{B(s)} \right] = b_2 + 2b_1(s + 1) \quad (6-8)$$

si hacemos  $s = -1$  en la Ec. (6-8), entonces

$$\frac{d}{ds} \left[ (s + 1)^3 \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=-1} = b_2$$

Al diferenciar ambos lados de la Ec. (6-8) con respecto a  $s$ , el resultado es

$$\frac{d^2}{ds^2} \left[ (s + 1)^3 \frac{A(s)}{B(s)} \right] = 2b_1$$

Del análisis precedente puede verse que los valores de  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  se encuentran sistemáticamente como sigue:

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \left[ (s+1)^3 \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=-1} \\
 &= (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} \\
 &= 2 \\
 b_2 &= \left\{ \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^3 \frac{A(s)}{B(s)} \right] \right\}_{s=-1} \\
 &= \left[ \frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} \\
 &= (2s + 2)_{s=-1} \\
 &= 0 \\
 b_1 &= \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s+1)^3 \frac{A(s)}{B(s)} \right] \right\}_{s=-1} \\
 &= \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{ds^2} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} \\
 &= \frac{1}{2} (2) = 1
 \end{aligned}$$

Obtenemos así

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s+1)^3} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{0}{(s+1)^2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} \right] \\
 &= t^2 e^{-t} + 0 + e^{-t} \\
 &= (t^2 + 1)e^{-t} \quad (t \geq 0)
 \end{aligned}$$

## 6-6 SOLUCIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

En esta sección estamos interesados en el uso del método de transformadas de Laplace en la solución de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo.

El método de la transformada de Laplace lleva a la solución completa (solución homogénea y solución particular) de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo. Los métodos clásicos para encontrar la solución completa de una ecuación diferencial requieren la evaluación de las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales. En el caso del método de la transformada de Laplace, sin embargo, este requisito es innecesario porque las condiciones iniciales se incluyen automáticamente en la transformada de Laplace de la ecuación diferencial.

Si todas las condiciones iniciales son cero, entonces la transformada de Laplace de la ecuación diferencial se obtiene simplemente reemplazando  $d/dt$  con  $s$ ,  $d^2/dt^2$  con  $s^2$  y así sucesivamente.

Sólo se necesitan dos pasos en la solución de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo mediante el método de la transformada de Laplace.

1. Al tomar la transformada de Laplace de cada término en la ecuación diferencial dada, se convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en  $s$  y se obtiene la expresión para la transformada de Laplace de la variable dependiente reorganizando la ecuación algebraica.
2. La solución en el tiempo de la ecuación diferencial se obtiene encontrando la transformada inversa de Laplace de la variable dependiente.

En la exposición siguiente, se usan unos cuantos ejemplos para demostrar la solución de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo mediante el método de la transformada de Laplace.

**Ejemplo 6-6.** Encuéntrese la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes.

Al escribir la transformada de Laplace de  $x(t)$  como  $X(s)$  o

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$$

obtenemos

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0)$$

Y, por lo tanto, la ecuación diferencial dada se hace

$$[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = 0$$

Sustituyendo las condiciones iniciales dadas en esta última ecuación,

$$[s^2 X(s) - as - b] + 3[sX(s) - a] + 2X(s) = 0$$

o bien

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = as + b + 3a$$

Resolviendo para  $X(s)$ , tenemos

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a+b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}$$

La transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  da

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a+b}{s+2}\right] \\ &= (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

la cual es la solución de la ecuación diferencial dada. Adviértase que las condiciones iniciales  $a$  y  $b$  aparecen en la solución. Así que  $x(t)$  no tiene constantes indeterminadas.

**Ejemplo 6-7.** Encuéntrese la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Observando que  $\mathcal{L}\{3\} = 3/s$ ,  $x(0) = 0$ , y  $\dot{x}(0) = 0$ , la transformada de Laplace de la ecuación diferencial se hace

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + 5X(s) = \frac{3}{s}$$

Resolviendo para  $X(s)$ , encontramos

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3}{s} \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \\ &= \frac{3}{s} \frac{1}{s} - \frac{3}{10} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformada inversa de Laplace se hace

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \frac{3}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{3}{10} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right] - \frac{3}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] \\ &= \frac{3}{5} - \frac{3}{10} e^{-t} \operatorname{sen} 2t - \frac{3}{5} e^{-t} \cos 2t \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

la cual es la solución de la ecuación diferencial dada.

## BIBLIOGRAFÍA

- 6-1 BOHN, E. V., *The Transform Analysis of Linear Systems*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963.
- 6-2 CHURCHILL, R. V., *Operational Mathematics*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- 6-3 GOLDMAN, S., *Transformation Calculus and Electrical Transients*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1949.
- 6-4 KAPLAN, W., *Operational Methods for Linear Systems*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.
- 6-5 LEPAGE, W. R., *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.
- 6-6 OGATA, K., *Modern Control Engineering*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.

**EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES****PROBLEMA A-6-1.** Obténganse las partes real e imaginaria de

$$\frac{2 + j1}{3 + j4}$$

También, obténganse la magnitud y el ángulo de esta cantidad compleja.

**Solución.**

$$\begin{aligned}\frac{2 + j1}{3 + j4} &= \frac{(2 + j1)(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = \frac{6 + j3 - j8 + 4}{9 + 16} = \frac{10 - j5}{25} \\ &= \frac{2}{5} - j\frac{1}{5}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Parte real} = \frac{2}{5}, \quad \text{Parte imaginaria} = -\frac{1}{5}$$

La magnitud y el ángulo de esta cantidad compleja se obtienen como sigue:

$$\text{Magnitud} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447$$

$$\text{Ángulo} = \tan^{-1} \left( \frac{-1/5}{2/5} \right) = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) = -26.6^\circ$$

**PROBLEMA A-6-2.** Encuéntrese la transformada de Laplace de la  $f(t)$  definida por

$$\begin{aligned}f(t) &= 0 & (t < 0) \\ &= te^{-3t} & (t \geq 0)\end{aligned}$$

**Solución.** Puesto que

$$\mathcal{L}[t] = G(s) = \frac{1}{s^2}$$

en relación con la Ec. (6-2), obtenemos

$$F(s) = \mathcal{L}[te^{-3t}] = G(s + 3) = \frac{1}{(s + 3)^2}$$

**PROBLEMA A-6-3.** ¿Cuál es la transformada de Laplace de

$$\begin{aligned}f(t) &= 0 & (t < 0) \\ &= \sin(\omega t + \theta) & (t \geq 0)\end{aligned}$$

donde  $\theta$  es una constante?**Solución.** Observando que

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta$$

tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(\omega t + \theta)] &= \cos \theta \mathcal{L}[\sin \omega t] + \sin \theta \mathcal{L}[\cos \omega t] \\ &= \cos \theta \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin \theta \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

**PROBLEMA A-6-4.** Además de la transformada de Laplace  $F(s)$  de la función  $f(t)$  mostrada en la Fig. 6-8, encuentrese el valor límite de  $F(s)$  cuando  $a$  tiende a cero.

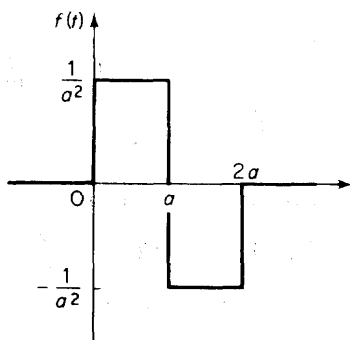


Fig. 6-8. Función  $f(t)$ .

**Solución.** La función  $f(t)$  puede escribirse

$$f(t) = \frac{1}{a^2} 1(t) - \frac{2}{a^2} 1(t - a) + \frac{1}{a^2} 1(t - 2a)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] \\ &= \frac{1}{a^2} \mathcal{L}[1(t)] - \frac{2}{a^2} \mathcal{L}[1(t - a)] + \frac{1}{a^2} \mathcal{L}[1(t - 2a)] \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{s} - \frac{2}{a^2} \frac{1}{s} e^{-as} + \frac{1}{a^2} \frac{1}{s} e^{-2as} \\ &= \frac{1}{a^2 s} (1 - 2e^{-as} + e^{-2as}) \end{aligned}$$

Cuando  $a$  tiende a cero, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} F(s) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{a^2 s} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{da}(1 - 2e^{-as} + e^{-2as})}{\frac{d}{da}(a^2 s)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2se^{-as} - 2se^{-2as}}{2as} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-as} - e^{-2as}}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{da}(e^{-as} - e^{-2as})}{\frac{d}{da}(a)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-se^{-as} + 2se^{-2as}}{1} \\ &= -s + 2s = s \end{aligned}$$

**PROBLEMA A-6-5.** Pruébese que si la transformada de Laplace de  $f(t)$  es  $F(s)$ , entonces, excepto en los polos de  $F(s)$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

En general,

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**Solución.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tf(t)] &= \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt = - \int_0^\infty f(t) \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = - \frac{d}{ds} F(s) \end{aligned}$$

En forma similar, al dividir  $tf(t) = g(t)$ , el resultado es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^2 f(t)] &= \mathcal{L}[tg(t)] = - \frac{d}{ds} G(s) = - \frac{d}{ds} \left[ - \frac{d}{ds} F(s) \right] \\ &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s) = \frac{d^2}{ds^2} F(s) \end{aligned}$$

Repitiendo el mismo proceso, obtenemos

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**PROBLEMA A-6-6.** Encuéntrese la transformada de Laplace de  $f(t)$  definida por

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & (t < 0) \\ &= t^2 \sin \omega t & (t \geq 0) \end{aligned}$$

**Solución.** Puesto que

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

en relación con el problema A-6-5, tenemos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 \sin \omega t] = \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{-2\omega^3 + 6\omega s^2}{(s^2 + \omega^2)^3}$$

**PROBLEMA A-6-7.** Pruébese que si la transformada de  $f(t)$  es  $F(s)$ , entonces

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as) \quad (a > 0)$$

**Solución.** Si definimos  $t\alpha = \tau$  y  $as = s_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] &= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(\tau)e^{-as\tau} a d\tau \\ &= a \int_0^\infty f(\tau)e^{-s_1\tau} d\tau = aF(s_1) = aF(as) \end{aligned}$$

**PROBLEMA A-6-8.** Pruébese que si  $f(t)$  es de orden exponencial y si  $\int_0^\infty f(t)dt$  existe lo cual significa que  $\int_0^\infty f(t)dt$  adopta un valor definido, entonces

$$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

donde  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

**Solución.** Nótese que

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(t) dt$$

En relación con la Ec. (6-5),

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Puesto que  $\int_0^{\infty} f(t) dt$  existe, mediante la aplicación del teorema del valor final a este caso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F(s)}{s}$$

o bien

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

**PROBLEMA A-6-9.** La convolución de dos funciones del tiempo se define por

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Una notación comúnmente utilizada para la convolución es  $f_1(t) * f_2(t)$ , la cual significa que

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

Si  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son ambas transformables por Laplace, entonces muéstrase que

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

donde  $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$  y  $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$ .

**Solución.** Observando que  $1(t - \tau) = 0$  para  $t < \tau$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) 1(t - \tau) d\tau\right] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) 1(t - \tau) d\tau\right] dt \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} f_2(t - \tau) 1(t - \tau) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-st} dt \end{aligned}$$

Cambiar el orden de integración es válido aquí, puesto que  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son ambas transformables por Laplace, lo que da integrales convergentes. Si sustituimos  $\lambda = t - \tau$  en esta última ecuación, el resultado es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right] &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^{\infty} f_2(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \\ &= F_1(s) F_2(s) \end{aligned}$$

o bien

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s)$$



Así que la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones del tiempo es el producto de sus transformadas de Laplace.

**PROBLEMA A-6-10.** Determinése la transformada de Laplace de  $f_1(t)*f_2(t)$ , donde

$$f_1(t) = f_2(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$f_1(t) = t \quad \text{para } t \geq 0$$

$$f_2(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{para } t \geq 0$$

**Solución.** Nótese que

$$\mathcal{L}[t] = F_1(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[1 - e^{-t}] = F_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

La transformada de Laplace de la integral de convolución está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)] &= F_1(s)F_2(s) = \frac{1}{s^2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] \\ &= \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Para verificar que está clara la transformada de Laplace de la integral de convolución, realicemos primero la integración de la integral de convolución y tomemos después su transformada de Laplace.

$$\begin{aligned} f_1(t)*f_2(t) &= \int_0^t \tau [1 - e^{-(t-\tau)}] d\tau = \int_0^t (t-\tau)(1 - e^{-\tau}) d\tau \\ &= \frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

Y así,

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t}\right] = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

**PROBLEMA A-6-11.** Pruébese que si  $f(t)$  es una función periódica con periodo  $T$ , entonces

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-Ts}}$$

**Solución.**

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st} dt$$

Al cambiar la variable independiente de  $t$  a  $\tau$ , donde  $\tau = t - nT$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{n=0}^\infty e^{-nTs} \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

Observando que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty e^{-nTs} &= 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots \\ &= 1 + e^{-Ts}(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots) \\ &= 1 + e^{-Ts} \left( \sum_{n=0}^\infty e^{-nTs} \right) \end{aligned}$$

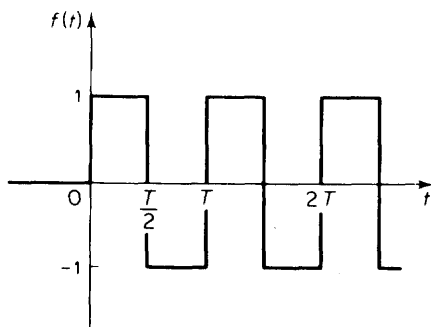
obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

Se sigue que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-Ts}}$$

**PROBLEMA A-6-12.** ¿Cuál es la transformada de Laplace de la función periódica mostrada en la Fig. 6-9?



**Fig. 6-9.** Función periódica (onda cuadrada).

**Solución.** Nótese que

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)e^{-st} dt &= \int_0^{T/2} e^{-st} dt + \int_{T/2}^T (-1)e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{T/2} - \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{T/2}^T \\ &= \frac{e^{-(1/2)Ts} - 1}{-s} + \frac{e^{-Ts} - e^{-(1/2)Ts}}{s} \\ &= \frac{1}{s} [e^{-Ts} - 2e^{-(1/2)Ts} + 1] \\ &= \frac{1}{s} [1 - e^{-(1/2)Ts}]^2 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-Ts}} = \frac{(1/s)[1 - e^{-(1/2)Ts}]^2}{1 - e^{-Ts}} \\ &= \frac{1 - e^{-(1/2)Ts}}{s[1 + e^{-(1/2)Ts}]} = \frac{1}{s} \tanh \frac{Ts}{4} \end{aligned}$$

**PROBLEMA A-6-13.** Encuéntrese la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$ , donde

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

**Solución.** Puesto que

$$s^2 + 2s + 2 = (s + 1 + j1)(s + 1 - j1)$$

observamos que  $F(s)$  contiene un par de polos complejos conjugados, y por consiguiente expandimos  $F(s)$  en la forma

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2 + 2s + 2}$$

donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  se determinan a partir de

$$1 = a_1(s^2 + 2s + 2) + (a_2 s + a_3)s$$

Al comparar los coeficientes de  $s^2$ ,  $s$  y  $s^0$  en los términos de ambos lados de esta última ecuación, respectivamente, obtenemos

$$a_1 + a_2 = 0, \quad 2a_1 + a_3 = 0, \quad 2a_1 = 1$$

de la cual

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -1$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s+2}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  da

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} \cos t \quad (t \geq 0)$$

**PROBLEMA A-6-14.** Obténgase la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}$$

**Solución.**

$$F(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} = \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_1}{s} + \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+3}$$

donde

$$a_1 = \left. \frac{5(s+2)}{s^2(s+3)} \right|_{s=-1} = \frac{5}{2}$$

$$a_2 = \left. \frac{5(s+2)}{s^2(s+1)} \right|_{s=-3} = \frac{5}{18}$$

$$b_2 = \left. \frac{5(s+2)}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=0} = \frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \left. \frac{d}{ds} \left[ \frac{5(s+2)}{(s+1)(s+3)} \right] \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{5(s+1)(s+3) - 5(s+2)(2s+4)}{(s+1)^2(s+3)^2} \right|_{s=0} = -\frac{25}{9} \end{aligned}$$

Así,

$$F(s) = \frac{10}{3} \frac{1}{s^2} - \frac{25}{9} \frac{1}{s} + \frac{5}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{5}{18} \frac{1}{s+3}$$

La transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  es

$$f(t) = \frac{10}{3} t - \frac{25}{9} + \frac{5}{2} e^{-t} + \frac{5}{18} e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

**PROBLEMA A-6-15.** Encuéntrese la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}{s(s+1)}$$

**Solución.** Puesto que el polinomio del numerador es de más alto grado que el polinomio del denominador, al dividir el numerador entre el denominador hasta que el residuo sea una fracción, tenemos

$$F(s) = s^2 + s + 2 + \frac{2s+5}{s(s+1)} = s^2 + s + 2 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1}$$

donde

$$a_1 = \left. \frac{2s+5}{s+1} \right|_{s=0} = 5$$

$$a_2 = \left. \frac{2s+5}{s} \right|_{s=-1} = -3$$

Se sigue que

$$F(s) = s^2 + s + 2 + \frac{5}{s} - \frac{3}{s+1}$$

La transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{d^2}{dt^2} \delta(t) + \frac{d}{dt} \delta(t) + 2 \delta(t) + 5 - 3e^{-t} \quad (t \geq 0-)$$

**PROBLEMA A-6-16.** Obtégase la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$$

**Solución.**

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{s} - \frac{1}{\omega^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformada inversa de Laplace se obtiene como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad (t \geq 0)$$

**PROBLEMA A-6-17.** Encuéntrese el valor inicial de  $df(t)/dt$  cuando la transformada de Laplace de  $f(t)$  está dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

**Solución.** Usando el teorema del valor inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(2s+1)}{s^2+s+1} = 2$$

Puesto que la transformada  $\mathcal{L}_+$  de  $df(t)/dt = g(t)$  está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_+[g(t)] &= sF(s) - f(0+) \\ &= \frac{s(2s+1)}{s^2+s+1} - 2 = \frac{-s-2}{s^2+s+1}\end{aligned}$$

el valor inicial de  $df(t)/dt$  se obtiene como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{df(t)}{dt} &= g(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sF(s) - f(0+)] \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-s^2 - 2s}{s^2 + s + 1} = -1\end{aligned}$$

**PROBLEMA A-6-18.** Resuélvase la ecuación diferencial

$$\dot{x} + 2x = \delta(t), \quad x(0-) = 0$$

**Solución.** Por la transformada de Laplace de esta ecuación diferencial,

$$[sX(s) - x(0-)] + 2X(s) = 1$$

o bien

$$(s+2)X(s) = 1$$

Entonces, resolviendo para  $X(s)$  resulta que

$$X(s) = \frac{1}{s+2}$$

La transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  da

$$\begin{aligned}x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t} \quad (t > 0) \\ &= 0 \quad (t < 0)\end{aligned}$$

Así,  $x(t)$  puede escribirse como

$$x(t) = e^{-2t}1(t)$$

Para verificar este resultado, adviértase que

$$\dot{x}(t) = -2e^{-2t}1(t) + e^{-2t}\delta(t)$$

Puesto que  $\delta(t) = 0$  para  $t \neq 0$ , tenemos

$$e^{-2t}\delta(t) = \delta(t)$$

Por lo tanto,

$$\dot{x} + 2x = -2e^{-2t}1(t) + \delta(t) + 2e^{-2t}1(t) = \delta(t)$$

y

$$x(0-) = 0$$

**PROBLEMA A-6-19.** ¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación diferencial?

$$2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 0$$

**Solución.** Tomando la transformada de Laplace de esta ecuación diferencial, tenemos

$$2[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 7[sX(s) - x(0)] + 3X(s) = 0$$

Al sustituir las condiciones iniciales dadas en esta última ecuación,

$$2[s^2 X(s) - 3s] + 7[sX(s) - 3] + 3X(s) = 0$$

o bien

$$(2s^2 + 7s + 3)X(s) = 6s + 21$$

Resolviendo para  $X(s)$  se llega a

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{6s + 21}{2s^2 + 7s + 3} = \frac{6s + 21}{(2s + 1)(s + 3)} \\ &= \frac{7.2}{2s + 1} - \frac{0.6}{s + 3} = \frac{3.6}{s + 0.5} - \frac{0.6}{s + 3} \end{aligned}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace de  $X(s)$ , encontramos

$$x(t) = 3.6e^{-0.5t} - 0.6e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

**PROBLEMA A-6-20.** Obténgase la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} + ax = A \sin \omega t, \quad x(0) = b$$

**Solución.** Transformando por Laplace ambos lados de esta ecuación diferencial, obtenemos

$$[sX(s) - x(0)] + aX(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

o bien

$$(s + a)X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} + b$$

Al resolver para  $X(s)$ , el resultado es

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A\omega}{(s + a)(s^2 + \omega^2)} + \frac{b}{s + a} \\ &= \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \left( \frac{1}{s + a} - \frac{s - a}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{b}{s + a} \\ &= \left( b + \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \right) \frac{1}{s + a} + \frac{Aa}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Y, por lo tanto, la transformada de Laplace de  $X(s)$  da

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \left( b + \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \right) e^{-at} + \frac{Aa}{a^2 + \omega^2} \sin \omega t - \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \cos \omega t \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

## PROBLEMAS

**PROBLEMA B-6-1.** Derive la transformada de Laplace de la función

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & (t < 0) \\ &= te^{-2t} & (t \geq 0) \end{aligned}$$

**PROBLEMA B-6-2.** Encuentre las transformadas de Laplace de las funciones mostradas.

1.  $f_1(t) = 0 \quad (t < 0)$   
 $\quad \quad \quad = 3 \operatorname{sen}(5t + 45^\circ) \quad (t \geq 0)$
2.  $f_2(t) = 0 \quad (t < 0)$   
 $\quad \quad \quad = 0.03(1 - \cos 2t) \quad (t \geq 0)$

**PROBLEMA B-6-3.** Obtenga la transformada de Laplace de la función definida por

$$f(t) = 0 \quad (t < 0)$$

$$= t^2 e^{-at} \quad (t \geq 0)$$

**PROBLEMA B-6-4.** Obtenga la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = 0 \quad (t < 0)$$

$$= \cos 2\omega t \cdot \cos 3\omega t \quad (t \geq 0)$$

**PROBLEMA B-6-5.** ¿Cuál es la transformada de Laplace de la función  $f(t)$  mostrada en la Fig. 6-10?

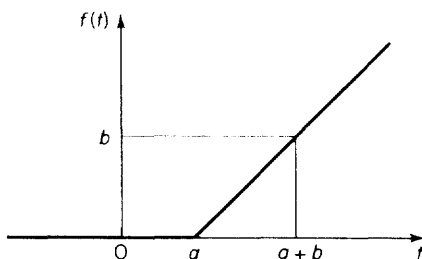


Fig. 6-10. Función  $f(t)$ .

**PROBLEMA B-6-6.** ¿Cuál es la transformada de Laplace de la función  $f(t)$  mostrada en la Fig. 6-11? También, ¿cuál es el valor límite de  $\mathcal{L}[f(t)]$  cuando  $a$  tiende a cero?

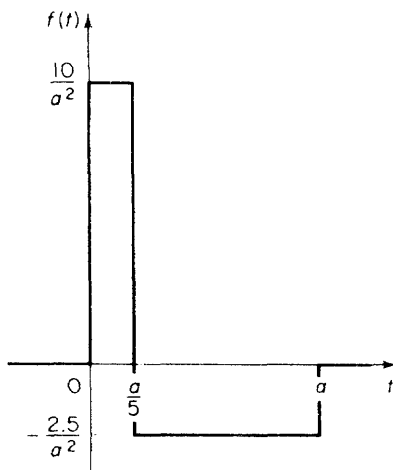
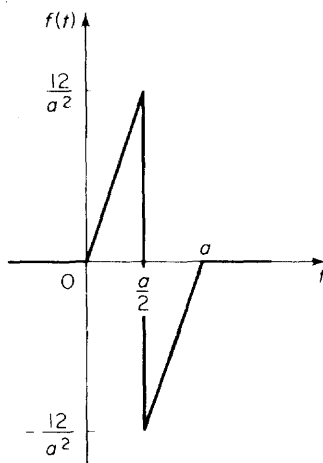


Fig. 6-11. Función  $f(t)$ .

**PROBLEMA B-6-7.** Encuentre la transformada de Laplace de la función  $f(t)$  mostrada en la Fig. 6-12; también encuentre el valor límite de  $\mathcal{L}[f(t)]$  cuando  $a$  tiende a cero.



**Fig. 6-12.** Función  $f(t)$ .

**PROBLEMA B-6-8.** Dada

$$F(s) = \frac{5(s+2)}{s(s+1)}$$

obtenga  $f(\infty)$ . Use el teorema del valor final.

**PROBLEMA B-6-9.** Dada

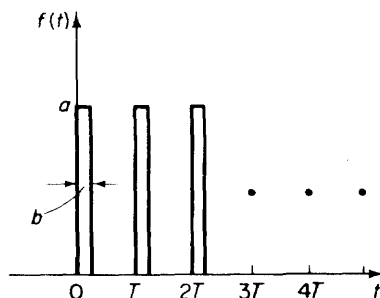
$$F(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

obtenga  $f(0+)$ . Use el teorema del valor inicial.

**PROBLEMA B-6-10.** Muestre que si  $f(t)/t$  es transformable por Laplace, entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds$$

**PROBLEMA B-6-11.** Obtenga la transformada de Laplace de la función periódica mostrada en la Fig. 6-13. (En la figura, los puntos implican la repetición del pulso.)



**Fig. 6-13.** Función periódica.



**PROBLEMA B-6-12.** Obtenga la transformada de Laplace de la función periódica mostrada en la Fig. 6-14. (En la figura, los puntos implican la repetición del impulso.)

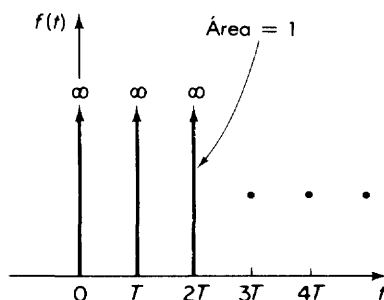


Fig. 6-14. Función periódica.

**PROBLEMA B-6-13.** ¿Cuáles son las transformadas inversas de Laplace de las funciones mostradas?

1. 
$$F_1(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$$

2. 
$$F_2(s) = \frac{3(s+4)}{s(s+1)(s+2)}$$

**PROBLEMA B-6-14.** Encuentre las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones.

1. 
$$F_1(s) = \frac{6s+3}{s^2}$$

2. 
$$F_2(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$$

**PROBLEMA B-6-15.** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s^2 + 4s + 5}{s(s+1)}$$

**PROBLEMA B-6-16.** Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$$

**PROBLEMA B-6-17.** Encuentre la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 4x = 0, \quad x(0) = 5, \quad \dot{x}(0) = 0$$

**PROBLEMA B-6-18.** Obtenga la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

**PROBLEMA B-6-19.** Determine la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial

$$2\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 1, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2$$

**PROBLEMA B-6-20.** Obtenga la solución  $x(t)$  de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + x = \sin 3t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

# 7

## ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES

### 7-1 INTRODUCCIÓN

En la práctica, la señal de entrada a un sistema dinámico no se conoce por anticipado, sino que probablemente es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse analíticamente. Sólo en casos especiales es verdad lo contrario.

Desde el punto de vista de diseño, es conveniente tener una base para comparar el funcionamiento de los diferentes sistemas. Esta base puede establecerse especificando señales de prueba particulares y después comparando las respuestas del sistema con estas señales de entrada.

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta de los sistemas a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba alguna). El uso de las señales de prueba puede justificarse por la correlación entre la forma en que un sistema particular responde a una señal de entrada de prueba típica y la aptitud de ese sistema para enfrentar sus señales de entrada reales.

**Señales de prueba típicas.** En el presente, las señales de entrada de prueba de uso común tienen las formas siguientes: función escalón, función rampa, función impulso y función senoidal. A través de estas señales de prueba, las cuales son funciones del tiempo muy simples, puede hacerse fácilmente el análisis matemático y experimental de los sistemas.

La señal de entrada que se seleccione para analizar las características dinámicas de un sistema puede determinarse por la forma de entrada que el sistema enfrente con la mayor frecuencia durante su operación normal. Si se le somete a perturbaciones súbitas, una función escalón del tiempo puede ser una buena señal de prueba; para un sistema sujeto a entradas de choque, puede ser mejor una función impulso. Una vez diseñado un sistema sobre la base de las señales de prueba, su funcionamiento de respuesta a las entradas reales es generalmente satisfactorio. Además, el uso de tales señales de prueba nos capacita para comparar el funcionamiento de todos los sistemas sobre la misma base.

**Respuestas libre y forzada.** Considérese un sistema definido por una ecuación diferencial, por ejemplo,

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = p(t) \quad (7-1)$$

donde los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son constantes,  $x(t)$  es la variable dependiente,  $t$  es la variable independiente y  $p(t)$  es la función de entrada.

La ecuación diferencial (7-1) tiene una solución completa  $x(t)$  compuesta por dos partes: la solución homogénea  $x_c(t)$  y la solución particular  $x_p(t)$ . La solución homogénea  $x_c(t)$  se encuentra igualando el lado derecho de la Ec. (7-1) a cero y resolviendo la ecuación diferencial homogénea asociada. La solución particular  $x_p(t)$  depende de la forma funcional de la función de entrada  $p(t)$ .

Si la solución homogénea  $x_c(t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t)$$

y si el  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t)$  es una función del tiempo acotada, se dice que el sistema se encuentra en *estado estable*.

Es una costumbre de los ingenieros llamar a la solución homogénea  $x_c(t)$  y a la solución particular  $x_p(t)$ , las *respuestas libre y forzada*, respectivamente. Aunque el comportamiento natural de un sistema no da por sí mismo una respuesta a alguna función externa o de entrada, un estudio de esta forma de comportamiento revelará características que serán útiles para hacer una buena predicción de la respuesta forzada.

**Respuesta transitoria y respuesta permanente.** Ambas respuestas, la libre y la forzada, de un sistema dinámico constan de dos partes: la respuesta transitoria y la permanente. La *respuesta transitoria* se da durante el proceso generado al ir del estado inicial al estado final. Por *respuesta permanente* entendemos la forma en la cual la salida del sistema se comporta cuando  $t$  tiende a infinito. La respuesta transitoria de un sistema dinámico a menudo manifiesta vibraciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable.

**Esquema del capítulo.** Este capítulo trata principalmente del análisis de la respuesta transitoria y permanente de los sistemas. Los métodos de la transformada de Laplace se usan como una poderosa herramienta en el análisis.

En la sección 7-2 tratamos del análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de primer orden sometidos a entradas de escalón y rampa. La sección 7-3 comienza con el análisis de la respuesta transitoria de sistemas de segundo orden sometidos solamente a condiciones iniciales, seguido por la respuesta transitoria de tales sistemas a las entradas escalón e impulso. La sección 7-4 define la función de transferencia y obtiene funciones de transferencia de unos cuantos sistemas físicos. La respuesta del sistema a entradas senoidales es el tema de la Sec. 7-5. Aquí se define la función de transferencia senoidal, así como su uso en la respuesta senoidal de estado permanente (respuesta en frecuencia), según se explica. La sección 7-6 trata de los problemas de aislamiento de vibración como una aplicación del análisis de la respuesta de estado permanente de los sistemas dinámicos a las entradas senoidales. Finalmente, se examinan las computadoras analógicas para la solución de ecuaciones diferenciales y la simulación de sistemas físicos, en la Sec. 7-7.

## 7-2 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA EN SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

De cuando en cuando en los capítulos 2 al 5 analizamos la respuesta transitoria de varios sistemas de primer orden. En esencia, esta sección es una revisión sistemática del análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de primer orden.

A continuación consideramos un sistema térmico (un sistema de termómetro de mercurio de pared delgada de vidrio) como ejemplo de un sistema de primer orden. Después de obtener un modelo matemático del sistema de termómetro, encontraremos la respuesta del sistema a las entradas escalón y rampa. Después indicaremos cómo los resultados matemáticos obtenidos pueden aplicarse a sistemas físicos o no físicos que tengan el mismo modelo matemático.

**Elaboración de un modelo matemático de un sistema térmico-sistema de termómetro.** Considérese el termómetro de mercurio de pared delgada de vidrio mostrado en la Fig. 7-1. Supóngase que el termómetro está a una temperatura uniforme  $\bar{\Theta}$  K (temperatura ambiente) y que en  $t = 0$  se le sumerge en un baño de temperatura  $\bar{\Theta} + \theta$ , K, donde  $\theta$ , es la temperatura del baño (la cual puede ser constante o cambiante) medida sobre la temperatura  $\bar{\Theta}$ . Denotemos la temperatura instantánea del termómetro por  $\bar{\Theta} + \theta$  K de modo que  $\theta$  sea el cambio en la temperatura del termómetro que satisfaga la condición  $\theta(0) = 0$ .

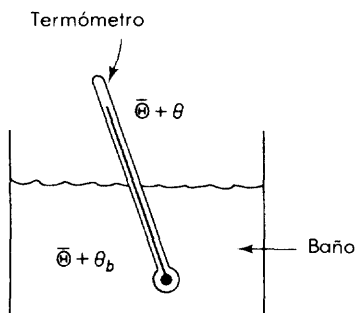


Fig. 7-1. Sistema de termómetro de mercurio de pared delgada de vidrio.

Los sistemas térmicos como el presente se pueden describir en términos de la resistencia y la capacitancia. Sin embargo, a diferencia de los sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos y neumáticos, estos sistemas no tienen inercia ni inercia. Caractericemos este sistema de termómetro en términos de la resistencia térmica  $R$  que se opone al flujo de calor y la capacitancia  $C$  que almacena calor.

La resistencia  $R$  a la transferencia de calor por conducción o convección es el cambio en la diferencia de temperatura (K) necesario para causar un cambio unitario en la razón de flujo de calor (J/s), esto es,

$$\text{Resistencia } R = \frac{\text{cambio en la diferencia de temperatura}}{\text{cambio en la razón de flujo de calor}} \quad \frac{\text{K}}{\text{J/s}}$$

La capacitancia térmica  $C$  se define como el cambio en la cantidad de calor (J) necesario para hacer un cambio unitario en la temperatura (K) o

$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{cambio en la cantidad de calor}}{\text{cambio en la temperatura}} \quad \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Nótese que la capacitancia térmica  $C$  es el producto del calor específico y la masa del material. El calor específico de un material es la relación entre la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de un kilogramo del material en un kelvin y la requerida para elevar la de un kilogramo de agua un grado kelvin.

Se puede obtener un modelo matemático de este sistema térmico considerando un balance término como sigue. El calor que entra al termómetro durante  $dt$  segundos es  $q dt$ , donde  $q$  es la razón de flujo de calor hacia el termómetro. Este calor se almacena en la capacitancia térmica  $C$  del termómetro, elevando de ese modo su temperatura en  $d\theta$ . Así que la ecuación de balance es

$$C d\theta = q dt \quad (7-2)$$

Puesto que la resistencia térmica  $R$  puede escribirse

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{\Delta\theta}{q}$$

la razón de flujo de calor  $q$  puede darse, en términos de la resistencia térmica  $R$ , como

$$q = \frac{(\bar{\Theta} + \theta_b) - (\bar{\Theta} + \theta)}{R} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$$

donde  $\bar{\Theta} + \theta_b$  es la temperatura del baño y  $\bar{\Theta} + \theta$  es la temperatura del termómetro. En consecuencia, podemos reescribir la Ec. (7-2) como

$$C \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$$

o bien

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b \quad (7-3)$$

Éste es un modelo matemático del sistema de termómetro. Este sistema es análogo al sistema eléctrico mostrado en la Fig. 7-2, cuyo modelo matemático es

$$RC \frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$

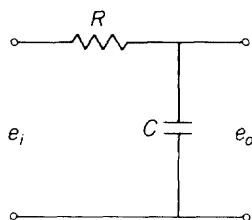


Fig. 7-2. Sistema eléctrico análogo al sistema mostrado en la Fig. 7-1.

Al comparar los modelos matemáticos de los sistemas térmico y eléctrico, la analogía es evidente. Por lo tanto, los dos son sistemas análogos. La tabla 7-1 da las cantidades análogas eléctrico-térmicas.

Tabla 7-1. ANALOGÍA ELÉCTRICO-TÉRMICA

Sistemas eléctricos		Sistemas térmicos	
Voltaje $e$	V	Temperatura $\theta$	K
Corriente $i$	A	Razón de flujo de calor $q$	J/s
Carga $q$	C	Calor $h$	J
Resistencia $R$	$\Omega$	Resistencia térmica $R$	K-s/J
Capacitancia $C$	F	Capacitancia térmica $C$	J/K

**Respuesta escalón de un sistema de primer orden.** En el sistema del termómetro de mercurio de pared delgada de vidrio mostrado en la Fig. 7-1, supóngase que el termómetro está a la temperatura ambiente  $\bar{\Theta}$  K y que en

$t = 0$  se le sumerge en un baño de agua de temperatura  $\bar{\Theta} + \theta_b$  K. ( $\theta_b$  es la diferencia entre la temperatura del baño y la temperatura ambiente.) Definamos la temperatura instantánea del termómetro como  $\bar{\Theta} + \theta$  K. Nótese que  $\theta$  es el cambio en la temperatura del termómetro que satisface la condición  $\theta(0) = 0$ . Deseamos encontrar la respuesta  $\theta(t)$  cuando la temperatura del baño sea constante o  $\theta_b$  sea constante.

En el modelo matemático del presente sistema, Ec. (7-3),  $RC$  es la constante de tiempo. Escribamos  $RC = T$ . Entonces, el modelo matemático se puede escribir como

$$T \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b \quad (7-4)$$

La transformada de Laplace de la Ec. (7-4) se hace

$$T[s\Theta(s) - \theta(0)] + \Theta(s) = \Theta_b(s)$$

Observando que  $\theta(0) = 0$ , esta última ecuación se simplifica a

$$\Theta(s) = \frac{1}{Ts + 1} \Theta_b(s) \quad (7-5)$$

Nótese que para  $\theta_b = \text{constante}$ , tenemos

$$\Theta_b(s) = \frac{\theta_b}{s}$$

Por lo tanto, la Ec. (7-5) se hace

$$\Theta(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{\theta_b}{s} = \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \right] \theta_b$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da

$$\theta(t) = (1 - e^{-t/T})\theta_b \quad (7-6)$$

La curva de la respuesta  $\theta(t)$  se muestra en la Fig. 7-3. La ecuación (7-6) establece que inicialmente la respuesta  $\theta(t)$  es cero y que luego se hace  $\theta_b$ . (No hay error de estado permanente.) Una de las características importantes de esa curva de respuesta exponencial es que en  $t = T$  el valor de  $\theta(t)$  es  $0.632\theta_b$ , o la respuesta  $\theta(t)$  ha alcanzado el 63.2% de su cambio total. Este hecho puede verse fácilmente al sustituir  $e^{-1} = 0.368$  en la Ec. (7-6).

Otra propiedad importante de la curva de respuesta exponencial es que la pendiente de la recta en  $t = 0$  es  $\theta_b/T$ , puesto que

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\theta_b}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{\theta_b}{T}$$

La respuesta alcanzaría el valor final en  $t = T$  si mantuviera su velocidad inicial de respuesta. La pendiente de la curva de respuesta  $\theta(t)$  decrece monótonamente de  $\theta_b/T$  en  $t = 0$  a cero en  $t = \infty$ .

En relación con la Fig. 7-3, en una constante de tiempo la curva de respuesta exponencial a ido de cero al 63.2% del cambio total. En dos constan-

tes de tiempo la respuesta alcanza 86.5% del cambio total. En  $t = 3T$ ,  $4T$  y  $5T$  la respuesta  $\theta(t)$  alcanza 95, 98.2, y 99.3% del cambio total, respectivamente. Así que, para  $t \geq 4T$ , la respuesta permanece dentro del 2% del valor final. Como puede verse en la Ec. (7-6), el estado estable se alcanza matemáticamente sólo después de un tiempo infinito. Sin embargo, en la práctica, una presuposición razonable del tiempo de respuesta es la longitud del tiempo que la curva de respuesta necesita para alcanzar la recta de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.

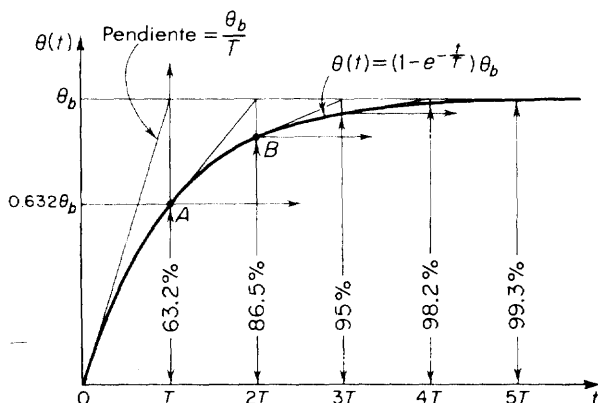


Fig. 7-3. Curva de respuesta escalón de un sistema de primer orden.

**Respuesta a rampa de un sistema de primer orden.** Considérese otra vez el sistema de termómetro mostrado en la Fig. 7-1. Supóngase que durante  $t < 0$ , ambas temperaturas, la del baño y la del termómetro se encuentran en estado estable a la temperatura ambiente  $\bar{\Theta}$  K y que,  $t \geq 0$ , se añade calor al baño y la temperatura de éste cambia linealmente a razón de  $r$  K/s, esto es,

$$\theta_b(t) = rt$$

Obtengamos la respuesta rampa  $\theta(t)$ .

Primero, nótese que

$$\Theta_b(s) = \mathcal{L}[\theta_b(t)] = \mathcal{L}[rt] = \frac{r}{s^2}$$

Al sustituir esta ecuación en la Ec. (7-5), encontramos

$$\Theta(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{r}{s^2} = r \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + (1/T)} \right]$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da

$$\theta(t) = r(t - T + Te^{-t/T}) \quad \text{para } t \geq 0 \quad (7-7)$$



El error  $e(t)$  entre la temperatura del baño real y la temperatura indicada por el termómetro es

$$e(t) = rt - \theta(t) = rT(1 - e^{-t/T})$$

Cuando  $t$  tiende a infinito,  $e^{-t/T}$  tiende a cero. Así pues, el error  $e(t)$  tiende a  $rT$  o

$$e(\infty) = rT$$

La entrada de rampa  $rt$  y la respuesta  $\theta(t)$  se muestran en la Fig. 7-4. El error al seguir la entrada de rampa es igual a  $rT$  para una  $t$  suficientemente grande. Mientras menor sea la constante de tiempo  $T$ , menor es el error en estado estable siguiendo la entrada de rampa.

**Comentarios.** Puesto que el análisis matemático no depende de la estructura física del sistema, los resultados precedentes de las respuestas escalón y rampa pueden aplicarse a cualesquiera sistemas que tengan este modelo matemático:

$$T \frac{dx_o}{dt} + x_o = x_i \quad (7-8)$$

donde

$T$  = constante de tiempo del sistema

$x_i$  = función de entrada o excitación

$x_o$  = función de salida o respuesta

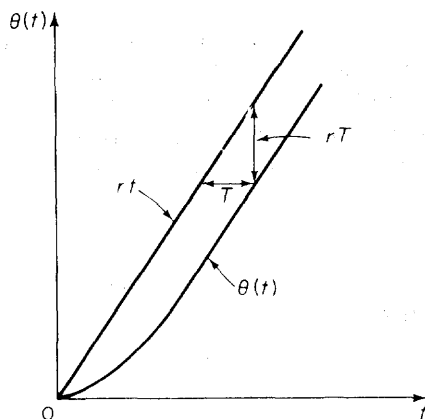


Fig. 7-4. Curva de respuesta rampa de un sistema de primer orden.

En relación con la Ec. (7-6), para una entrada escalón  $x_i(t) = r \cdot 1(t)$ , cualquier sistema descrito por la Ec. (7-8) ofrecerá la siguiente respuesta.

$$x_o(t) = (1 - e^{-t/T})r$$

En forma similar, para una entrada de rampa  $x_i(t) = rt \cdot 1(t)$ , cualquier sistema descrito por la Ec. (7-8) ofrecerá la siguiente respuesta. Consúltese la Ec. (7-7).

$$x_o(t) = r(t - T + Te^{-t/T})$$

Muchos sistemas físicos tienen el modelo matemático de la Ec. (7-8) y la tabla 7-2 muestra varios de ellos. (Los sistemas son análogos.) Todos los sistemas análogos ofrecerán la misma respuesta a la misma función de entrada.

### 7-3 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Para consagrarnos ahora el análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de segundo orden, demos una mirada a algunos sistemas típicos de segundo orden: sistemas masa-resorte-amortiguador y circuitos *RLC*. Aquí emplearemos tales sistemas como ejemplos. Los resultados que se obtengan pueden aplicarse a la respuesta de cualesquiera sistemas análogos.

En las siguientes páginas expondremos primero las vibraciones libres de sistemas mecánicos y después trataremos la respuesta escalón de un sistema eléctrico y uno mecánico, posteriormente describiremos la respuesta impulso de sistemas mecánicos.

**Vibración libre sin amortiguamiento.** Considérese el sistema masa-resorte mostrado en la Fig. 7-5. Obtendremos la respuesta del sistema cuando la masa se desplace hacia abajo una distancia  $x(0) = a$  y se le suelte con una velocidad inicial  $\dot{x}(0) = b$ .

El modelo matemático del sistema es

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b$$

donde el desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio.

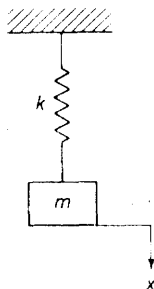
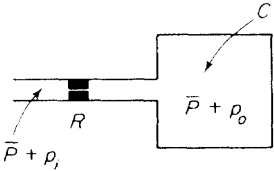
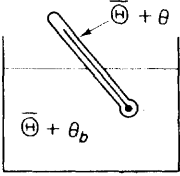
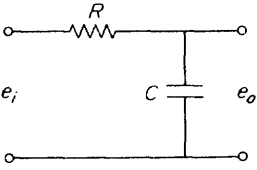
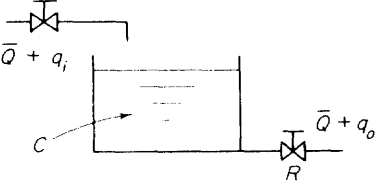
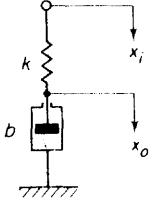


Fig. 7-5. Sistema masa-resorte.

**Tabla 7-2. EJEMPLOS DE SISTEMAS FÍSICOS QUE TIENEN EL MODELO MATEMÁTICO DE LA FORMA  $T(dx_0/dt) + x_0 = x_i$**

	$RC \frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$
	$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b$
	$RC \frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$
	$RC \frac{dq_o}{dt} + q_o = q_i$
	$\frac{b}{k} \frac{dx_o}{dt} + x_o = x_i$

La solución de esta última ecuación da la respuesta  $x(t)$ . Con el objeto de resolver esta ecuación diferencial, tomemos la transformada de Laplace de ambos lados.

$$m[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + kX(s) = 0$$

la cual puede reescribirse como

$$(ms^2 + k)X(s) = msa + mb$$

Resolviéndola para  $X(s)$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{sa + b}{s^2 + (k/m)} \\ &= \frac{as}{s^2 + (\sqrt{k/m})^2} + \frac{b}{\sqrt{k/m}} \frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + (\sqrt{k/m})^2} \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da

$$x(t) = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + b \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

La respuesta  $x(t)$  consiste en una función seno y una coseno y depende de los valores de las condiciones iniciales  $a$  y  $b$ . Si, por ejemplo, la masa se suelta con velocidad cero de modo que  $b = 0$ , entonces el movimiento  $x(t)$  es una función coseno simple:

$$x(t) = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

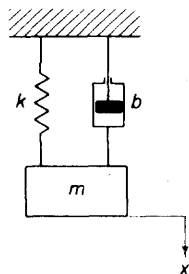
**Vibración libre con amortiguamiento viscoso.** El amortiguamiento está siempre presente en los sistemas mecánicos reales, aunque en algunos casos puede ser despreciable por su pequeñez.

El sistema mecánico de la Fig. 7-6 consiste en una masa, un resorte y un amortiguador. Si la masa se jala hacia abajo y se le suelta, vibrará libremente. La amplitud del movimiento resultante decrecerá en cada ciclo a una razón que depende de la cantidad de amortiguamiento viscoso. (Puesto que la fuerza de amortiguamiento se opone al movimiento, hay una pérdida continua de energía en el sistema.)

El modelo matemático de este sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (7-9)$$

donde el desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio.



**Fig. 7-6.** Sistema masa-resorte-amortiguador.

El carácter de la respuesta natural de un sistema de segundo orden como éste se determina por las raíces de la ecuación característica

$$ms^2 + bs + k = 0$$

Las dos raíces de la ecuación son

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Si el coeficiente de amortiguamiento  $b$  es tan pequeño que  $b^2 < 4mk$ , las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas. La respuesta libre es una senoide que decrece exponencialmente, y se dice que el sistema está *subamortiguado*.

Si el coeficiente de amortiguamiento  $b$  se incrementa, se alcanzará un punto en el cual  $b^2 = 4mk$ . Cuando el amortiguamiento ha alcanzado este valor ( $b = 2\sqrt{mk}$ ), las dos raíces de la ecuación característica son iguales. Se dice que el sistema está *críticamente amortiguado*.

Si el coeficiente de amortiguamiento  $b$  se incrementa más todavía de modo que  $b^2 > 4mk$ , las dos raíces se hacen reales. La respuesta es la suma de las dos exponenciales decrecientes y se dice que el sistema está *subamortiguado*.

Al resolver la Ec. (7-9) para la respuesta  $x(t)$ , es conveniente definir

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{frecuencia natural no amortiguada, rad/s}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \text{factor de amortiguamiento relativo} = \frac{\text{valor de amortiguamiento real}}{\text{valor de amortiguamiento crítico}} \\ &= \frac{b}{2\sqrt{km}} \end{aligned}$$

y reescribiendo la Ec. (7-9) como sigue:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (7-10)$$

En la siguiente exposición usaremos la Ec. (7-10) como ecuación del sistema y obtendremos la respuesta  $x(t)$  para tres casos: caso subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ), sobreamortiguado ( $\zeta > 1$ ), y críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ ).

*Caso 1. Caso subamortiguado* ( $0 < \zeta < 1$ )

La transformada de Laplace de la Ec. (7-10) da

$$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 2\zeta\omega_n[sX(s) - x(0)] + \omega_n^2X(s) = 0$$

Resolviendo para  $X(s)$ , tenemos

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2} \quad (7-11)$$

o bien

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{(s + \zeta\omega_n)x(0)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \\ &\quad + \frac{\zeta\omega_nx(0) + \dot{x}(0)}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \frac{\zeta\omega_n x(0) + \dot{x}(0)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t$$

A continuación, definamos

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \text{frecuencia natural amortiguada, rad/s}$$

Entonces, la respuesta  $x(t)$  puede darse por

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x(0) \cos \omega_d t + \left[ \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} x(0) + \frac{1}{\omega_d} \dot{x}(0) \right] \sin \omega_d t \right\} \quad (7-12)$$

Si la velocidad inicial es cero o  $\dot{x}(0) = 0$ , la Ec. (7-12) se simplifica a

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad (7-13)$$

o bien

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x(0)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \\ &= \frac{x(0)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos \left( \omega_d t - \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \end{aligned} \quad (7-14)$$

Adviértase que, en el caso presente, el amortiguamiento introduce el término  $e^{-\zeta\omega_n t}$  como factor de multiplicación. Este factor es una exponencial decreciente, y se hace cada vez más pequeña a medida que el tiempo se incrementa, causando así que la amplitud del movimiento armónico decrezca con el tiempo.

### Caso 2. Caso sobreamortiguado ( $\zeta > 1$ )

Aquí las dos raíces de la ecuación característica son reales, y por lo tanto, la Ec. (7-11) puede escribirse

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})} \\ &= \frac{a}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{b}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

donde  $a$  y  $b$  se obtiene como

$$\begin{aligned} a &= \frac{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})x(0)}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ b &= \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})x(0)}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  da la respuesta  $x(t)$ .

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{-(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + be^{-(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} \\ &= \left[ \frac{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})x(0)}{2\sqrt{\zeta^2-1}} - \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \right] e^{-(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} \\ &\quad + \left[ \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})x(0)}{2\sqrt{\zeta^2-1}} + \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \right] e^{-(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} \end{aligned}$$

Obsérvese que ambos términos en el segundo miembro de esta última ecuación decrecen exponencialmente. El movimiento de la masa en este caso es un regreso lento y gradual a la posición de equilibrio.

### Caso 3. Caso críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ )

En realidad, todos los sistemas tienen un factor de amortiguamiento relativo mayor o menor que la unidad y  $\zeta = 1$  raramente ocurre en la práctica. No obstante, tomar el caso  $\zeta = 1$  como referencia tiene utilidad matemática. (La respuesta no ofrece ninguna vibración, pero es la más rápida entre los movimientos no vibratorios.)

En el caso del amortiguamiento crítico, el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  es igual a la unidad. Por lo tanto, las dos raíces de la ecuación característica son la misma, igual que la frecuencia natural  $\omega_n$ . La ecuación (7-11) puede, por lo tanto, escribirse

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{(s + 2\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\omega_ns + \omega_n^2} \\ &= \frac{(s + \omega_n)x(0) + \omega_n x(0) + \dot{x}(0)}{(s + \omega_n)^2} \\ &= \frac{x(0)}{s + \omega_n} + \frac{\omega_n x(0) + \dot{x}(0)}{(s + \omega_n)^2} \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da

$$x(t) = x(0)e^{-\omega_n t} + [\omega_n x(0) + \dot{x}(0)]te^{-\omega_n t}$$

La respuesta  $x(t)$  es similar a la encontrada para el caso sobreamortiguado. La masa, cuando se desplaza y se le suelta, regresará a la posición de equilibrio sin vibración.

La figura 7-7 muestra la respuesta  $x(t)$  para los tres casos (subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado) con las condiciones iniciales  $x(t) \neq 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ .

**Determinación experimental del factor de amortiguamiento relativo.** Algunas veces es necesario determinar los factores de amortiguamiento relativo y las frecuencias naturales amortiguadas de registradores y otros instrumentos. Con el objeto de averiguar el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural amortiguada de un sistema experimentalmente, se ne-

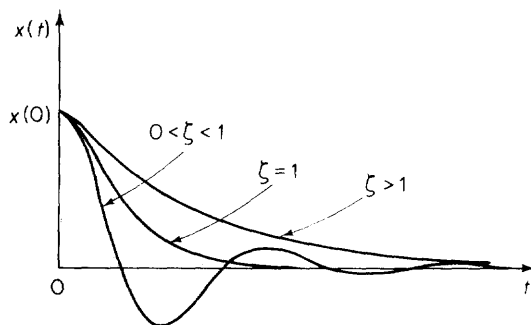


Fig. 7-7. Curvas de respuesta típicas del sistema masa-resorte-amortiguador.

cesita un registro de las oscilaciones decrecientes o amortiguadas como se muestra en la Fig. 7-8. (Tal oscilación se puede registrar dando al sistema unas condiciones iniciales cualesquiera.)

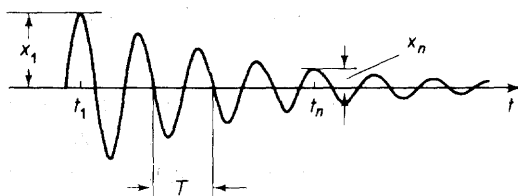


Fig. 7-8. Oscilación decreciente.

El periodo de oscilación  $T$  puede medirse directamente entre puntos donde se cruza el eje cero como se muestra en la figura.

Para determinar el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  de la razón de decrecimiento de las oscilaciones, medimos las amplitudes, esto es, en el tiempo  $t = t_1$  medimos la amplitud  $x_1$  y en el tiempo  $t + (n + 1)T$  medimos la amplitud  $x_n$ . Nótese que es necesario encontrar una  $n$  lo suficientemente grande para que  $x_n/x_1$  no esté cercana a la unidad. Puesto que el decrecimiento en la amplitud de un ciclo al siguiente puede representarse como la relación de los factores de multiplicación exponenciales en los instantes  $t_1$  y  $t_1 + T$ , en relación con la Ec. (7-12), obtenemos

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1 + T)}} = \frac{1}{e^{-\zeta\omega_n T}} = e^{\zeta\omega_n T}$$

Similarmente,

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{1}{e^{-\zeta\omega_n(n-1)T}} = e^{(n-1)\zeta\omega_n T}$$

El logaritmo de la relación de las amplitudes sucesivas se llama *decremento logarítmico*. Así,

$$\begin{aligned} \text{Decremento logarítmico} &= \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{n-1} \left( \ln \frac{x_1}{x_n} \right) = \zeta\omega_n T \\ &= \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$



Una vez medidas las amplitudes  $x_1$  y  $x_n$  y calculado el decremento logarítmico, el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  se encuentra a partir de

$$\frac{1}{n-1} \left( \ln \frac{x_1}{x_n} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

o bien

$$\zeta = \frac{\frac{1}{n-1} \left( \ln \frac{x_1}{x_n} \right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[ \frac{1}{n-1} \left( \ln \frac{x_1}{x_n} \right) \right]^2}}$$

**Ejemplo 7-1.** En el sistema mostrado en la Fig. 7-6 los valores numéricos de  $m$ ,  $b$  y  $k$  se dan como  $m = 1$  kg,  $b = 2$  N-s/m y  $k = 100$  N/m. La masa se desplaza 0.05 m y se le suelta sin velocidad inicial. Encuéntrase la frecuencia observada en la vibración. Además, encuéntrase la amplitud cuatro ciclos después.

La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Sustituyendo los valores numéricos de  $m$ ,  $b$  y  $k$  en esta ecuación, da

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 100x = 0$$

donde las condiciones iniciales son  $x(0) = 0.05$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . De esta última ecuación la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  resultan

$$\omega_n = 10, \quad \zeta = 0.1$$

La frecuencia observada realmente en la vibración es la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ .

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 10 \sqrt{1 - 0.01} = 9.95 \text{ rad/s}$$

En el presente análisis,  $\dot{x}(0)$  se da como cero. Así que, en relación con la Ec. (7-13), la solución  $x(t)$  puede escribirse

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

Se sigue que  $t = nT$ , donde  $T = 2\pi/\omega_d$ ,

$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta\omega_n nT}$$

En consecuencia, la amplitud cuatro ciclos después se hace

$$\begin{aligned} x(4T) &= x(0)e^{-\zeta\omega_n 4T} = x(0)e^{-(0.1)(10)(4)(0.63)} \\ &= 0.05e^{-2.52} = 0.05 \times 0.0804 = 0.00402 \text{ m} \end{aligned}$$

**Estimación del tiempo de respuesta.** La masa del sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-6 se desplaza  $x(0)$  y se le suelta sin velocidad inicial. La respuesta la da la Ec. (7-14), reescrita así:

$$x(t) = \frac{x(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos \left( \omega_d t - \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

Una curva de respuesta típica se muestra en la Fig. 7-9. Nótese que tal curva de respuesta es tangente a las exponenciales envolventes  $\pm [x(0)/\sqrt{1-\zeta^2}]e^{-\zeta\omega_n t}$ . La constante de tiempo  $T$  de estas curvas exponenciales es  $1/(\zeta\omega_n)$ .

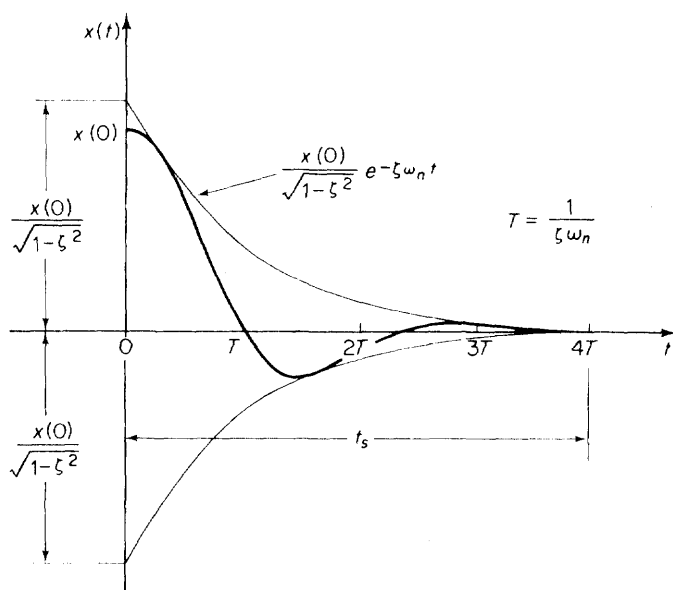


Fig. 7-9. Curva de respuesta típica del sistema mostrado en la Fig. 7-6 y sus envolventes exponenciales.

El hecho de que la curva de respuesta  $x(t)$  sea tangente a las curvas exponenciales nos capacita para estimar el tiempo de respuesta del sistema de segundo orden tal como se muestra en la Fig. 7-6, en términos del tiempo de asentamiento  $t_s$  definido por

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

El tiempo de asentamiento  $t_s$  puede considerarse como un tiempo de respuesta aproximado del sistema, puesto que para  $t > t_s$  la curva de respuesta permanece dentro del 2% del valor final o 2% del cambio total.

**Comentario.** El análisis precedente, tanto como los resultados obtenidos, pueden aplicarse a cualesquiera sistemas análogos que tengan modelos matemáticos de la forma dada en la Ec. (7-10).

**Respuesta escalón de sistemas de segundo orden.** Consideremos a continuación la respuesta escalón de un sistema eléctrico y un sistema mecánico.

El sistema eléctrico mostrado en la Fig. 7-10 es un sistema típico de segundo orden. Supóngase que el capacitor  $C$  tiene una carga inicial  $q_0$  y que

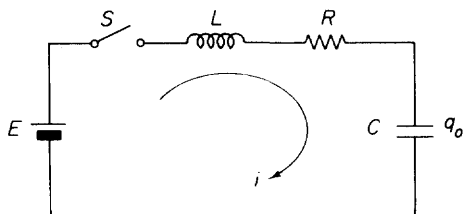


Fig. 7-10. Sistema eléctrico.

el interruptor  $S$  se cierra en  $t = 0$ . El cierre de interruptor  $S$  y la aplicación de un voltaje  $E$  al circuito corresponden a la aplicación de una entrada escalón al sistema.

Un modelo matemático del circuito es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E$$

o en términos de la carga  $q$ , donde  $i = dq/dt$ ,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E$$

donde las condiciones iniciales son  $q(0) = q_0$  y  $\dot{q}(0) = 0$ . Esta última ecuación puede entonces reescribirse como

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L} \quad (7-15)$$

Por definición

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \text{frecuencia natural no amortiguada, rad/s}$$

$$\zeta = \frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}} = \text{factor de amortiguamiento relativo}$$

La Ec. (7-15) puede escribirse

$$\ddot{q} + 2\zeta\omega_n\dot{q} + \omega_n^2q = \frac{E}{L} \quad (7-16)$$

Ahora definase

$$q - \frac{1}{\omega_n^2} \frac{E}{L} = q - CE = x \quad (7-17)$$

La ecuación (7-16) puede entonces escribirse en términos de la nueva variable  $x$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (7-18)$$

con las condiciones iniciales  $x(0) = q_0 - CE$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . Puesto que la Ec. (7-18) es exactamente la misma que la Ec. (7-10), los resultados obtenidos en el análisis de las vibraciones libres del sistema masa-resorte-amortiguador se aplican a este caso. Por ejemplo, para el caso subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ), la solución de la Ec. (7-18) está dada por la Ec. (7-12), reescrita así:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x(0) \cos \omega_d t + \left[ \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} x(0) + \frac{1}{\omega_d} \dot{x}(0) \right] \sin \omega_d t \right\}$$

Al sustituir  $\omega_n = \sqrt{1/(LC)}$ ,  $\zeta = R\sqrt{C}/(2\sqrt{L})$ ,  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $x(0) = q_0 - CE$ , y  $\dot{x}(0) = 0$  en esta última ecuación y observando que  $q(t) = x(t) + CE$  [Ec. (7-17)], tenemos la siguiente solución.

$$\begin{aligned} q(t) &= x(t) + CE \\ &= CE \left\{ 1 + e^{-(R/2L)t} \left[ \left( \frac{q_0}{CE} - 1 \right) \cos \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(q_0/CE) - 1}{\sqrt{[4L/(R^2C)] - 1}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right] \right\} \end{aligned}$$

Para los casos críticamente amortiguado y sobreamortiguado, la respuesta  $q(t)$  se puede obtener similarmente.

Es importante notar que la respuesta escalón es básicamente la misma que la respuesta a la condición sólo inicial. La diferencia entre estas dos respuestas estriba en el término constante de la solución.

Debe también notarse que, por lo regular, la misma solución puede encontrarse tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la Ec. (7-16) y resolviendo para  $Q(s)$ , donde  $Q(s) = \mathcal{L}[q(t)]$ , y tomando su transformada inversa de Laplace en lugar de cambiar la variable de  $q(t)$  a  $x(t)$ . Cuando están dados los valores numéricos de  $\zeta$  y  $\omega_n$  y las condiciones iniciales son cero, este último enfoque puede ser más simple que el recién presentado. Véase el ejemplo 7-2.

**Ejemplo 7-2.** Consideremos la respuesta escalón de un sistema mecánico (Fig. 7-11) en el cual una barra  $AA'$  rígida, sin masa, está suspendida del techo a través de un resorte y un amortiguador. Supóngase que en  $t = 0$ , un hombre de 193 lb<sub>f</sub> de peso salta y se prende de la barra  $AA'$ . Despreciando la masa del dispositivo resorte-amortiguador, ¿cuál es el subsecuente movimiento  $x(t)$  de la barra  $AA'$ ? Supóngase que el coeficiente de fricción viscosa  $b$  es 2 lb<sub>f</sub>-s/in y que la constante del resorte  $k$  es 20 lb<sub>f</sub>/in.

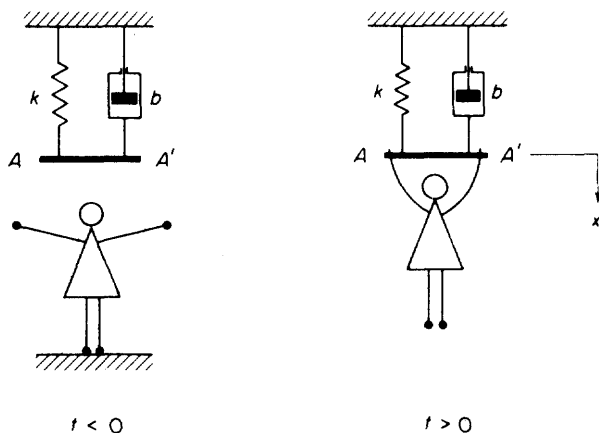


Fig. 7-11. Sistema mecánico.

La entrada al sistema es una fuerza constante  $mg$ , donde  $m$  es la masa del hombre. Ésta actúa como una entrada escalón al sistema. Las condiciones iniciales son  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . En  $t = 0+$  el hombre está bien asido de la barra y empieza a moverse hacia arriba y hacia abajo. El modelo matemático o ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg$$

donde

$$m = 193 \text{ lb} = 6 \text{ slugs}$$

$$b = 2 \text{ lb}_f\text{-s/in.} = 24 \text{ lb}_f\text{-s/ft}$$

$$k = 20 \text{ lb}_f\text{/in.} = 240 \text{ lb}_f\text{/ft}$$

Al sustituir los valores numéricos en la ecuación de movimiento, encontramos

$$6\ddot{x} + 24\dot{x} + 240x = 193$$

o bien

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 40x = 32.2$$

Entonces, si tomamos la transformada de Laplace de esta última ecuación y sustituimos las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , el resultado es

$$s^2 X(s) + 4sX(s) + 40X(s) = \frac{32.2}{s}$$

Resolviendo para  $X(s)$ ,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{32.2}{(s^2 + 4s + 40)s} \\ &= \frac{32.2}{40} \left( \frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^2 + 4s + 40} \right) \\ &= 0.805 \left[ \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + 6^2} - \frac{1}{3} \frac{6}{(s+2)^2 + 6^2} \right] \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da

$$x(t) = 0.805(1 - e^{-2t} \cos 6t - \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 6t) \text{ ft}$$

Esta solución describe un movimiento arriba y abajo de la barra  $AA'$  y el hombre.

Si cambiamos los valores numéricos de  $m$ ,  $b$ ,  $k$  dados en unidades BES al sistema de unidades SI, tenemos

$$m = 6 \text{ slugs} = 6 \times 14.594 = 87.56 \text{ kg}$$

$$b = 2 \text{ lb}_f\text{-s/in.} = 2 \times 4.4482 \times 12/0.3048 = 350.3 \text{ N-s/m}$$

$$k = 20 \text{ lb}_f\text{/in.} = 20 \times 4.4482 \times 12/0.3048 = 3503 \text{ N/m}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento del sistema se hace

$$87.56\ddot{x} + 350.3\dot{x} + 3503x = 87.56 \times 9.81$$

la cual puede simplificarse a

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 40x = 9.81$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$x(t) = 0.245(1 - e^{-2t} \cos 6t - \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 6t) \text{ m}$$

**Respuesta impulso.** Volvamos otra vez a la respuesta impulso de los sistemas mecánicos. Tal respuesta puede observarse cuando un sistema mecánico se somete a una fuerza muy grande durante un tiempo muy corto (por ejemplo, cuando la masa de un sistema masa-resorte-amortiguador recibe un golpe de martillo o un proyectil). Matemáticamente, tal entrada impulso puede expresarse mediante una función impulso.

La función impulso unitario definida en la sección 6-4 es una función matemática y, en realidad, no existe. Sin embargo, como se muestra en la Fig. 7-12(a), si la entrada real tiene una corta duración ( $\Delta t$  segundos) pero es de gran amplitud ( $h$ ), de modo que el área ( $h \Delta t$ ) en una gráfica de tiempo no sea despreciable, puede ser aproximada mediante una función impulso. La entrada de impulso se denota usualmente mediante una flecha vertical, como se muestra en la Fig. 7-12(b), para indicar que tiene una duración muy corta y una altura muy grande.

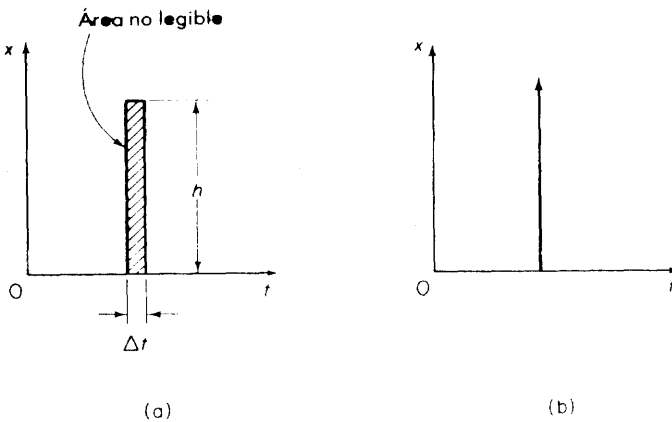


Fig. 7-12. Entradas impulso.

Debe notarse que en el manejo de funciones impulso, sólo la magnitud o área de la función impulso es importante; su forma real carece de importancia. En otras palabras, un impulso de amplitud  $2h$  y duración  $\Delta t/2$  puede considerarse el mismo impulso que uno de amplitud  $h$  y duración  $\Delta t$  en tanto que  $\Delta t$  tienda a cero y  $h \Delta t$  sea finita.

Antes de exponer la respuesta impulso de sistemas mecánicos, vale la pena repasar la ley de conservación de la cantidad de movimiento, expuesta normalmente en los cursos de física universitarios.

**Ley de conservación de cantidad de movimiento.** La cantidad de movimiento de una masa  $m$  moviéndose a una velocidad  $v$  es  $mv$ . De acuerdo con la segunda ley de Newton.

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

De donde

$$F dt = d(mv) \quad (7-19)$$

Integrando ambos lados de la Ec. (7-19), tenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{v_1}^{v_2} d(mv) = mv_2 - mv_1$$

donde  $v_1 = v(t_1)$  y  $v_2 = v(t_2)$ . Esta última ecuación establece que el cambio en la cantidad de movimiento es igual a la integral de la fuerza entre  $t = t_1$  y  $t = t_2$ .

La cantidad de movimiento es una cantidad vectorial. Tiene magnitud, dirección y sentido. La dirección de cambio en la cantidad de movimiento es la dirección de la fuerza.

En ausencia de cualquier fuerza externa la Ec. (7-18) se hace

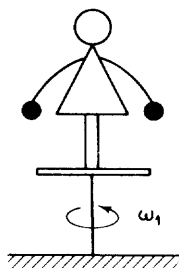
$$d(mv) = 0$$

o bien

$$mv = \text{constante}$$

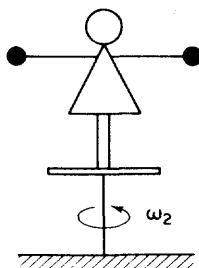
Así que la cantidad de movimiento total de un sistema permanece sin cambio y por cualquier acción que pueda tener lugar dentro del sistema, suponiendo que ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema. A esto se le llama la *ley de conservación de la cantidad de movimiento*.

La cantidad de movimiento angular de un sistema rotatorio es  $J\omega$ , donde  $J$  es el momento de inercia de un cuerpo y  $\omega$  es su velocidad angular. En ausencia de algún par externo, la cantidad de movimiento angular  $J\omega$  de un cuerpo permanece sin cambio. Esta es la *ley de conservación de la cantidad de movimiento angular*. Así que en la ausencia de un par externo, si el momento de inercia de un cuerpo cambia a causa de un cambio en la configuración del cuerpo, como se muestra en la Fig. 7-13, la velocidad angular cambia de modo que se mantenga  $J\omega = \text{constante}$ .



$J_1$  : Pequeño

$\omega_1$  : Grande



$J_2$  : Grande

$\omega_2$  : Pequeño

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$$

**Fig. 7-13.** Figuras que ilustran la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular.

**Ejemplo 7-3.** Un proyectil se dispara horizontalmente contra un bloque de madera colocado sobre una superficie horizontal, sin fricción. Si la masa  $m_1$  del proyectil es de 0.02 kg y la velocidad es de 600 m/s, ¿cuál es la velocidad del bloque de madera después que el proyectil se incrusta en él? Supóngase que el bloque de madera tiene una masa  $m_2$  de 50 kg.

Si consideramos que el proyectil y el bloque de madera constituyen un sistema, no hay fuerza externa actuando sobre el sistema. En consecuencia, su momento total permanece sin cambio.

$$\text{Cantidad de movimiento antes del impacto} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

donde  $v_1$ , la velocidad del proyectil, es igual a 600 m/s, y  $v_2$ , la velocidad del bloque de madera antes del impacto es igual a cero.

$$\text{Cantidad de movimiento después del impacto} = (m_1 + m_2)v$$

donde  $v$  es la velocidad del bloque de madera después que el proyectil se ha incrustado. (Las velocidades  $v_1$  y  $v$  tienen la misma dirección.)

La ley de conservación de la cantidad de movimiento establece que

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$$

Al sustituir los valores numéricos dados en esta última ecuación, tenemos

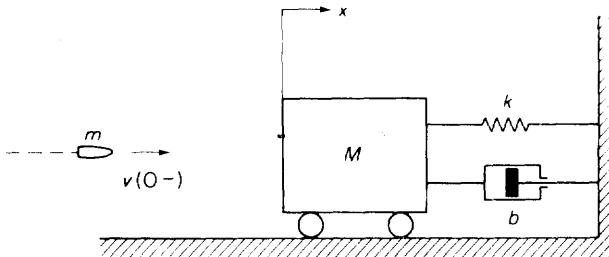
$$0.02 \times 600 + 50 \times 0 = (0.02 + 50)v$$

o bien

$$v = 0.24 \text{ m/s}$$

Así que el bloque de madera después que el proyectil se ha incrustado se moverá a la velocidad de 0.24 m/s en la misma dirección de la velocidad original de proyectil  $v_1$ .

**Respuesta impulso de un sistema mecánico.** Supóngase que en el sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-14, un proyectil de masa  $m$  se dispara contra la masa  $M$  (donde  $M \gg m$ ). Se supone que cuando el proyectil pega en la masa  $M$ , se incrustará en ella. Determínese la respuesta (desplazamiento  $x$ ) de la masa  $M$  después de ser golpeada por el proyectil.



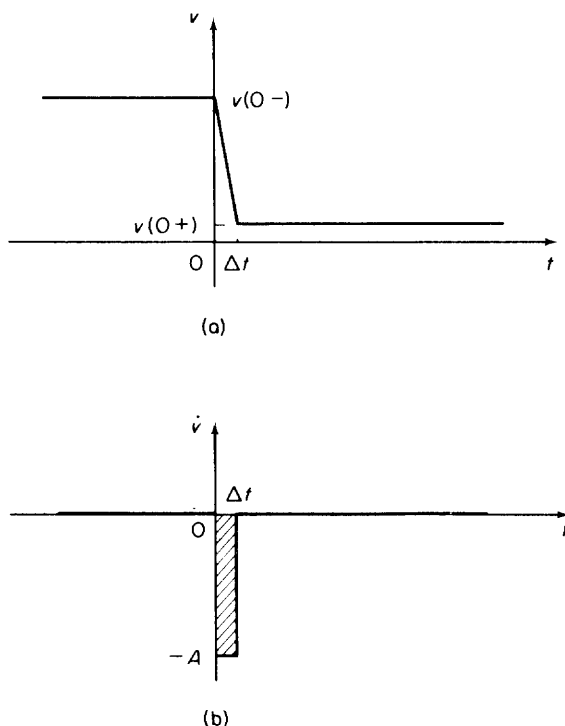
**Fig. 7-14.** Sistema mecánico sometido a una entrada impulso.



La entrada al sistema en este caso puede considerarse un impulso, cuya magnitud es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento del proyectil.

Supóngase que el proyectil se dispara en el  $t = 0^-$  y que la velocidad inicial del proyectil es  $v(0^-)$ . En el instante que el proyectil golpea la masa  $M$ , la velocidad del proyectil se hace igual que la de la masa  $M$ , puesto que se ha supuesto que el proyectil se incrusta en la masa  $M$ .

En razón de que supusimos  $M \gg m$ , la velocidad  $v(t)$  después que el proyectil golpea a la masa  $M$  será pequeña comparada con  $v(0)$ . Como resultado, hay un cambio súbito en la velocidad del proyectil, como lo muestra la Fig. 7-15(a). Puesto que el cambio en la velocidad del proyectil ocurre instantáneamente,  $\dot{v}$  tiene la forma de un impulso como se muestra en la Fig. 7-15(b). Nótese que  $\dot{v}$  es negativa. En  $t > 0$ , la masa  $M$  y el proyectil  $m$  se mueven como una masa combinada  $M + m$ .



**Fig. 7-15.** (a) Cambio en la velocidad del proyectil cuando golpea a la masa; (b) cambio en aceleración del proyectil cuando golpea a la masa.

La ecuación de movimiento del sistema es

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \quad (7-20)$$

donde  $F(t)$ , una fuerza de impulso, es igual a  $-m\dot{v}$ . Nótese que  $-m\dot{v}$  es positiva. La fuerza de impulso  $F(t)$  está en la dirección positiva de  $x$ . En rela-

ción con la Fig. 7-15(b), la fuerza de impulso  $F(t)$  puede escribirse

$$F(t) = A \Delta t \delta(t)$$

donde  $A \Delta t$  es la magnitud de la entrada impulso. Así,

$$F(t) = A \Delta t \delta(t) = -m\dot{v}$$

de la cual

$$\int_{0-}^{0+} A \Delta t \delta(t) dt = -m \int_{0-}^{0+} \dot{v} dt$$

o bien

$$A \Delta t = mv(0-) - mv(0+) \quad (7-21)$$

El momento del proyectil se cambia de  $mv(0-)$  a  $mv(0+)$ . Puesto que

$$v(0+) = \dot{x}(0+) = \text{velocidad inicial de la masa } M$$

La Ec. (7-21) se puede escribir

$$A \Delta t = mv(0-) - m\dot{x}(0+)$$

Entonces, la Ec. (7-20) se hace

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) = [mv(0-) - m\dot{x}(0+)] \delta(t)$$

Al tomar la transformada  $\mathcal{L}_-$  de ambos lados de esta última ecuación, vemos que

$$\begin{aligned} M[s^2 X(s) - sx(0-) - \dot{x}(0-)] + b[sX(s) - x(0-)] + kX(s) \\ = mv(0-) - m\dot{x}(0+) \end{aligned}$$

También, observando que  $x(0-) = 0$  y  $\dot{x}(0-) = 0$ , tenemos

$$(Ms^2 + bs + k)X(s) = mv(0-) - m\dot{x}(0+)$$

o bien

$$X(s) = \frac{mv(0-) - m\dot{x}(0+)}{Ms^2 + bs + k} \quad (7-22)$$

Con el objeto de determinar el valor de  $\dot{x}(0+)$ , podemos aplicar el teorema del valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}(0+) &= \lim_{t \rightarrow 0} \dot{x}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sX(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2[mv(0-) - m\dot{x}(0+)]}{Ms^2 + bs + k} \\ &= \frac{mv(0-) - m\dot{x}(0+)}{M} \end{aligned}$$

de la cual

$$M\dot{x}(0+) = mv(0-) - m\dot{x}(0+)$$

o bien

$$\dot{x}(0+) = \frac{m}{M+m} v(0-)$$

Se sigue que

$$mv(0-) - m\dot{x}(0+) = \frac{Mm}{M+m}v(0-)$$

Y por lo tanto, la Ec. (7-22) se hace

$$X(s) = \frac{mv(0-)}{M+m} \frac{M}{Ms^2 + bs + k} \quad (7-23)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ec. (7-23) da la respuesta impulso  $x(t)$ , o sea,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{mv(0-)}{M+m} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + (b/M)s + (k/M)}\right]$$

La respuesta  $x(t)$  revelará vibraciones amortiguadas si el sistema está subamortiguado. De otro modo alcanzará un desplazamiento máximo y luego regresará lenta y gradualmente a la posición de equilibrio ( $x = 0$ ) sin vibración.

Como ilustración, supongamos los siguientes valores numéricos de  $M$ ,  $m$ ,  $b$ ,  $k$ , y  $v(0-)$  y determinemos la respuesta  $x(t)$ .

$$M = 50 \text{ kg}$$

$$m = 0.01 \text{ kg}$$

$$b = 100 \text{ N-s/m}$$

$$k = 2500 \text{ N/m}$$

$$v(0-) = 800 \text{ m/s}$$

Sustituyendo los valores numéricos dados en la Ec. (7-23) se llega a

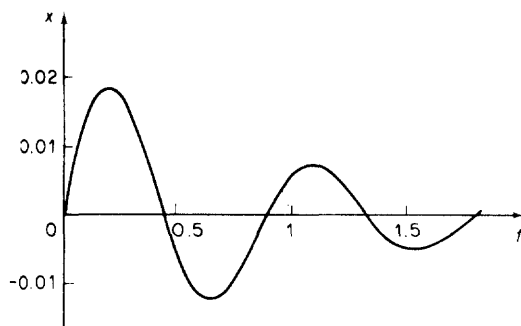
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{0.01 \times 800}{50 + 0.01} \frac{50}{50s^2 + 100s + 2500} \\ &= \frac{8}{50.01} \frac{1}{s^2 + 2s + 50} \\ &= \frac{8}{50.01 \times 7} \frac{7}{(s+1)^2 + 7^2} \end{aligned}$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace de esta última ecuación, obtenemos

$$x(t) = 0.0229e^{-t} \sin 7t \text{ m}$$

La respuesta  $x(t)$  es así, una senoide amortiguada como se muestra en la Fig. 7-16.

**Comentarios.** En el ejemplo 7-3 consideramos al bloque de madera y al proyectil como constitutivos de un sistema. Sin embargo, si tomamos al bloque de madera sólo como un sistema y al proyectil como la fuerza externa, entonces podemos proceder como en el análisis precedente exactamente



**Fig. 7-16.** Curva de respuesta al impulso del sistema mostrado en la Fig. 7-14 con  $M = 50$  kg,  $m = 0.01$  kg,  $b = 100$  N-s/m,  $k = 2500$  N/m y  $v(0-) = 800$  m/s.

y obtener la Ec. (7-23). Para verificar el resultado, sustituyamos  $m = m_1 = 0.02$  kg,  $M = m_2 = 50$  kg,  $b = 0$ ,  $k = 0$  y  $v(0-) = v_1 = 600$  m/s en la Ec. (7-23).

$$X(s) = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \frac{1}{s^2}$$

o bien

$$sX(s) = V(s) = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \frac{1}{s}$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0.02 \times 600}{0.02 + 50} = 0.24 \text{ m/s}$$

la cual es la misma que el resultado obtenido en el ejemplo 7-3.

## 7-4 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

En la teoría de los sistemas las funciones llamadas “funciones de transferencia” se usan frecuentemente para caracterizar las relaciones de entrada y salida de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo. Empezaremos por definir una función de transferencia y seguir con la obtención de las funciones de transferencia de sistemas físicos. Luego se expondrán sistemas análogos basados en estas funciones.

**Funciones de transferencia.** La *función de transferencia* de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo, se define como la relación de la transferencia de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función impulsora) bajo la suposición que todas las condiciones iniciales sean cero.

Considérese el sistema lineal definido por la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x \\ = b_0 p^{(m)} + b_1 p^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1} \dot{p} + b_m p \quad (n \geq m) \end{aligned}$$

donde  $x$  es la salida del sistema y  $p$  es la entrada. La función de transferencia de este sistema se obtiene tomando la transformada de Laplace de ambos lados de esta última ecuación, bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero, o sea,

$$\begin{aligned} \text{Función de transferencia} = G(s) &= \frac{\mathcal{L}[\text{salida}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \Big|_{\text{condiciones iniciales cero}} \\ &= \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned}$$

Al usar el concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de los sistemas mediante ecuaciones algebraicas en  $s$ . Si la potencia más alta de  $s$  en el denominador de la función de transferencia es igual a  $n$ , el sistema se llama *sistema de orden  $n$ -ésimo*.

**Comentarios sobre la función de transferencia.** La aplicabilidad del concepto de la función de transferencia se limita a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. El enfoque de función de transferencia, sin embargo, se usa extensamente en el análisis y el diseño de tales sistemas. En lo que sigue, enlistaremos un comentario importante concerniente a la función de transferencia. (Nótese que en la lista, el sistema tratado es uno descrito por una ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo.)

1. La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático que implica un método operacional de expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
2. La función de transferencia es una propiedad del sistema en sí mismo, independiente de la magnitud y naturaleza de la función de entrada o excitación.
3. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información alguna concerniente a la estructura física del sistema. (Las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas.)
4. Si la función de transferencia de un sistema se conoce, puede estudiarse la salida o respuesta para varias formas de entrada teniendo presente la comprensión de la naturaleza del sistema.
5. Si no se conoce la función de transferencia de un sistema, ésta puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida, una función de transferencia da una descripción completa de las características dinámicas del sistema, sin recurrir a su descripción física.

**Sistema mecánico.** Considérese el sistema masa-resorte-amortiguador mostrado en la Fig. 7-17. Obtengamos la función de transferencia de este sistema suponiendo que la fuerza  $p(t)$  es la entrada y el desplazamiento  $x(t)$  de la masa la salida. Aquí medimos el desplazamiento  $x$  desde la posición de equilibrio.

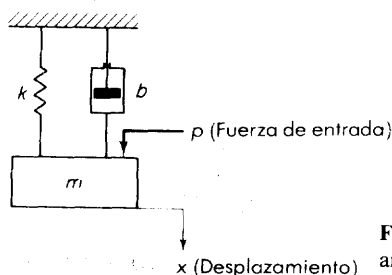


Fig. 7-17. Sistema masa-resorte-amortiguador.

Para obtener la función de transferencia, procedemos de acuerdo con los siguientes pasos.

1. Escribese la ecuación diferencial del sistema.
2. Tómease la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero.
3. Tómease la relación de la salida  $X(s)$  con respecto a la entrada  $P(s)$ . Esta relación es la función de transferencia.

Aplicando la segunda ley de Newton al presente sistema, obtenemos

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = p$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de esta ecuación, da

$$m[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b[sX(s) - x(0)] + kX(s) = P(s)$$

Al igualar a cero todas las condiciones iniciales, la última ecuación se simplifica a

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = P(s)$$

Tomando la relación de  $X(s)$  con respecto a  $P(s)$ , encontramos que la función de transferencia del sistema es

$$\text{Función de transferencia} = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

**Circuito eléctrico.** La figura 7-18 muestra un circuito eléctrico en el cual  $e_i$  es el voltaje de entrada y  $e_o$  el voltaje de salida. El circuito consta de una inductancia  $L$  (henry), una resistencia  $R$  (ohm) y una capacitancia  $C$  (farad). Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al sistema resultan las siguientes ecuaciones:

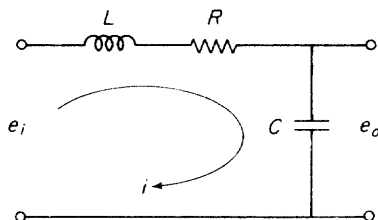


Fig. 7-18. Circuito eléctrico.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o$$

Al tomar la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones y suponiendo cero condiciones iniciales, tenemos

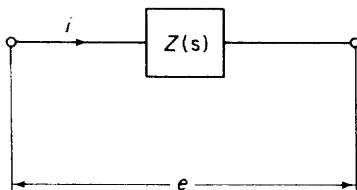
$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia de este sistema es

$$\text{Función de transferencia} = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (7-24)$$

**Impedancias complejas.** Al obtener las funciones de transferencia de circuitos eléctricos, a menudo es conveniente escribir las ecuaciones transformadas por Laplace directamente en lugar de escribir las ecuaciones diferenciales primero. Podemos hacerlo de ese modo utilizando el concepto de impedancias complejas.

Fig. 7-19. Sistema eléctrico con impedancia compleja  $Z(s)$ .

La impedancia compleja  $Z(s)$  del circuito de dos terminales de la Fig. 7-19 es la relación de  $E(s)$ , la transformada de Laplace del voltaje entre las terminales e  $I(s)$ , la transformada de Laplace de la corriente a través del elemento, bajo la suposición de que las condiciones iniciales sean cero, de modo que  $Z(s) = E(s)/I(s)$ . Si el elemento de dos terminales es una resistencia  $R$ ,

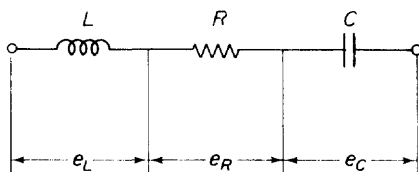
una capacitancia  $C$  o una inductancia  $L$ , entonces la respectiva impedancia compleja está dada por  $R$ ,  $1/Cs$  o  $Ls$ . La relación general

$$E(s) = Z(s)I(s)$$

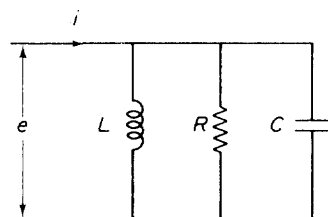
corresponde a la ley de Ohm para circuitos puramente resistivos. Nótese que las impedancias pueden combinarse en serie y paralelo justamente como lo hacen las resistencias.

Considérese a continuación el circuito mostrado en la Fig. 7-20(a). La impedancia compleja  $Z(s)$  se encuentra a partir de

$$E(s) = E_L(s) + E_R(s) + E_C(s) = \left( Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) I(s)$$



(a)



(b)

Fig. 7-20. Circuitos eléctricos.

como

$$Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = Ls + R + \frac{1}{Cs}$$

Para el circuito mostrado en la Fig. 7-20(b),

$$I(s) = \frac{E(s)}{Ls} + \frac{E(s)}{R} + \frac{E(s)}{1/Cs} = E(s) \left( \frac{1}{Ls} + \frac{1}{R} + Cs \right)$$

En consecuencia,

$$Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{R} + Cs}$$

**Obtención de funciones de transferencia de circuitos eléctricos mediante el uso de impedancias complejas.** La función de transferencia de un cir-



cuito eléctrico puede obtenerse como una relación de impedancias complejas. En el circuito mostrado en la Fig. 7-21, supóngase que los voltajes  $e_i$  y  $e_o$  son la entrada y salida del circuito, respectivamente.

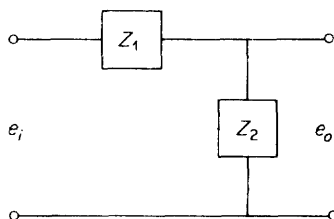


Fig. 7-21. Circuito eléctrico.

Entonces, la función de transferencia de este circuito puede obtenerse como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)I(s)}{Z_1(s)I(s) + Z_2(s)I(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Como ejemplo, considérese el circuito mostrado en la Fig. 7-8, donde

$$Z_1(s) = Ls + R, \quad Z_2(s) = \frac{1}{Cs}$$

La función de transferencia de este circuito puede encontrarse como

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \\ &= \frac{1/Cs}{Ls + R + (1/Cs)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \end{aligned}$$

la cual, por supuesto, es idéntica a la Ec. (7-24).

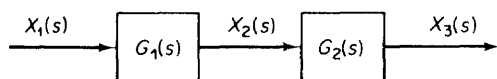
**Funciones de transferencia de elementos en serie sin carga.** La función de transferencia de un sistema formado por dos elementos en cascada sin carga puede encontrarse eliminando la entrada y la salida intermedias. Considérese, por ejemplo, el sistema mostrado en la Fig. 7-22(a). La función de transferencia de cada elemento es

$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

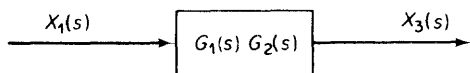
Si la impedancia de entrada del segundo elemento es infinita, la salida del primer elemento no se afecta por conectarlo al segundo elemento. Así que la función de transferencia del sistema completo es

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \frac{X_3(s)}{X_2(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

La función de transferencia del sistema completo es, por lo tanto, el producto de las funciones de transferencia de los elementos individuales. Esta situación se muestra en la Fig. 7-22(b).



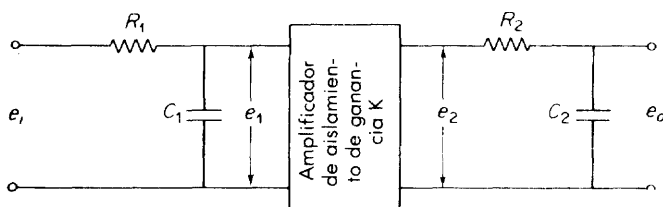
(a)



(b)

**Fig. 7-22.** (a) Sistema que consta de dos elementos en cascada sin carga; (b) diagrama simplificado.

Examinemos otro ejemplo, el sistema mostrado en la Fig. 7-23. La inserción de un amplificador de aislamiento entre los circuitos con el objeto de obtener características de no carga se usa frecuentemente para combinar circuitos electrónicos. Puesto que tanto los amplificadores de estado sólido como los amplificadores de tubos de vacío tienen impedancias de entrada muy altas, un amplificador de aislamiento insertado entre los dos circuitos justifica la suposición de no carga.



**Fig. 7-23.** Sistema eléctrico.

Los dos circuitos  $RC$  simples aislados por un amplificador que se muestra en la Fig. 7-23 tienen efectos de carga despreciables, y la función de transferencia del circuito entero es igual al producto de las funciones de transferencia individuales. Así que en este caso,

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{E_1(s)}{E_i(s)} \frac{E_2(s)}{E_1(s)} \frac{E_o(s)}{E_2(s)} \\ &= \left( \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \right) (K) \left( \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} \right) \\ &= \frac{K}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)} \end{aligned}$$

**Funciones de transferencia de elementos en serie con carga.** Muchos sistemas, como el que se ilustra en la Fig. 7-24, tienen componentes que dan

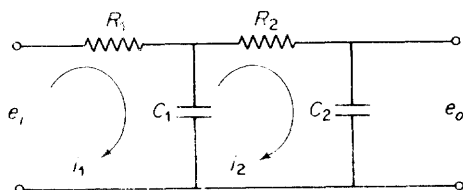


Fig. 7-24. Sistema eléctrico.

carga entre sí. Supongamos otra vez que en esta figura  $e_i$  es la entrada y  $e_o$  es la salida. Aquí la segunda etapa del circuito (porción  $R_2C_2$ ) produce un efecto de carga sobre la primera etapa (porción  $R_1C_1$ ). Las ecuaciones para este sistema son

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt = e_i$$

$$\frac{1}{C_1} \int (i_2 - i_1) dt + R_2 i_2 = -\frac{1}{C_2} \int i_2 dt = -e_o$$

Si tomamos la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones, suponiendo cero condiciones iniciales, los resultados son

$$R_1 I_1(s) + \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C_1 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) = -\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = -E_o(s)$$

Entonces, eliminando  $I_1(s)$  de estas dos últimas ecuaciones da

$$E_i(s) = \frac{1}{C_2 s} (R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + R_1 C_1 s + R_2 C_2 s + R_1 C_2 s + 1) I_2(s)$$

$$E_o(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$

Y por lo tanto, la función de transferencia entre  $E_o(s)$  y  $E_i(s)$  es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \quad (7-25)$$

El término  $R_1 C_2 s$  en el denominador de la función de transferencia representa la interacción de dos circuitos  $RC$  simples. [Puesto que  $(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)^2 > 4 R_1 C_1 R_2 C_2$ , las dos raíces del denominador de la Ec. (7-25) son reales.]

El presente análisis muestra que si dos circuitos  $RC$  se conectan en cascada, de modo que la salida del primer circuito sea la entrada al segundo, la función de transferencia total no es el producto de  $1/(R_1 C_1 s + 1)$  y  $1/(R_2 C_2 s + 1)$ . Esta situación ocurre cuando obtenemos la función de transferencia de un circuito aislado, suponemos implícitamente que la salida está sin carga. En otras palabras, la impedancia de carga se supone infinita, lo cual significa que ninguna potencia se está tomando a la salida. Aun cuando el segundo

circuito esté conectado a la salida del primero, se toma una cierta cantidad de potencia y de este modo se viola la suposición de no carga. El grado del efecto de la carga determina la cantidad de modificación de la función de transferencia. Recuérdese siempre que cualquier efecto de carga debe ser tomado en cuenta cuando se obtenga la función de transferencia.

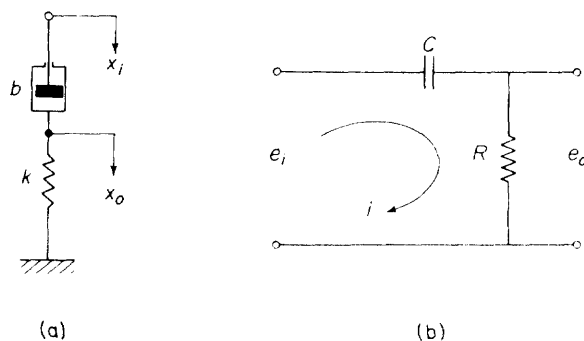
**Sistemas análogos.** En capítulos previos de vez en cuando expusimos sistemas análogos. Aquí resumiremos lo expuesto anteriormente.

La analogía, por supuesto, no está limitada a la analogía mecánico-eléctrica, la analogía hidráulico-eléctrica, y situaciones similares, sino que incluye cualesquiera sistemas físicos y no físicos. Los sistemas que tienen funciones de transferencia idénticas (o idéntico modelo matemático) son sistemas análogos. (La función de transferencia es una de las formas más simples y concisas de los modelos matemáticos disponibles en el presente.)

El concepto de analogía es útil para aplicar los resultados bien conocidos de un campo a otro. Ha resultado particularmente útil cuando un sistema físico dado (mecánico, hidráulico, neumático, etc.) es complejo, de modo que, resulta ventajoso analizar primero un circuito eléctrico análogo. Tal circuito eléctrico análogo puede construirse físicamente o puede simularse en una computadora analógica. (Para las computadoras analógicas electrónicas consúltese la Sec. 7-7.)

Para muchos ingenieros, los circuitos eléctricos o los sistemas simulados en computadoras analógicas pueden ser más fáciles de analizar que los circuitos hidráulicos o neumáticos. En consecuencia, el ingeniero debe ser capaz de obtener un circuito eléctrico análogo para un sistema físico dado. En general, una vez que se encuentra la función de transferencia de un sistema físico dado, no es difícil obtener un circuito eléctrico análogo o simularlo en una computadora analógica.

**Ejemplo 7-4.** Obtengamos la función de transferencia de los sistemas mostrados en la Fig. 7-25(a) y (b) y muestre que estos sistemas son análogos.



**Fig. 7-25.** (a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico análogo.

En el sistema mecánico de la Fig. 7-25(a), la ecuación de movimiento es

$$b(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + kx_o$$

o bien

$$b\dot{x}_i = kx_o + b\dot{x}_o$$

Al tomar la transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo cero las condiciones iniciales, obtenemos

$$bsX_i(s) = (k + bs)X_o(s)$$

Aquí la función de transferencia entre  $X_o(s)$  y  $X_i(s)$  es

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs}{bs + k} = \frac{(b/k)s}{(b/k)s + 1}$$

En el sistema eléctrico de la Fig. 7-25(b), tenemos

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R}{(1/Cs) + R} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

Comparando las funciones de transferencia obtenidas, vemos que los dos sistemas son análogos. Nótese que tanto  $b/k$  como  $RC$  tienen la dimensión del tiempo y son las constantes de tiempo de los sistemas respectivos. (Para cantidades análogas entre los sistemas mecánicos y eléctricos, véase la Sec. 3-5.)

## 7-5 RESPUESTA EN FRECUENCIA Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA SENOIDAL

Cuando se aplica una entrada senoidal a un sistema lineal, éste tiende a vibrar a su propia frecuencia natural así como a seguir la frecuencia de la entrada. En presencia de amortiguamiento, esta porción del movimiento no sostenido por la entrada senoidal desaparecerá gradualmente. Como resultado, la respuesta en estado permanente es senoidal a la misma frecuencia que la entrada. La salida en estado permanente difiere de la entrada solamente por la amplitud y el ángulo de fase. Así que la relación de las amplitudes de salida/entrada y el ángulo de fase entre salida y la senoide de entrada son los dos únicos parámetros necesarios para predecir la salida de un sistema lineal cuando la entrada es una senoide. En general, la relación de amplitudes y el ángulo de fase dependen de la frecuencia de entrada.

**Respuesta en frecuencia.** El término *respuesta en frecuencia* se refiere a la respuesta en estado permanente de un sistema a una entrada senoidal. Para todas las frecuencias de cero a infinito, la respuesta en frecuencia característica de un sistema puede ser completamente descrita mediante la relación de amplitud salida/entrada y el ángulo de fase entre la salida y la senoide de entrada. En este método de análisis de sistemas, variamos la fre-

cuencia de la señal de entrada dentro de una amplia escala y estudiamos la respuesta resultante.

Hay tres razones principales para considerar con énfasis la respuesta en frecuencia en análisis de sistemas.

1. Muchos fenómenos naturales son de naturaleza senoidal (por ejemplo, los movimientos armónicos simples generalmente son generados en sistemas eléctricos y mecánicos).
2. Cualquier señal periódica puede representarse mediante una serie de componentes senoidales.
3. Las señales senoidales son importantes en las comunicaciones tanto como en la generación y transmisión de potencia eléctrica.

**Vibración forzada sin amortiguamiento.** La figura 7-26 ilustra un sistema masa-resorte en el cual la masa está sometida a una entrada senoidal, la fuerza  $P \text{ sen } \omega t$ . Encontremos la respuesta del sistema si inicialmente se encuentra en reposo.

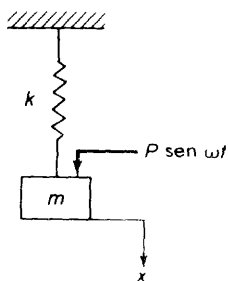


Fig. 7-26. Sistema masa-resorte.

Si medimos el desplazamiento  $x$  desde la posición de equilibrio, la ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + kx = P \text{ sen } \omega t$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P}{m} \text{ sen } \omega t \quad (7-26)$$

Resolveremos primero este problema mediante el método convencional. La solución de esta ecuación consiste en la vibración a su propia frecuencia natural (solución homogénea) y a aquella de la frecuencia de excitación (solución particular). Así, la solución  $x(t)$  puede escribirse

$$x(t) = (\text{solución homogénea}) + (\text{solución particular})$$

$$= \left( A \text{ sen } \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + (C \text{ sen } \omega t)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son aún constantes indeterminadas.

Supongamos que la entrada  $P \text{ sen } \omega t$  se aplica en  $t = 0$ . Puesto que el sistema está inicialmente en reposo, tenemos las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . Entonces,

$$x(0) = B = 0$$

En consecuencia,  $x(t)$  puede simplificarse como

$$x(t) = A \text{ sen } \sqrt{\frac{k}{m}} t + C \text{ sen } \omega t \quad (7-27)$$

Observando que

$$\dot{x}(t) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C \omega \cos \omega t$$

tenemos

$$\dot{x}(0) = A \sqrt{\frac{k}{m}} + C \omega = 0$$

Y así

$$C = -A \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\omega}$$

La segunda derivada de  $x(t)$  se hace

$$\ddot{x}(t) = -A \frac{k}{m} \text{ sen } \sqrt{\frac{k}{m}} t - C \omega^2 \text{ sen } \omega t \quad (7-28)$$

La sustitución de las Ecs. (7-27) y (7-28) en la Ec. (7-26) da

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = -C \omega^2 \text{ sen } \omega t + \frac{k}{m} C \text{ sen } \omega t = \frac{P}{m} \text{ sen } \omega t$$

de la cual

$$C \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right) = \frac{P}{m}$$

o bien

$$C = \frac{P}{k - m\omega^2}$$

Se sigue que

$$A = -\frac{C\omega}{\sqrt{k/m}} = -\frac{P\omega\sqrt{m/k}}{k - m\omega^2}$$

La solución se encuentra ahora

$$x(t) = -\frac{P\omega\sqrt{m/k}}{k - m\omega^2} \text{ sen } \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{P}{k - m\omega^2} \text{ sen } \omega t \quad (7-29)$$

Esta es la solución completa (solución general). El primer término es la solución homogénea (la cual no decrece en este sistema), y el segundo término es la solución particular.

La misma solución completa puede obtenerse usando el método de la transformada de Laplace. De hecho, en sistemas más complicados (tales como los sistemas que incluyen términos de amortiguamiento o sistemas que tengan dos o más grados de libertad) el enfoque de la transformada de Laplace es mucho más simple que el enfoque convencional arriba presentado. Demostremoslo para el presente sistema. [Nótese que si necesitamos solamente una solución en estado permanente (solución particular), el uso de la función de transferencia senoidal simplifica la solución. La función de transferencia senoidal se expone en detalle en esta sección.]

Al tomar la transformada de Laplace de la Ec. (7-26) y usar las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , encontramos

$$\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)X(s) = \frac{P}{m} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Resolviendo para  $X(s)$ ,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{P}{m} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{s^2 + (k/m)} \\ &= \frac{-P\omega\sqrt{m/k}}{k - m\omega^2} \frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + (k/m)} + \frac{P}{k - m\omega^2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da

$$x(t) = -\frac{P\omega\sqrt{m/k}}{k - m\omega^2} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{P}{k - m\omega^2} \sin \omega t$$

la cual es exactamente la misma que la Ec. (7-29).

Examinemos la respuesta del sistema, Ec. (7-29). Cuando la frecuencia de excitación  $\omega$  tiende a cero, la amplitud de la vibración a su frecuencia natural  $\sqrt{k/m}$  tiende a cero y la amplitud de la vibración a la frecuencia de excitación  $\omega$  tiende a  $P/k$ . Este valor  $P/k$  es la deflexión de la masa que resultaría si la fuerza  $P$  se aplicara en forma estable (a frecuencia cero). Así pues,  $P/k$  es la deflexión estática. A medida que se incrementa la frecuencia  $\omega$ , el denominador de la solución,  $k - m\omega^2$ , se hace más pequeño y la amplitud se hace más grande. Cuando la frecuencia  $\omega$  se incrementa aún más y se hace igual a la frecuencia natural del sistema,  $\omega = \omega_n = \sqrt{k/m}$ , ocurre la resonancia. En resonancia, el denominador de la solución,  $k - m\omega^2$ , se hace cero y la amplitud de la vibración se incrementará sin límite. (Cuando se aplica la entrada senoidal a la frecuencia natural y en fase con el movimiento; esto es, en la misma dirección que la velocidad, la fuerza de entrada está realmente trabajando sobre el sistema y aumentando su energía la que aparecerá como un incremento en las amplitudes.) Al continuar incrementándose  $\omega$  más allá de la resonancia, el denominador  $k - m\omega^2$  se hace negativo y adopta valores de crecimiento incrementado, tendiendo a infinito negativo. Por lo tanto, las amplitudes de la vibración (a la frecuencia natural y a la frecuencia de excitación) tienden a cero del lado negativo, arrancando en el in-



finito negativo cuando  $\omega = \omega_n +$ . En otras palabras, si  $\omega$  está por abajo de la resonancia, la vibración que corresponde a la frecuencia de excitación (solución particular) está en fase con la senoide de excitación. Si  $\omega$  está por arriba de la resonancia, la vibración está  $180^\circ$  fuera de fase.

**Función de transferencia senoidal.** La *función de transferencia senoidal* se define como la función de transferencia  $G(s)$  en la cual  $S$  es reemplazada por  $j\omega$ . Cuando solamente se quiere la solución de estado permanente (solución particular), la función de transferencia senoidal  $G(j\omega)$  puede simplificar la solución. En la siguiente exposición consideraremos el comportamiento de los sistemas lineales estables en las condiciones del estado permanente, esto es, después que los transitorios iniciales han desaparecido. Y veremos que las entradas senoidales producen salidas senoidales en estado permanente con la amplitud y el ángulo de fase de cada frecuencia  $\omega$  determinados por la magnitud y el ángulo de fase de  $G(j\omega)$ , respectivamente.

**Obtención de una salida de estado permanente de una entrada senoidal.** Veamos cómo las características de la respuesta en frecuencia de un sistema estable pueden obtenerse directamente de la función de transferencia senoidal. En el sistema lineal  $G(s)$  de la Fig. 7-27 la entrada y la salida se

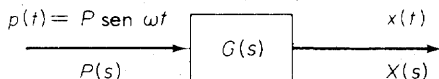


Fig. 7-27. Sistema lineal.

denotan mediante  $p(t)$  y  $x(t)$ , respectivamente. La entrada  $p(t)$  es senoidal y está dada por

$$p(t) = P \sin \omega t$$

Mostraremos que la salida  $x(t)$  en estado permanente está dada por

$$x(t) = |G(j\omega)| P \sin(\omega t + \phi)$$

donde  $G(j\omega)$  y  $\phi$  son la magnitud y el ángulo de  $G(j\omega)$ , respectivamente.

Supóngase que la función de transferencia  $G(s)$  puede escribirse como una relación de polinomios en  $s$ , esto es,

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}$$

La transformada de Laplace de la salida  $X(s)$  es

$$X(s) = G(s)P(s) \quad (7-30)$$

donde  $P(s)$  es la transformada de Laplace de la entrada  $p(t)$ .

Limitemos nuestra exposición solamente a los sistemas estables. En tales sistemas, la parte real de las  $-s_i$  son negativas. La respuesta permanente de un sistema lineal estable ante una entrada senoidal no depende de las condiciones iniciales, y por lo tanto, puede ser ignorada.

Si  $G(s)$  tiene solamente polos diferentes, entonces la expansión en fracciones parciales de la Ec. (7-30) da

$$X(s) = G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n} \quad (7-31)$$

donde  $a$  y  $b_i$  (donde  $i = 1, 2, \dots, n$ ) son constantes y  $\bar{a}$  es el complejo conjugado de  $a$ . La transformada inversa de Laplace de la Ec. (7-31) da

$$x(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1 t} + b_2e^{-s_2 t} + \dots + b_n e^{-s_n t}$$

En un sistema estable, cuando  $t$  tiende al infinito, los términos  $e^{-s_1 t}$ ,  $e^{-s_2 t}$ ,  $\dots$ ,  $e^{-s_n t}$  tienden a cero, puesto que  $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$  tienen partes reales negativas. Así que todos los términos del lado derecho de esta última ecuación, excepto los dos primeros, desaparecen en el estado estable.

Si  $G(s)$  incluye  $k$  polos múltiples  $s_j$ , entonces  $x(t)$  incluirá términos tales como  $t^h e^{-s_j t}$  (donde  $h = 0, 1, \dots, k - 1$ ). Puesto que la parte real de la  $-s_j$  es negativa en un sistema estable, los términos  $t^h e^{-s_j t}$  tienden a cero cuando  $t$  tiende a infinito.

Independientemente de que el sistema incluya polos múltiples, la respuesta permanente se hace así

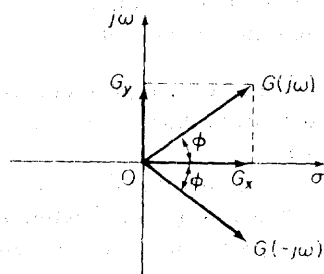
$$x(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \quad (7-32)$$

donde las constantes  $a$  y  $\bar{a}$  pueden evaluarse por la Ec. (7-31).

$$a = G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} = -\frac{P}{2j} G(-j\omega)$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s = j\omega} = \frac{P}{2j} G(j\omega)$$

(Nótese que  $\bar{a}$  es el complejo conjugado de  $a$ .) En relación con la Fig. 7-28, podemos escribir



**Fig. 7-28.** Función compleja y su complejo conjugado.

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= G_x + jG_y \\
 &= |G(j\omega)| \cos \phi + j |G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi \\
 &= |G(j\omega)| (\cos \phi + j \operatorname{sen} \phi) \\
 &= |G(j\omega)| e^{j\phi}
 \end{aligned}$$

(Adviértase que  $\angle G(j\omega) = \angle e^{j\phi} = \phi$ .) En forma similar

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi} = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

Se sigue que

$$a = -\frac{P}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

$$\bar{a} = \frac{P}{2j} |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

Entonces la Ec. (7-32) puede escribirse

$$\begin{aligned}
 x(t) &= |G(j\omega)| P \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\
 &= |G(j\omega)| P \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\
 &= X \operatorname{sen}(\omega t + \phi)
 \end{aligned} \tag{7-33}$$

donde  $X = |G(j\omega)| P$  y  $\phi = \angle G(j\omega)$ . Vemos que un sistema lineal estable sometido a una entrada senoidal tendrá, en estado permanente, una salida senoidal de la misma frecuencia que la entrada. Pero la amplitud y el ángulo de fase de la salida diferirán, en general, de aquellos de la entrada. De hecho, la amplitud de la salida está dada por el producto de la amplitud de la entrada y  $|G(j\omega)|$ , en tanto que el ángulo de fase difiere del de la entrada en la cantidad  $\phi = \angle G(j\omega)$ .

Sobre la base del análisis precedente, estamos capacitados para obtener el siguiente resultado importante. Para las entradas senoidales,

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)| &= \left| \frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} \right| = \text{relación de amplitudes de la senoide} \\
 &\quad \text{de salida y la senoide de entrada} \\
 \angle G(j\omega) &= \angle \frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} = \tan^{-1} \left[ \frac{\text{parte imaginaria de } G(j\omega)}{\text{parte real de } G(j\omega)} \right] \\
 &= \text{desfasamiento de la senoide de salida} \\
 &\quad \text{con respecto a la senoide de entrada}
 \end{aligned}$$

Así que las características de la respuesta en estado permanente de un sistema lineal ante una entrada senoidal pueden encontrarse directamente de  $G(j\omega)$ , la relación entre  $X(j\omega)$  y  $P(j\omega)$ .

Nótese que la función de transferencia senoidal  $G(j\omega)$  es una cantidad compleja que puede representarse por la magnitud y el ángulo de fase con la frecuencia  $\omega$  como parámetro. Con el objeto de caracterizar completamente un sistema lineal mediante las curvas de respuestas en frecuencia, debemos

especificar tanto la relación de amplitudes como el ángulo de fase en función de la frecuencia  $\omega$ .

**Comentarios.** Debe hacerse notar que la Ec. (7-33) es válida solamente si  $G(s) = X(s)/P(s)$  es un sistema estable; esto es, si todos los polos de  $G(s)$  caen en la mitad izquierda del plano. Si un polo está en el origen y/o unos polos de  $G(s)$  caen en el eje  $j\omega$  (pueden ocurrir en el eje  $j\omega$ , polos cualesquiera, como un par de complejos conjugados). La salida  $x(t)$  puede obtenerse tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación

$$X(s) = G(s)P(s) = G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2}$$

o bien

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2}\right]$$

Adviértase que si un par de polos de  $G(s)$  cae en la mitad derecha del plano, el sistema es inestable y la respuesta crece indefinidamente. No hay estado permanente para tal sistema inestable.

**Ejemplo 7-5.** Considérese el sistema de función de transferencia

$$\frac{X(s)}{P(s)} = G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Para la entrada senoidal  $p(t) = P \sin \omega t$ , ¿cuál es la salida  $x(t)$  de estado permanente?

La sustitución de  $j\omega$  por  $s$  en  $G(s)$  da

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}$$

La relación de amplitudes salida/entrada es

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

en tanto que el ángulo de fase  $\phi$  es

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$

Así, para la entrada  $p(t) = P \sin \omega t$ , la salida  $x(t)$  de estado permanente puede encontrarse como

$$x(t) = \frac{P}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \sin(\omega t - \tan^{-1} T\omega)$$

De esta ecuación vemos que, para  $\omega$  pequeña, la amplitud de la salida  $x(t)$  es casi igual a la amplitud de la entrada. Para una gran  $\omega$ , la amplitud de la salida es pequeña y casi inversamente proporcional a  $\omega$ . El ángulo de fase es de  $0^\circ$  para  $\omega = 0$  y se aproxima a  $-90^\circ$  cuando  $\omega$  se incrementa indefinidamente.

**Ejemplo 7-6.** Supóngase que una fuerza senoidal  $p(t) = P \sin \omega t$  se aplica al sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-29. Suponiendo que el desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio, encuéntrase la salida de estado permanente.

La ecuación de movimiento para el sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = p(t)$$

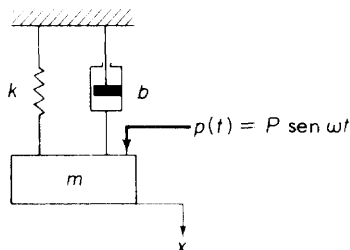


Fig. 7-29. Sistema mecánico.

La transformada de Laplace de esta ecuación, suponiendo condiciones iniciales cero, es

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = P(s)$$

donde  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$  y  $P(s) = \mathcal{L}[p(t)]$ . (Nótese que las condiciones iniciales no afectan la salida de estado permanente y, por lo tanto, pueden suponerse cero.) La función de transferencia entre el desplazamiento  $X(s)$  y la fuerza de entrada  $P(s)$  es, por lo tanto,

$$\frac{X(s)}{P(s)} = G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Puesto que la entrada es una función senoidal  $p(t) = P \sin \omega t$ , podemos usar la función de transferencia senoidal para obtener la solución de estado permanente. La función de transferencia senoidal es

$$\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} = G(j\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + bj\omega + k} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + jb\omega}$$

En relación con la Ec. (7-33), la salida  $x(t)$  puede escribirse

$$x(t) = |G(j\omega)| P \sin(\omega t + \phi)$$

donde

$$\phi = \angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(k - m\omega^2) + jb\omega} = -\tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}$$

Así,

$$x(t) = \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

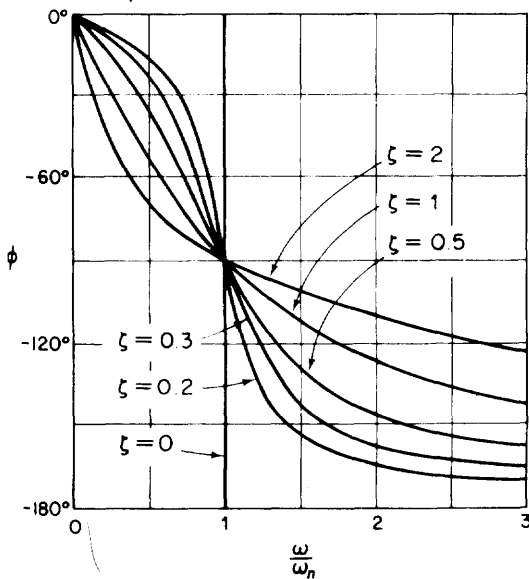
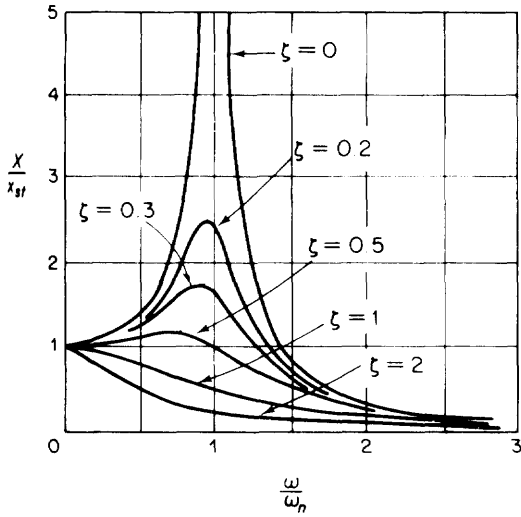
Puesto que  $k/m = \omega_n^2$  y  $b/k = 2\zeta/\omega_n$ , esta ecuación puede escribirse

$$x(t) = \frac{x_{st}}{\sqrt{[1 - (\omega^2/\omega_n^2)]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \sin\left[\omega t - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega^2/\omega_n^2)}\right] \quad (7-34)$$

donde  $x_{st} = P/k$  es la deflexión estática.

Al escribir la amplitud de  $x(t)$  como  $X$ , encontramos que la relación de amplitudes  $X/x_{st}$  es

$$\frac{X}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega^2/\omega_n^2)]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}$$



**Fig. 7-30.** Curvas de amplitud normalizada contra frecuencia normalizada y curvas de ángulo de fase contra frecuencia normalizada.

La figura 7-30 muestra los efectos de la frecuencia de entrada  $\omega$  y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  en la amplitud y el ángulo de fase de la salida de estado permanente.

De la figura vemos que a medida que el factor de amortiguamiento relativo se incrementa, la relación de amplitudes decrece. La relación de amplitudes máxima ocurre en aquella frecuencia menor que la frecuencia natural no amortiguada. Obsérvese que la frecuencia  $\omega_m$  a la cual la relación de amplitudes es máxima, ocurre a

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

(Esta frecuencia es algo menor que la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .) El valor de  $\omega_m$  puede obtenerse como la frecuencia que hace mínima

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

Es decir, al diferenciar esta expresión respecto a  $\omega$ , al sustituir  $\omega = \omega_m$  y al igualar a cero esta ecuación tenemos

$$2\left(1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_n^2}\right)\left(-\frac{2\omega_m}{\omega_n^2}\right) + 4\zeta^2 \frac{2\omega_m}{\omega_n^2} = 0$$

Resolviendo entonces para  $\omega_m^2$  llegamos a

$$\frac{\omega_m^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\zeta^2$$

la cual da

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

**Ejemplo 7-7.** En relación con el sistema mostrado en la Fig. 7-29, si los valores numéricos de  $m$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $P$  y  $\omega$  se dan como  $m = 10$  kg,  $b = 30$  N-s/m,  $k = 1000$  N/m,  $P = 10$  n, y  $\omega = 2$  rad/s, ¿cuál es la salida  $x(t)$  en estado permanente?

La ecuación del sistema es

$$10\ddot{x} + 30\dot{x} + 1000x = 10 \sin 2t$$

La frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es de 10 rad/s, el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  es 0.15 y la deflexión estática  $x_{st}$  es 0.01 m. Al sustituir los valores numéricos en la Ec. (7-34), la salida en estado permanente resulta ser

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{0.01}{\sqrt{[1 - (2^2/10^2)]^2 + (2 \times 0.15 \times 2/10)^2}} \sin \left[ 2t - \tan^{-1} \frac{2 \times 0.15 \times 2/10}{1 - (2^2/10^2)} \right] \\ &= 0.0104 \sin (2t - \tan^{-1} 0.0625) \\ &= 0.0104 \sin (2t - 0.0625) \end{aligned}$$

La salida en estado permanente tiene amplitud de 0.0104 m y se atrasa de la entrada (función de excitación) en 0.0625 rad o 3.58°.

**Ejemplo 7-8.** Supóngase, en el circuito de la Fig. 7-31, que se aplica un voltaje  $e_i$  a las terminales de entrada y aparece un voltaje  $e_o$  en las terminales de salida. También supóngase que la entrada es senoidal y está dada por

$$e_i(t) = E_i \sin \omega t$$

¿Cuál es la corriente en estado permanente  $i(t)$ ?

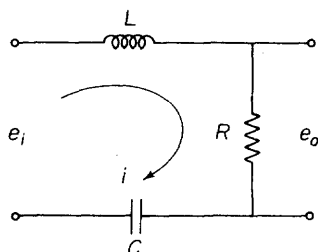


Fig. 7-31. Circuito eléctrico.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito resulta

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

Entonces la transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo condiciones iniciales cero, es

$$\left( Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) I(s) = E_i(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia entre  $I(s)$  y  $E_i(s)$  se hace

$$\frac{I(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{Ls + R + (1/Cs)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

La función de transferencia senoidal es

$$\frac{I(j\omega)}{E_i(j\omega)} = G(j\omega) = \frac{Cj\omega}{-LC\omega^2 + RCj\omega + 1}$$

Por lo tanto, la corriente  $i(t)$  en estado permanente está dada por

$$\begin{aligned} i(t) &= |G(j\omega)| E_i \sin[\omega t + |G(j\omega)|] \\ &= \frac{CE_i\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \sin\left(\omega t + 90^\circ - \tan^{-1} \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) \\ &= \frac{CE_i\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) \end{aligned}$$

## \*7-6 AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

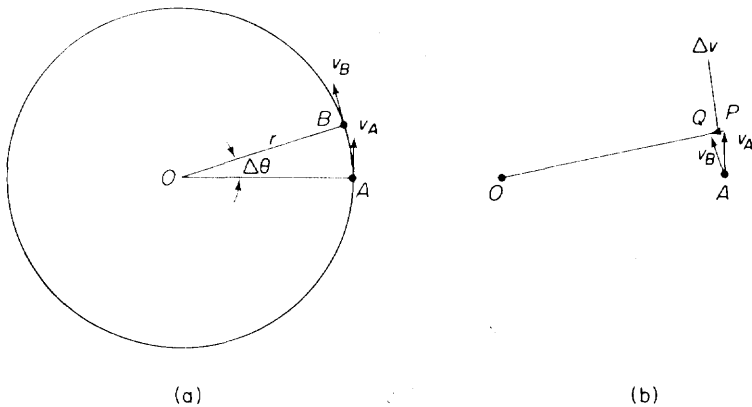
La vibración es, en general, indeseable porque puede causar la destrucción de partes, genera ruido, transmite fuerzas a las cimentaciones, etcétera. Con el objeto de reducir la cantidad de fuerza transmitida a la cimentación como resultado de la vibración de una máquina (aislamiento de la vibración) tanto como sea posible, las máquinas se montan usualmente sobre aisladores de vibración que consisten en resortes y amortiguadores. En for-

\*Las selecciones con asterisco tratan tópicos más desafiantes que el resto del libro. Dependiendo de los objetivos del curso, estas secciones (aunque importantes) pueden omitirse de la exposición en clase sin perder la continuidad del tema principal.



ma similar, con el objeto de reducir la cantidad de movimiento transmitido a algún instrumento delicado por el movimiento de la cimentación (aislamiento del movimiento), los instrumentos se montan sobre aisladores. En esta sección se describen la fuerza centrípeta, la fuerza centrífuga y la fuerza debida al desbalanceo en la rotación. A continuación se analizan la vibración causada por la fuerza de excitación resultante del desbalanceo, los aisladores de la vibración, la transmisibilidad y finalmente los elementos para absorber la vibración dinámica.

**Fuerza centrípeta y fuerza centrífuga.** Supóngase que la masa puntual  $m$  se está moviendo en una trayectoria circular con velocidad constante como en la Fig. 7-32(a). Las magnitudes de las velocidades de la masa  $m$  en el punto  $A$  y el punto  $B$  son las mismas pero las direcciones son diferentes. En relación con la Fig. 7-32(b), la dirección  $PQ$  se hace perpendicular a la dirección  $AP$  (dirección del vector velocidad en el punto  $A$ ) si los puntos  $A$  y  $B$  están cercanos entre sí. Esto significa que la masa puntual debe poseer una aceleración dirigida hacia el centro de rotación, punto  $O$ . Para producir esta aceleración, se requiere una fuerza de masa por aceleración. Si la aceleración es hacia el centro, la fuerza de reacción es hacia afuera y su magnitud es igual a la fuerza dirigida al centro. La fuerza que actúa hacia el centro se llama *fuerza centrípeta* y la fuerza de inercia de reacción opuesta, *fuerza centrífuga*.



**Fig. 7-32.** (a) Masa puntual moviéndose en una trayectoria circular; (b) diagrama vectorial de velocidad.

La aceleración  $a$  que actúa hacia el centro de rotación se obtiene como sigue. Observando que los triángulos  $OAB$  y  $APQ$  son semejantes, tenemos

$$\frac{|\Delta v|}{|v_A|} = \frac{r \Delta \theta}{r}$$

donde  $|\Delta v|$  y  $|v_A|$  representan las magnitudes de la velocidad  $\Delta v$  y la velocidad  $v_A$ , respectivamente. Observando que  $|v_A| = \omega r$  y  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta\theta/\Delta t)$ , vemos que

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|v_A| r \Delta\theta}{r \Delta t} = \omega^2 r$$

Esta aceleración actúa hacia el centro de rotación, y la fuerza centrípeta es  $m\omega^2 r$ . La fuerza centrífuga es la fuerza de reacción y es hacia afuera. Su magnitud es también  $m\omega^2 r$ .

**Ejemplo 7-9.** Un muchacho da vueltas, en un arco circular, a una piedra de 0.01 kg de masa sujeta al extremo de un cable de 1 m. Supóngase que la velocidad del movimiento circular de la piedra es de 2 m/s. ¿Cuál es la tensión  $T$  en el cable?

$$T = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r} = 0.01 \frac{2^2}{1} = 0.04 \text{ N}$$

**Vibración debida al desbalanceo en la rotación.** Las fuerzas de entrada que excitan el movimiento vibratorio se originan a menudo por el desbalanceo en la rotación. Tal desbalanceo en la rotación existe si el centro de masa del cuerpo rígido rotatorio y el centro de rotación no coinciden. La figura 7-33 muestra una máquina desbalanceada en reposo sobre un montaje anti-choques. Supóngase que el rotor está girando a una velocidad constante de  $\omega$  rad/s y que la masa desbalanceada  $m$  está localizada a una distancia  $r$  del centro de rotación. La masa desbalanceada producirá una fuerza centrífuga de magnitud  $m\omega^2 r$ .

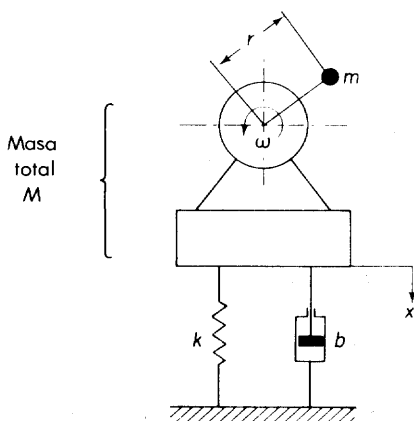


Fig. 7-33. Máquina desbalanceada soportada por un montaje antichoque.

En el presente análisis, limitamos el movimiento a la dirección vertical solamente, aun cuando el desbalanceo en la rotación produzca la compo-

nente horizontal de la fuerza. La componente vertical de esta fuerza,  $m\omega^2 r \sin \omega t$ , actúa sobre los cojinetes y es transmitida a la cimentación, causando de ese modo que la máquina vibre excesivamente. [Nótese que, por conveniencia, el origen del tiempo ( $t = 0$ ) se escogió arbitrario, de modo que la fuerza de desbalanceo aplicada al sistema sea  $m\omega^2 r \sin \omega t$ .]

Supongamos que la masa total del sistema es  $M$ , la cual incluye la masa desbalanceada  $m$ . Aquí consideramos solamente el movimiento vertical y medimos el desplazamiento vertical  $x$  desde la posición de equilibrio en ausencia de la fuerza de excitación. Entonces, la ecuación de movimiento del sistema se hace

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = p(t) \quad (7-35)$$

donde  $p(t)$  es la fuerza aplicada al sistema y está dada por

$$p(t) = m\omega^2 r \sin \omega t$$

Al tomar la transformada de Laplace de ambos lados de la Ec. (7-35), suponiendo cero las condiciones iniciales, tenemos

$$(Ms^2 + bs + k)X(s) = P(s)$$

o bien

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

La función de transferencia senoidal es

$$\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} = G(j\omega) = \frac{1}{-M\omega^2 + bj\omega + k}$$

Para la función de excitación senoidal  $p(t)$ , la salida en estado permanente se obtiene de la Ec. (7-33) como

$$\begin{aligned} x(t) &= X \sin(\omega t + \phi) \\ &= |G(j\omega)| m\omega^2 r \sin\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{b\omega}{k - M\omega^2}\right) \\ &= \frac{m\omega^2 r}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{b\omega}{k - M\omega^2}\right) \end{aligned}$$

En esta última ecuación, si dividimos el numerador y el denominador de la amplitud y los correspondientes al ángulo de fase por  $k$  y sustituimos  $k/M = \omega_n^2$  y  $b/M = 2\zeta\omega_n$  en el resultado, la salida en estado permanente es

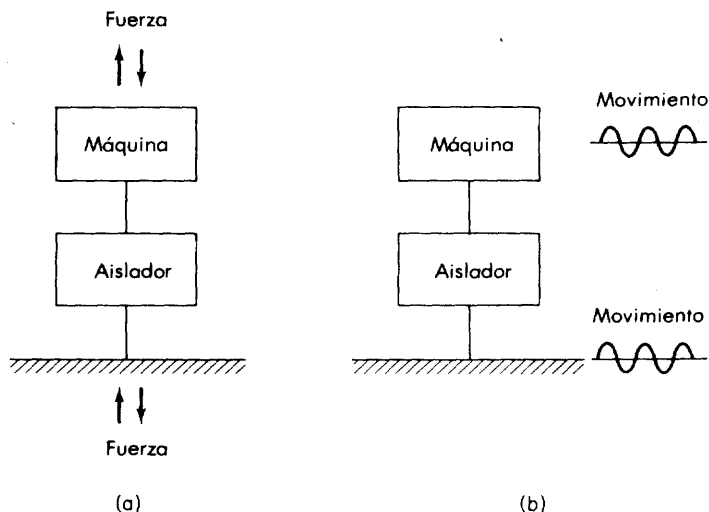
$$x(t) = \frac{m\omega^2 r/k}{\sqrt{[1 - (\omega^2/\omega_n^2)]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \sin\left[\omega t - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega^2/\omega_n^2)}\right]$$

De esta expresión vemos que la amplitud de la salida en estado permanente se hace grande cuando el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  es pequeño y que la frecuencia de excitación  $\omega$  está próxima a la frecuencia natural  $\omega_n$ .

**Aisladores de vibración.** El aislamiento de la vibración es un proceso mediante el cual los efectos de la vibración se hacen mínimos o se eliminan. La función de un aislador de vibración consiste en reducir la magnitud de la fuerza transmitida de la máquina a su cimentación o reducir la magnitud del movimiento transmitido de una cimentación vibratoria a la máquina.

El concepto se ilustra en la Fig. 7-34(a) y (b). Aquí el sistema consta de un cuerpo rígido que representa a una máquina conectada a una cimentación mediante un aislador que consta de un resorte y un amortiguador. La figura 7-34(a) ilustra el caso en el cual la fuente de vibración es una fuerza vibratoria originada dentro de la máquina (excitación por fuerza). El aislador reduce la fuerza transmitida a la cimentación. En la Fig. 7-34(b) la fuente de vibración es un movimiento vibratorio de la cimentación (excitación por movimiento). El aislador reduce la amplitud de la vibración de la máquina.

El aislador consiste esencialmente en un medio elástico de soporte de la carga (tal como un resorte) y un medio disipador de energía (tal como un amortiguador). En la Fig. 7-35 aparece un aislador de vibración típico. (En un aislador de vibración simple, un solo elemento como hule sintético puede realizar las funciones tanto del medio de soporte de la carga como del medio disipador de energía.) En el presente análisis se supone que la máquina y la cimentación son rígidas y el aislador se supone sin masa.



**Fig. 7-34.** Aislador de vibración; (a) por fuerza de excitación; (b) por movimiento de excitación.

**Transmisibilidad.** La transmisibilidad es una medida de la reducción de la fuerza transmitida o del movimiento producido por un aislador. Si la

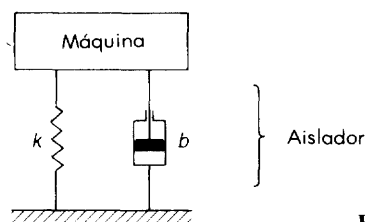


Fig. 7-35. Aislador de vibración.

fuente de vibración es una fuerza vibratoria debida al desbalanceo de la máquina (excitación por fuerza), la transmisibilidad es la relación de la amplitud de la fuerza transmitida a la cimentación con respecto a la amplitud de la fuerza de excitación. Si la fuente de vibración es un movimiento vibratorio de la cimentación (excitación por movimiento), la transmisibilidad es la relación entre la amplitud de la vibración de la máquina y la amplitud de la vibración de la cimentación.

**Transmisibilidad por la fuerza de excitación.** En el sistema mostrado en la Fig. 7-33, la fuente de vibración es una fuerza vibratoria resultante del desbalanceo de la máquina. La transmisibilidad en este caso es la relación de amplitudes de las fuerzas y está dado por

$$\text{Transmisibilidad} = TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{\text{amplitud de la fuerza transmitida}}{\text{amplitud de la fuerza de excitación}}$$

Encontremos la transmisibilidad de este sistema en términos del factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  y de la relación de frecuencia  $\beta = \omega/\omega_n$ .

La fuerza de excitación (en la dirección vertical) se origina por la masa desbalanceada de la máquina y es

$$p(t) = m\omega^2 r \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$$

La ecuación de movimiento del sistema está dada por la Ec. (7-35), reescrita así:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = p(t) \quad (7-36)$$

La fuerza transmitida a la cimentación es la suma de las fuerzas del amortiguador y el resorte o

$$f(t) = b\dot{x} + kx = F_t \sin(\omega t + \phi) \quad (7-37)$$

Tomando la transformada de Laplace de las Ecs. (7-36) y (7-37), suponiendo las condiciones iniciales cero, dan

$$(Ms^2 + bs + k)X(s) = P(s)$$

$$(bs + k)X(s) = F(s)$$

donde  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ ,  $P(s) = \mathcal{L}[p(t)]$ , y  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ . Por lo tanto,

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

$$\frac{F(s)}{X(s)} = bs + k$$

La eliminación de  $X(s)$  de estas dos últimas ecuaciones da

$$\frac{F(s)}{P(s)} = \frac{F(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{bs + k}{Ms^2 + bs + k}$$

La función de transferencia senoidal  $F(j\omega)/P(j\omega)$  es

$$\frac{F(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{bj\omega + k}{-M\omega^2 + bj\omega + k} = \frac{(b/M)j\omega + (k/M)}{-\omega^2 + (b/M)j\omega + (k/M)}$$

Al sustituir  $k/M = \omega_n^2$  y  $b/M = 2\zeta\omega_n$  en esta última ecuación y simplificando, tenemos

$$\frac{F(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{1 + j(2\zeta\omega/\omega_n)}{1 - (\omega^2/\omega_n^2) + j(2\zeta\omega/\omega_n)}$$

de la cual

$$\left| \frac{F(j\omega)}{P(j\omega)} \right| = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}{\sqrt{[1 - (\omega^2/\omega_n^2)]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

donde  $\beta = \omega/\omega_n$ .

Observando que la amplitud de la fuerza de excitación es  $F_0 = |P(j\omega)|$  y que la amplitud de la fuerza transmitida es  $F_t = \|F(j\omega)\|$ , obtenemos la transmisibilidad como sigue

$$TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{|F(j\omega)|}{|P(j\omega)|} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad (7-38)$$

De la Ec. (7-38) encontramos que la transmisibilidad depende por igual de  $\beta$  y  $\zeta$ . Sin embargo, es importante señalar, que cuando  $\beta = \sqrt{2}$ , la transmisibilidad es igual a la unidad independientemente del valor del factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$ .

La figura 7-36 muestra las curvas de transmisibilidad versus  $\beta$  (donde  $\beta = \omega/\omega_n$ ). Vemos que todas las curvas pasan a través de un punto crítico, un punto donde  $TR = 1$ ,  $\beta = \sqrt{2}$ . Para  $\beta < \sqrt{2}$ , cuando el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  se incrementa, la transmisibilidad en la resonancia decrece. Para  $\beta > \sqrt{2}$ , cuando el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  se incrementa, la transmisibilidad. Por lo tanto, para  $\beta \leq \sqrt{2}$ , u  $\omega < \sqrt{2}\omega_n$  (la frecuencia de excitación  $\omega$  es menor que  $\sqrt{2}$  veces la frecuencia de amortiguada  $\omega_n$ ), el incremento en el amortiguamiento mejora el aislamiento de la vibración. Para  $\beta > \sqrt{2}$  u  $\omega > \sqrt{2}\omega_n$ , el incremento en el amortiguamiento afecta contrariamente al aislamiento de la vibración.

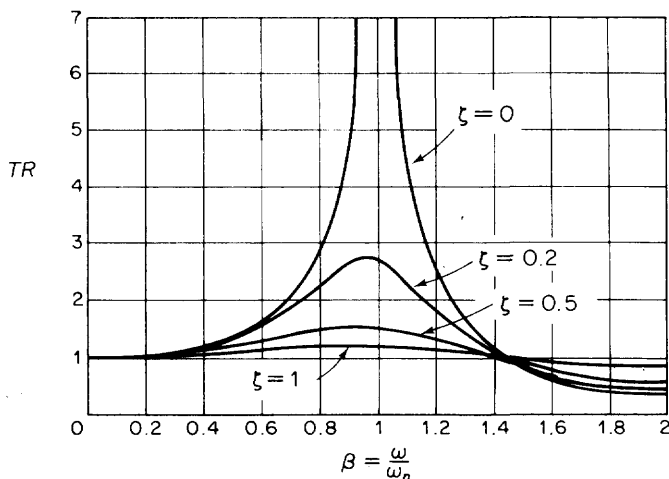


Fig. 7-36. Curvas de transmisibilidad TR contra  $\beta (= \omega/\omega_n)$ .

Nótese que  $|P(j\omega)| = F_0 = m\omega^2 r$ , la amplitud de la fuerza transmitida a la cimentación es

$$F_t = |F(j\omega)| = \frac{m\omega^2 r \sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad (7-39)$$

**Ejemplo 7-10.** En el sistema mostrado en la Fig. 7-33, si los valores numéricos de  $M$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $r$  y  $\omega$  se dan como  $M = 15$  kg,  $b = 450$  N-s/m,  $k = 6000$  N/m,  $m = 0.005$  kg,  $r = 0.2$  m y  $\omega = 16$  rad/s, ¿cuál es la fuerza transmitida a la cimentación?

La ecuación de movimiento del sistema es

$$15\ddot{x} + 450\dot{x} + 6000x = (0.005)(16)^2(0.2) \sin 16t$$

En consecuencia,

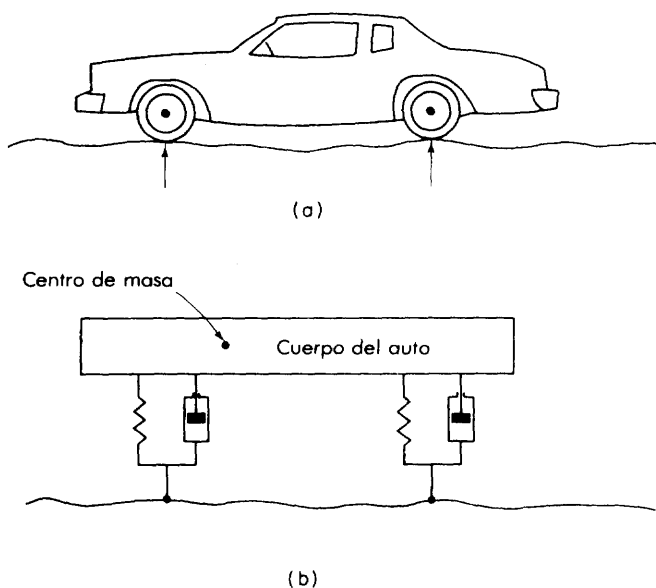
$$\omega_n = 20 \text{ rad/s}, \quad \zeta = 0.75$$

y encontramos  $\beta = \omega/\omega_n = 16/20 = 0.8$ . En relación con la Ec. (7-39), tenemos

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{m\omega^2 r \sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \\ &= \frac{(0.005)(16)^2(0.2)\sqrt{1 + (2 \times 0.75 \times 0.8)^2}}{\sqrt{(1 - 0.8^2)^2 + (2 \times 0.75 \times 0.8)^2}} = 0.319 \text{ N} \end{aligned}$$

La fuerza transmitida a la cimentación es senoidal y tiene amplitud de 0.319 N.

**Sistema de suspensión de automóvil.** La figura 7-37(a) muestra un sistema de automóvil. A medida que el carro se mueve a lo largo de la carretera, el desplazamiento vertical de las llantas actúa como excitación por movimiento al sistema de suspensión del automóvil. La figura 7-37(b) es un diagrama esquemático de un sistema de suspensión de automóvil. El movimiento de este sistema consiste en un movimiento traslacional del centro de masa y un movimiento rotacional alrededor del centro de masa. Un análisis completo de este sistema de suspensión podría ser bastante complicado. Una versión muy simplificada aparece en la Fig. 7-38. En las páginas siguientes analizaremos este modelo simple cuando la entrada del movimiento es senoidal y así obtendremos la transmisibilidad del sistema de excitación por movimiento.



**Fig. 7-37.** (a) Sistema de automóvil; (b) diagrama esquemático de un sistema de suspensión de automóvil.

**Transmisibilidad por movimiento de excitación.** En el sistema mostrado en la Fig. 7-39, el movimiento del cuerpo está sólo en la dirección vertical. El movimiento  $y$  en el punto  $P$  es la entrada al sistema; el movimiento vertical  $x$  del cuerpo es la salida. El desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio en ausencia de la entrada  $y$ . Suponemos que el movimiento  $y$  es senoidal, o  $y = Y \sin \omega t$ . (La figura 7-39 puede considerarse como una representación simplificada de un vehículo de masa  $m$  moviéndose sobre una carretera áspera con una suspensión de resorte y amortiguador entre la masa y la rueda.)



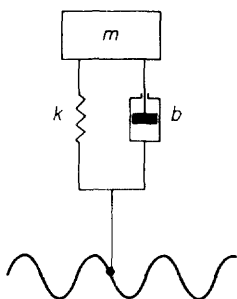


Fig. 7-38. Versión simplificada de un sistema de suspensión de automóvil.

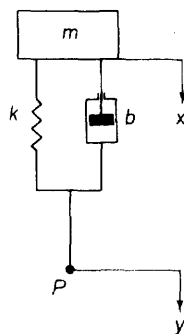


Fig. 7-39. Sistema mecánico.

La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

o bien

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{y} + ky$$

Entonces, la transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo condiciones iniciales, cero, da

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = (bs + k)Y(s)$$

Por lo tanto,

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

La función de transferencia senoidal es

$$\frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{bj\omega + k}{-m\omega^2 + bj\omega + k}$$

La salida  $x(t)$  en estado permanente tiene la amplitud  $|X(j\omega)|$ . La amplitud de la entrada es  $|Y(j\omega)|$ . La transmisibilidad en este caso es la relación de la amplitud de los desplazamientos y está dada por

$$\text{Transmisibilidad} = \text{TR} = \frac{\text{amplitud del desplazamiento de la salida}}{\text{amplitud del desplazamiento de la entrada}}$$

Así,

$$\text{TR} = \frac{|X(j\omega)|}{|Y(j\omega)|} = \frac{\sqrt{b^2\omega^2 + k^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

Observando que  $k/m = \omega_n^2$  y  $b/n = 2\zeta\omega_n$ , la transmisibilidad está dada, en términos del factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  y de la frecuencia natural

no amortiguada  $\omega_n$ , por

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad (7-40)$$

donde  $\beta = \omega/\omega_n$ . Esta ecuación es idéntica a la Ec. (7-38).

**Ejemplo 7-11.** Un cuerpo rígido está montado sobre un aislador con el objeto de reducir el efecto vibratorio. Supóngase que la masa del cuerpo rígido es de 500 kg, el factor de amortiguamiento relativo del aislador es muy pequeño ( $\zeta = 0.01$ ), y la constante efectiva del resorte del aislador es de 12 500 N/m. Encuéntrese el porcentaje de movimiento transmitido al cuerpo si la frecuencia del movimiento de excitación de la base del aislador es de 20 rad/s.

El amortiguamiento relativo de la frecuencia natural  $\omega_n$  del sistema es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{12\,500}{500}} = 5 \text{ rad/s}$$

Y así,

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{20}{5} = 4$$

Al sustituir  $\zeta = 0.01$  y  $\beta = 4$  en la Ec. (7-40), tenemos

$$TR = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0.01 \times 4)^2}}{\sqrt{(1 - 4^2)^2 + (2 \times 0.01 \times 4)^2}} = 0.0669$$

El efecto del aislador consiste en reducir el movimiento vibratorio del cuerpo rígido a 6.69% del movimiento vibratorio de la base del aislador.

**Sismógrafo.** La figura 7-40 es un diagrama esquemático de un *sismógrafo*, dispositivo usado para medir el desplazamiento de la Tierra durante los temblores. El desplazamiento de la masa  $m$  relativo al espacio inercial se denota mediante  $x$  y el desplazamiento de la caja relativo al espacio inercial mediante  $y$ . El desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio cuando  $y = 0$ . El desplazamiento  $y$  es la entrada al sistema. Este desplazamiento, en el caso de los temblores, es aproximadamente senoidal,  $y(t) = Y \sin \omega t$ . En el sismógrafo medimos el desplazamiento relativo entre  $x$  y  $y$ .

La ecuación de movimiento del sismógrafo es

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (7-41)$$

Definamos el desplazamiento de la masa  $m$  relativo a la caja, como  $z$ , esto es,

$$z = x - y$$

En términos del desplazamiento relativo  $z$ , la Ec. (7-41) se hace

$$m(\ddot{y} + \ddot{z}) + b\dot{z} + kz = 0$$

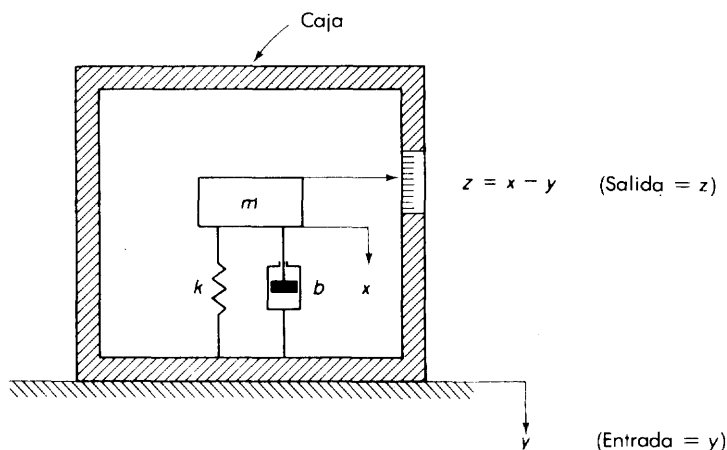


Fig. 7-40. Sismógrafo.

o bien

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

Al tomar la transformada de Laplace de esta última ecuación y suponiendo condiciones iniciales cero, encontramos que

$$(ms^2 + bs + k)Z(s) = -ms^2 Y(s)$$

Nótese que la entrada al sistema es el desplazamiento  $y$  y que la salida es el desplazamiento relativo  $z$ . La función de transferencia entre  $Z(s)$  y  $Y(s)$  es

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{-ms^2}{ms^2 + bs + k}$$

La función de transferencia senoidal es

$$\frac{Z(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{-m\omega^2}{-m\omega^2 + bj\omega + k}$$

La sustitución de  $k/m = \omega_n^2$  y  $b/m = 2\zeta\omega_n$  en esta última ecuación da

$$\frac{Z(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2 + j2\zeta\beta} \quad (7-42)$$

donde  $\beta = \omega/\omega_n$ .

En el sismógrafo queremos determinar exactamente el desplazamiento de entrada  $y(t)$  midiendo el desplazamiento relativo  $z(t)$ . Al examinar la Ec. (7-42), lo podemos hacer fácilmente si  $\beta \gg 1$ . Si  $\beta \gg 1$ , la Ec. (7-42) se reduce a

$$\frac{Z(j\omega)}{Y(j\omega)} \doteq -\frac{\beta^2}{\beta^2} = -1$$

El sismógrafo mide y registra el desplazamiento de su caja y exactamente si  $\beta \gg 1$  u  $\omega \gg \omega_n$ . De hecho, para  $\omega \gg \omega_n$ , la masa  $m$  tiende a permanecer fija en el espacio, y el movimiento de la caja puede verse entre la masa y la caja.

Para cumplir la condición  $\omega \gg \omega_n$ , escogemos la frecuencia natural no amortiguada tan baja como sea posible (escójase una masa relativamente grande y un resorte tan suave como lo permitan los límites de las deflexiones elástica y estática). Por tanto, el sismógrafo medirá y registrará el desplazamiento de todas las frecuencias correctamente sobre la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ , la cual es muy baja.

**Acelerómetro.** En la figura 7-41 se da un diagrama esquemático de un *acelerómetro* traslacional. La configuración del sistema es básicamente la misma del sismógrafo, pero su diferencia esencial estriba en la selección de la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . Denotemos el desplazamiento de la masa  $m$  relativo al espacio inercial mediante  $x$  y el de la caja relativo al espacio inercial mediante  $y$ . El desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio cuando  $y = 0$ . La entrada al acelerómetro traslacional es la aceleración  $\ddot{y}$ . La salida es el desplazamiento de la masa  $m$  relativo a la caja, o  $z = x - y$ . (Medimos y registramos el desplazamiento relativo  $z$ , no el desplazamiento absoluto  $x$ .)

La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

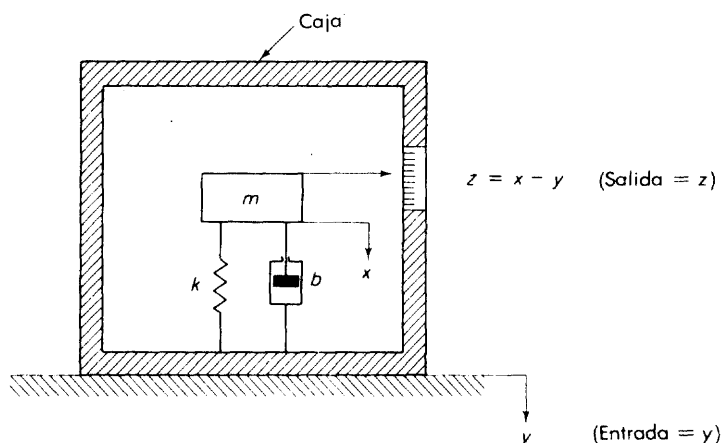


Fig. 7-41. Acelerómetro traslacional.

En términos del desplazamiento relativo  $z$ , esta última ecuación se hace

$$m(\ddot{y} + \ddot{z}) + b\dot{z} + kz = 0$$

o bien

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo condiciones iniciales cero, da

$$(ms^2 + bs + k)Z(s) = -ms^2 Y(s)$$

La función de transferencia entre la salida  $Z(s)$  y la entrada  $s^2 Y(s)$  [la entrada es la aceleración  $\ddot{y}$  y su transformada de Laplace es  $s^2 Y(s)$ ] es

$$\frac{Z(s)}{s^2 Y(s)} = \frac{-m}{ms^2 + bs + k} = \frac{-1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7-43)$$

De la Ec. (7-43) vemos que si la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es suficientemente grande comparada con las frecuencias de la entrada, entonces

$$\frac{Z(s)}{s^2 Y(s)} \approx -\frac{1}{\omega_n^2}$$

Así el desplazamiento  $z$  es aproximadamente proporcional a  $\ddot{y}$ .

**Absorción de vibraciones dinámicas.** En muchas ocasiones, las máquinas rotatorias (como las turbinas y compresores) causan vibraciones y transmiten grandes fuerzas vibratorias a la cimentación. Las fuerzas vibratorias pueden causarse por una masa desbalanceada del rotor. Si la frecuencia de excitación  $\omega$  es igual o aproximadamente igual a la frecuencia natural no amortiguada de la máquina rotatoria sobre sus soportes, entonces ocurre la resonancia y se transmiten grandes fuerzas a la cimentación.

Si la máquina opera a una velocidad aproximadamente constante, se le puede instalar un dispositivo llamado *absorbedor de vibraciones dinámicas* para eliminar la gran fuerza transmitida. Este dispositivo usualmente tiene la forma de un sistema masa-resorte sintonizado para tener una frecuencia natural igual a la frecuencia de operación  $\omega$ . Cuando se agrega a un sistema vibratorio de un grado de libertad, el sistema entero viene a ser un sistema de dos grados de libertad con dos frecuencias naturales. Para reducir o casi eliminar la fuerza transmitida, una de las frecuencias naturales se fija por arriba de la frecuencia de operación, en tanto que la otra se fija por abajo de aquella.

Nuestra exposición aquí se centra en un absorbedor de vibración dinámica simple que reducirá la fuerza vertical transmitida a la cimentación. Nótese que sólo se tratan movimientos verticales.

**Reducción de vibraciones mediante el uso del absorbedor de vibración dinámica.** Una máquina rotatoria, debido a una masa desbalanceada del rotor, transmite una gran fuerza vibratoria a la cimentación. Supongamos que la máquina está soportada mediante un resorte y un amortiguador como se muestra en la Fig. 7-42(a). El rotor desbalanceado está representado por

la masa  $M$ , la cual incluye la masa desbalanceada y está girando a una frecuencia  $\omega$ . La fuerza de excitación es  $p(t) = P \sin \omega t$ , donde  $P = m\omega^2 r$ . (Aquí  $m$  es la masa desbalanceada y  $r$  es la distancia de la masa desbalanceada al centro de rotación.) A causa de esta excitación por fuerza, una fuerza senoidal de amplitud

$$\frac{m\omega^2 r \sqrt{k^2 + b^2\omega^2}}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

se transmite a la cimentación. Para obtener esta amplitud, sustitúyase  $\beta = \omega/\omega_n = \omega/\sqrt{k/M}$  y  $\zeta = b/(2\sqrt{kM})$  en la Ec. (7-39).

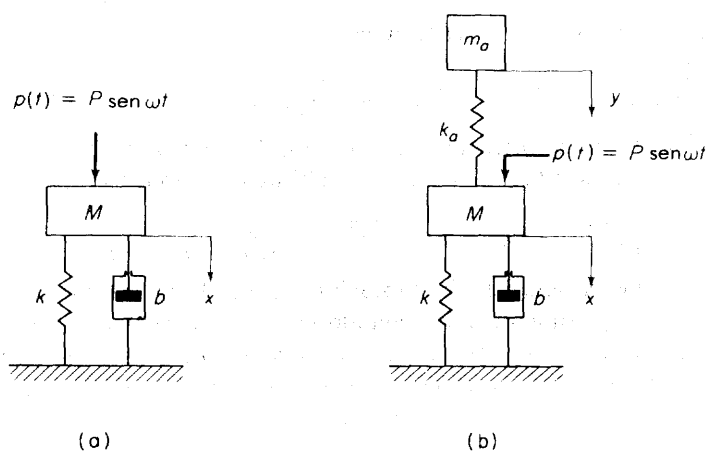


Fig. 7-42. (a) Máquina soportada por un resorte y un amortiguador; (b) máquina con un absorbedor de vibración dinámica.

Si el coeficiente de amortiguamiento viscoso  $b$  es pequeño y la frecuencia natural  $\sqrt{k/M}$  del sistema es igual a la frecuencia de excitación, entonces ocurre la resonancia y la máquina se somete a una vibración excesiva y la fuerza transmitida llega a ser extremadamente grande.

En el análisis siguiente, suponemos que  $b$  es muy pequeño y que la frecuencia natural  $\sqrt{k/M}$  está muy próxima a la frecuencia de excitación  $\omega$ . En tal caso, con el objeto de reducir la fuerza transmitida, debe agregarse a la máquina un absorbedor de vibración dinámica consistente en una masa ( $m_a$ ) y un resorte ( $k_a$ ) como se muestra en la Fig. 7-42(a).

Las ecuaciones de movimiento del sistema de la Fig. 7-42(b) son

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k_a(x - y) = p(t) = P \sin \omega t$$

$$m_a\ddot{y} + k_a(y - x) = 0$$

donde  $x$  y  $y$ , los desplazamientos de la masa  $M$  y de la masa  $m_a$ , respectivamente, se miden desde la posición de equilibrio en ausencia de la fuerza de

excitación  $p(t)$ . Al tomar la transformada de Laplace de las dos últimas ecuaciones, suponiendo las condiciones iniciales cero, vemos que

$$(Ms^2 + bs + k + k_a)X(s) - k_a Y(s) = P(s)$$

$$(m_a s^2 + k_a)Y(s) - k_a X(s) = 0$$

La eliminación de  $Y(s)$  de estas dos ecuaciones resulta en

$$\left(Ms^2 + bs + k + k_a - \frac{k_a^2}{m_a s^2 + k_a}\right)X(s) = P(s)$$

Se sigue que

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{m_a s^2 + k_a}{(Ms^2 + bs + k + k_a)(m_a s^2 + k_a) - k_a^2}$$

La función de transferencia senoidal es

$$\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{-m_a \omega^2 + k_a}{(-M\omega^2 + bj\omega + k + k_a)(-m_a \omega^2 + k_a) - k_a^2}$$

Si el coeficiente de amortiguamiento viscoso  $b$  es despreciable por su pequeñez, podemos sustituir  $b = 0$  en esta última ecuación. Entonces,

$$\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} \doteq \frac{-m_a \omega^2 + k_a}{(-M\omega^2 + k + k_a)(-m_a \omega^2 + k_a) - k_a^2}$$

[Nótese que en el sistema real las vibraciones libres finalmente desaparecen debido al amortiguamiento (aun cuando éste sea despreciable por su pequeñez) y la vibración forzada en estado permanente puede representarse por esta última ecuación.] La fuerza transmitida  $f(t)$  a la cimentación es

$$f(t) = kx + b\dot{x} \doteq kx$$

Además, la amplitud de esta fuerza transmitida es  $k |X(j\omega)|$ , donde  $|X(j\omega)|$  está dada [nótese que  $|P(j\omega)| = P = m\omega^2 r$ ] como

$$\begin{aligned} |X(j\omega)| &= \left| \frac{(k_a - m_a \omega^2)}{(k + k_a - M\omega^2)(k_a - m_a \omega^2) - k_a^2} \right| |P(j\omega)| \\ &= \left| \frac{m\omega^2 r (k_a - m_a \omega^2)}{(k + k_a - M\omega^2)(k_a - m_a \omega^2) - k_a^2} \right| \end{aligned} \quad (7-44)$$

Al examinar la Ec. (7-44), adviértase que si  $m_a$  y  $k_a$  están dadas de modo que

$$k_a - m_a \omega^2 = 0$$

o  $k_a/m_a = \omega^2$ , entonces  $|X(j\omega)| = 0$  y la fuerza transmitida a la cimentación es cero. De modo que si la frecuencia natural  $\sqrt{k_a/m_a}$  del absorbedor de vibración dinámica se hace igual a la frecuencia de excitación  $\omega$ , es posible eliminar la fuerza transmitida a la cimentación. En general, tal absorbedor de vibración dinámica se usa solamente cuando la frecuencia natural  $\sqrt{k/M}$  del sistema original está muy próxima a la frecuencia de excitación  $\omega$ . (Sin este dispositivo, el sistema puede estar próximo a la resonancia.)

Físicamente, el efecto del absorbedor de vibración dinámica consiste en producir la fuerza de resorte  $k_a y$  tal que ésta cancele la fuerza de excitación  $p(t)$ . Para ver este punto, nótese primero que si el coeficiente de amortiguamiento viscoso  $b$  es despreciable por su pequeñez, entonces

$$\begin{aligned}\frac{Y(j\omega)}{P(j\omega)} &= \frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \\ &= \frac{k_a}{(-M\omega^2 + k + k_a)(-m_a\omega^2 + k_a) - k_a^2}\end{aligned}$$

Si  $m_a$  y  $k_a$  se escogen de modo que  $k_a = m_a\omega^2$ , encontramos

$$\frac{Y(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{k_a}{-k_a^2} = -\frac{1}{k_a}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}y(t) &= \left| -\frac{1}{k_a} \right| P \sin \left( \omega t + \left| -\frac{1}{k_a} \right| \right) \\ &= \frac{P}{k_a} \sin (\omega t - 180^\circ) \\ &= -\frac{P}{k_a} \sin \omega t\end{aligned}$$

Esto significa que el resorte  $k_a$  da una fuerza  $k_a y = -P \sin \omega t$  a la masa  $M$ . La magnitud de esta fuerza es igual a la fuerza de excitación, y el ángulo de fase se atrasa  $180^\circ$  de la fuerza de excitación (la masa  $m_a$  vibra en oposición de fase a la fuerza de excitación) con el resultado de que la fuerza del resorte  $k_a y$  y la fuerza de excitación  $p(t)$  se cancelan mutuamente y la masa  $M$  permanece estacionaria.

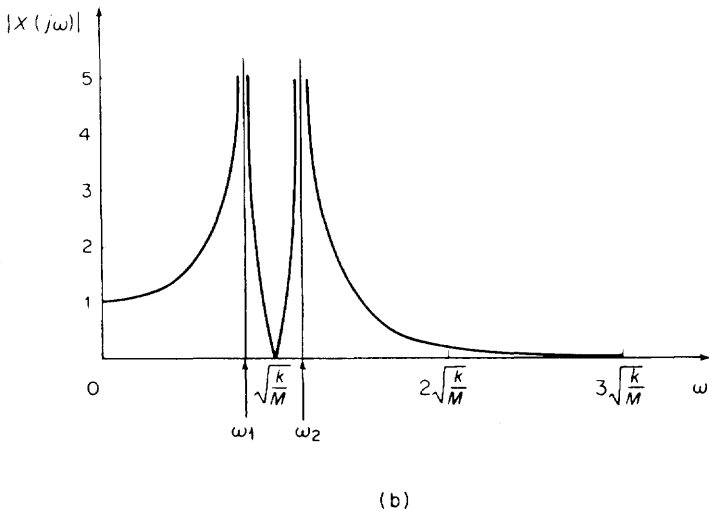
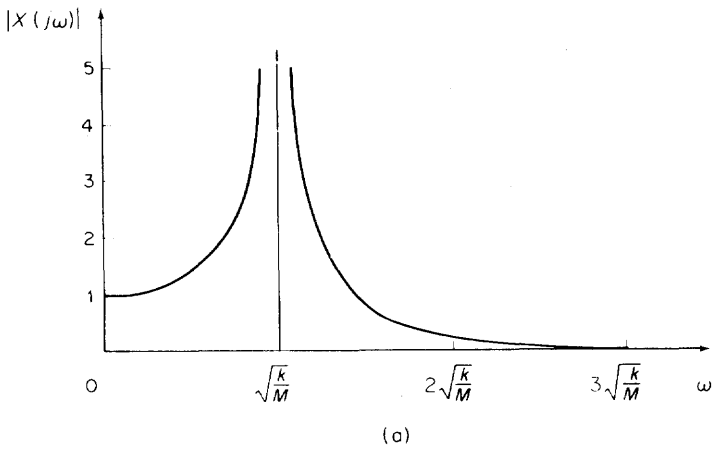
Hemos mostrado que la adición de un absorbedor de vibración dinámica reducirá la vibración de la máquina y la fuerza transmitida a la cimentación a cero cuando la máquina esté excitada por la masa desbalanceada (u otras causas) a la frecuencia  $\omega$ . Puede mostrarse también que habrá ahora dos frecuencias en las cuales la masa  $M$  estará en resonancia. Estas dos frecuencias son las frecuencias naturales de este sistema de dos grados de libertad y pueden encontrarse de la ecuación

$$(k + k_a - M\omega_i^2)(k_a - m_a\omega_i^2) - k_a^2 = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Los dos valores de la frecuencia,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , que satisfacen esta última ecuación son las frecuencias naturales del sistema con un absorbedor de vibración dinámica. La figura 7-43(a) y (b) muestra curvas de la amplitud  $X(j\omega)$  contra frecuencia  $\omega$  para los sistemas mostrados en la Fig. 7-42(a) y (b), respectivamente, cuando  $b$  es despreciable por su pequeñez.

Nótese que la adición del amortiguamiento viscoso en paralelo con el resorte del amortiguador  $k_a$  alivia las vibraciones excesivas de estas dos frecuencias naturales. Esto es, las amplitudes muy grandes de estas dos frecuencias de resonancia pueden reducirse a valores más pequeños.





**Fig. 7-43.** (a) Curva de amplitud contra frecuencia del sistema mostrado en la Fig. 7-42(a); (b) curva de amplitud contra frecuencia del sistema mostrado en la Fig. 7-476(b).

## 7-7 COMPUTADORAS ANALÓGICAS

Los sistemas dinámicos prácticos pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales de orden superior. La solución de tales ecuaciones generalmente es un proceso que consume mucho tiempo. La computadora analógica resulta muy útil para resolver ecuaciones diferenciales ya que ahorra

tiempo, particularmente cuando se necesitan valores diferentes de cada uno de los parámetros.

Otro rasgo característico de la computadora analógica es que puede usarse como simulador. De hecho, la simulación de los sistemas físicos es una aplicación importante de este tipo de computadora. Puede usarse para simular una componente, varias componentes, o aun un sistema entero. Como simulador en tiempo real, la computadora se alambra para simular una o varias componentes de un sistema que aún no se ha construido. Al utilizar los traductores adecuados, la computadora analógica se conecta al resto del sistema real ya que esté construido. El sistema compuesto puede probarse entonces como una unidad y puede evaluarse el funcionamiento del sistema, procedimiento que se usa ampliamente en la industria. En particular, la computadora analógica ha resultado muy útil para determinar los efectos de las variaciones de parámetros en el funcionamiento de sistemas.

Exponemos aquí el principio de operación de computadoras analógicas electrónicas y las técnicas de construir diagramas de computadora para resolver ecuaciones diferenciales y simular sistemas físicos. Sólo se consideran sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo.

**Amplificadores operacionales.** Los amplificadores operacionales, como se usan en las computadoras analógicas, son capaces de realizar las funciones matemáticas de integración, suma e inversión de signo. Un amplificador operacional es un amplificador de cd y tiene una ganancia muy alta, aproximadamente de  $10^6$  a  $10^8$ . La corriente alimentada a la entrada de un amplificador operacional es despreciable por su pequeñez. El voltaje de salida de un amplificador operacional está limitado usualmente a  $\pm 100$  V. (En computadoras de pequeña escala está limitado a  $\pm 10$  V.) La figura 7-44 es un diagrama esquemático de un amplificador operacional. El voltaje de salida  $e_o$  y el voltaje de entrada  $e$  están relacionados por

$$e_o = -Ke$$

donde  $K = 10^6$  a  $10^8$

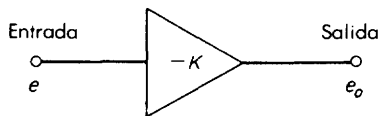


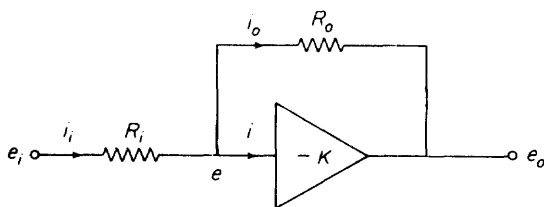
Fig. 7-44. Diagrama esquemático de un amplificador operacional.

**Inversiones de signo.** La figura 7-45(a) es un diagrama esquemático de un inversor de signo. Un amplificador operacional está en serie con una resistencia de entrada  $R_i$  y está en paralelo con una resistencia de realimentación  $R_o$ . Porque la impedancia interna del amplificador es muy alta, esencialmente la corriente  $i$  es despreciable o

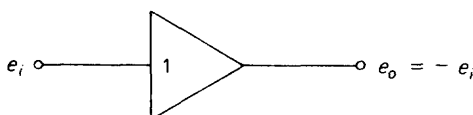
$$i \doteq 0$$

Por lo tanto, por la ley de corrientes de Kirchhoff

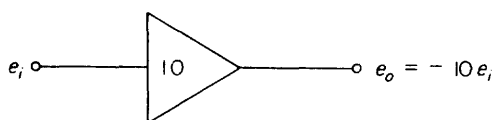
$$i_i = i_o$$



(a)



(b)



(c)

**Fig. 7-45.** (a) Diagrama esquemático de un inversor de signo; (b) símbolo del inversor de signo cuando  $R_o/R_i = 1$ ; (c) símbolo del inversor de signo cuando  $R_o/R_i = 10$ .

donde

$$i_i = \frac{e_i - e}{R_i}, \quad i_o = \frac{e - e_o}{R_o}$$

En consecuencia, tenemos

$$\frac{e_i - e}{R_i} = \frac{e - e_o}{R_o} \quad (7-45)$$

Observando que  $e_o = -Ke$ . La Ec. (7-45) puede inscribirse

$$e_i = -\left(\frac{1}{K} + \frac{R_i}{KR_o} + \frac{R_i}{R_o}\right)e_o$$

Puesto que  $K$  es un número muy grande ( $10^6$  a  $10^8$ ) y  $R_i/R_o$  es del orden de 0.1 a 10, despreciando los términos que incluyen a  $K$  en el lado derecho de esta últi-

ma ecuación, encontramos que

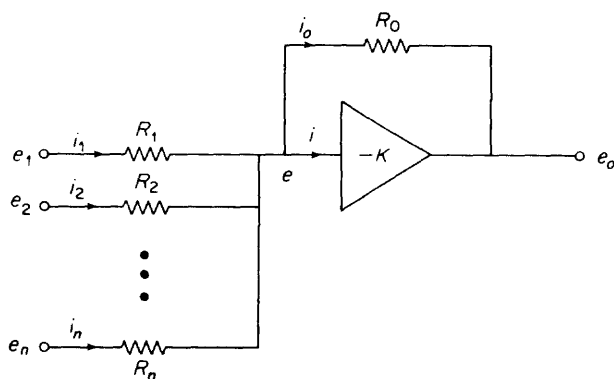
$$e_o = -\frac{R_o}{R_i} e_i \quad (7-46)$$

Nótese que la Ec. (7-46) pudo obtenerse también simplemente sustituyendo  $e = 0$  en la Ec. (7-45).

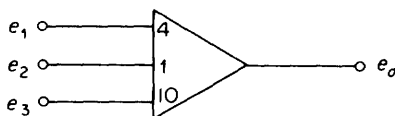
De la Ec. (7-46) vemos que el voltaje de salida  $e_o$  es igual al voltaje de entrada  $e_i$  multiplicado por una constante ( $-R_o/R_i$ ), la cual es negativa. Los valores de las resistencias  $R_i$  y  $R_o$  normalmente son 0.1 MΩ, 0.25 MΩ y 1 MΩ. Así son posibles valores diferentes de  $R_o/R_i$ . En muchas computadoras analógicas, sin embargo, los valores de  $R_o/R_i$  están fijos en 1, 4 o 10.

La figura 7-45(b) y (c) muestra los símbolos comúnmente usados para el inversor de signo con  $R_o/R_i = 1$  y  $R_o/R_i = 10$ , respectivamente.

**Sumadores.** El diagrama esquemático de un sumador que adiciona  $n$  entradas se da en la Fig. 7-46(a). En el sumador, se usan resistores como impedancias de entrada y de realimentación de un amplificador operacional. Este circuito es el mismo que el inversor de signo. De hecho, cada sumador se puede usar como el inversor de signo.



(a)



(b)

**Fig. 7-46.** (a) Diagrama esquemático de un sumador; (b) símbolo del sumador.

Observando que la corriente  $i$  es despreciable por su pequeñez ( $i \approx 0$ ),

la ecuación para este circuito se puede obtener como

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = i_o$$

o bien

$$\frac{e_1 - e}{R_1} + \frac{e_2 - e}{R_2} + \cdots + \frac{e_n - e}{R_n} = \frac{e - e_o}{R_o}$$

Al sustituir  $e = 0$  en esta última ecuación, tenemos

$$e_o = -\left(\frac{R_o}{R_1}e_1 + \frac{R_o}{R_2}e_2 + \cdots + \frac{R_o}{R_n}e_n\right) \quad (7-47)$$

Así, el circuito mostrado en la Fig. 7-46(a) realiza una adición o suma ponderada de  $n$  entradas. (Nótese que el sumador cambia el signo algebraico). Si, por ejemplo,  $R_o = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_1 = 0.25 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$ , y  $R_3 = 0.1 \text{ M}\Omega$ , entonces la Ec. (7-47) se hace

$$e_o = -(4e_1 + e_2 + 10e_3)$$

El símbolo comúnmente usado para el sumador aparece en la Fig. 7-46(b).

**Integradores.** La figura 7-47(a) es un diagrama esquemático del integrador. En este circuito se usa un resistor como impedancia de entrada y un capacitor como impedancia de realimentación.

La ecuación del circuito puede obtenerse de la siguiente forma. Observando que la corriente  $i$  es despreciable por su pequeñez, o  $i \approx 0$ , tenemos

$$i_i = i_o$$

donde

$$i_i = \frac{e_i - e}{R_i}, \quad i_o = C_o \frac{d(e - e_o)}{dt}$$

Por lo tanto,

$$\frac{e_i - e}{R_i} = C_o \frac{d(e - e_o)}{dt}$$

Sustituyendo  $e = 0$  en esta última ecuación da

$$\frac{e_i}{R_i} = -C_o \frac{de_o}{dt}$$

o bien

$$\frac{de_o}{dt} = -\frac{1}{R_i C_o} e_i$$

Integrando ambos miembros de esta última ecuación de 0 a  $t$ , encontramos

$$e_o(t) - e_o(0) = -\frac{1}{R_i C_o} \int_0^t e_i(t) dt$$

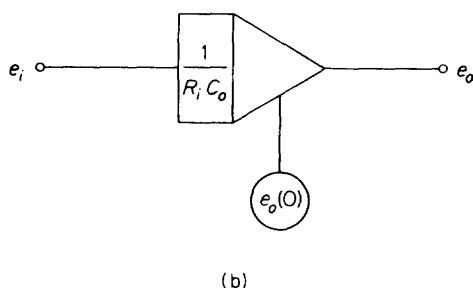
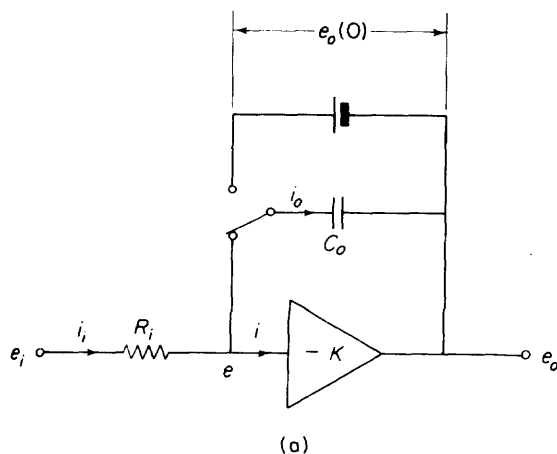


Fig. 7-47. (a) Diagrama esquemático de un integrador; (b) símbolo del integrador.

o bien

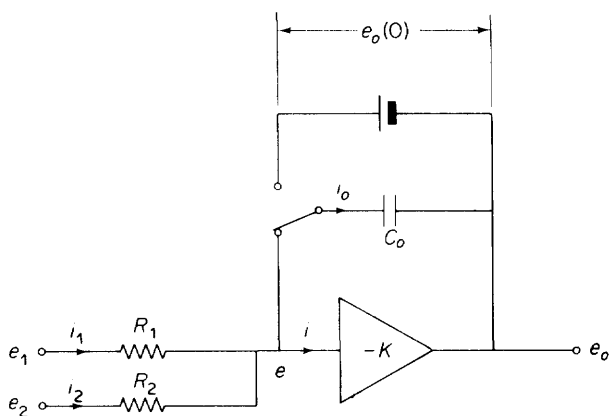
$$e_o(t) = -\frac{1}{R_i C_o} \int_0^t e_i(t) dt + e_o(0) \quad (7-48)$$

La ecuación (7-48) muestra que el circuito de la Fig. 7-47(a) es un integrador. El integrador debe estar inicialmente polarizado por un voltaje de cd con el objeto de dar la condición inicial necesaria  $e_o = 0$ .

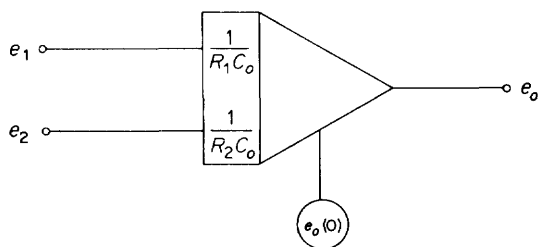
La figura 7-47(b) muestra el símbolo comúnmente usado para el integrador. La condición inicial  $e_o(0)$  se indica en el círculo. Adviértase que en muchas computadoras analógicas se usan resistores estándar de 0.1 MΩ, 0.25 MΩ, 1 MΩ y un capacitor estándar de 1 μF. En tal caso, los valores de  $1/R_i C_o$  son iguales solamente a 1, 4 o 10.

Como en la operación de suma, si se aplican dos señales de entrada al integrador como se muestra en la Fig. 7-48(a), entonces la salida  $e_o(t)$  está constituida por la suma de dos integrales y la condición inicial  $e_o(0)$ , o sea

$$e_o(t) = -\frac{1}{R_1 C_o} \int_0^t e_1(t) dt - \frac{1}{R_2 C_o} \int_0^t e_2(t) dt + e_o(0) \quad (7-49)$$



(a)



(b)

**Fig. 7-48.** (a) Diagrama esquemático de un integrador con dos entradas; (b) diagrama simplificado.

La ecuación (7-49) puede encontrarse observando que

$$i_1 + i_2 = i_o$$

donde

$$i_1 = \frac{e_1 - e}{R_1} \doteq \frac{e_1}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{e_2 - e}{R_2} \doteq \frac{e_2}{R_2}$$

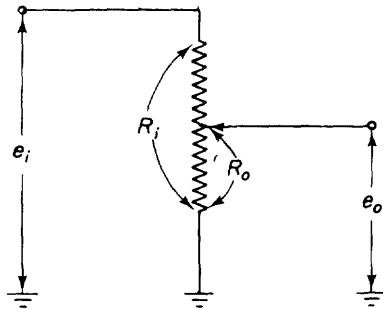
$$i_o = C_o \frac{d(e - e_o)}{dt} \doteq -C_o \frac{de_o}{dt}$$

Un diagrama simplificado de la Fig. 7-48(a) se muestra en la Fig. 7-48(b).

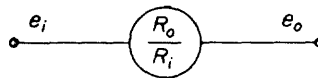
**Multiplicación por una fracción.** La multiplicación de  $e_i$  por una constante  $\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$  puede efectuarse mediante el uso de un potenciómetro [véase la Fig. 7-49(a)]. La salida  $e_o$  es

$$e_o = \frac{R_o}{R_i} e_i$$

La figura 7-49(b) ilustra el símbolo comúnmente usado para un potenciómetro.



(a)



(b)

Fig. 7-49. (a) Potenciómetro; (b) símbolo del potenciómetro.

**Soluciones de ecuaciones diferenciales.** Al resolver ecuaciones diferenciales por medio de una computadora analógica, siempre integramos derivadas más bien que diferenciarlas. La razón de este hecho es el ruido espurio que está siempre presente en el sistema de la computadora analógica. La diferenciación acentúa el efecto del ruido, en tanto que la integración lo suaviza y, por lo tanto, las computadoras analógicas usan la integración más que la diferenciación como un operador básico.

Nótese que con el objeto de resolver ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo como

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = p(t)$$

se necesitan las componentes enlistadas abajo

1. El integrador
2. El sumador
3. El inversor de signo
4. El potenciómetro
5. La fuente de voltaje de cd



**Procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales.** Como ilustración, considérese la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 80 \quad (7-50)$$

El primer paso para construir un diagrama de computadora consiste en suponer que se dispone de la derivada de mayor orden. Luego, resolver la ecuación diferencial para esta derivada de mayor orden. En la ecuación diferencial presente

$$\ddot{x} = -10\dot{x} - 16x$$

Observando que la variable  $-\dot{x}$  puede obtenerse integrando  $\ddot{x}$  y también que  $x$  puede obtenerse mediante la integración de  $-\dot{x}$ , producimos las señales  $-10\dot{x}$  y  $-16x$  mediante el uso de dos integradores y un inversor de signo. El siguiente paso es sumar estas dos señales,  $-10\dot{x}$  y  $-16x$ , e igualar el resultado con  $\ddot{x}$ , el término con la derivada de mayor orden que originalmente se supuso disponible. Finalmente se fijan las condiciones iniciales en las salidas de los integradores. (Las condiciones iniciales están indicadas en los círculos del diagrama de la computadora). La figura 7-50 muestra un diagrama de computadora del sistema definido en la Ec. (7-50).

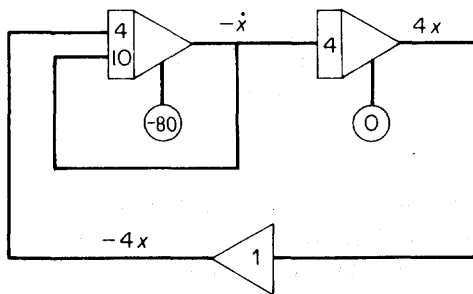


Fig. 7-50. Diagrama de computadora analógica.

Es importante recordar que el cambio de signo está asociado con cada amplificador operacional. De modo que si el número de amplificadores operacionales (integradores, sumadores e inversores de signo) en una trayectoria cerrada es par, los voltajes de salida se incrementarán hasta que se saturen. Para eliminar cualquier posibilidad de operación inestable, el número de amplificadores operacionales en cualquier trayectoria cerrada debe ser una cantidad impar. (En el diagrama de computadora de la Fig. 7-50 la trayectoria cerrada interna tiene un amplificador operacional y la trayectoria cerrada externa tres.) Este requisito sirve como una verificación conveniente de cualquier error cometido al construir el diagrama de computadora.

**Generación de una función exponencial.** Demostremos cómo producir una función exponencial  $x(t) = 20e^{-0.5t}$ . Con el objeto de construir el diagrama de computadora analógica, obtengamos primero la ecuación dife-

rencial correspondiente, la ecuación diferencial de más bajo orden cuya solución es  $x(t) = 20e^{-0.5t}$ .

Al diferenciar  $x(t)$  con respecto a  $t$ , tenemos

$$\dot{x} = -10e^{-0.5t}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial requerida es

$$\dot{x} + 0.5x = 0, \quad x(0) = 20$$

Resolviendo esta ecuación para  $\dot{x}$  da

$$\dot{x} = -0.5x$$

Suponiendo que esté disponible  $-\dot{x}$ ,  $x$  puede obtenerse integrando  $-\dot{x}$  una vez. La figura 7-51 muestra un diagrama de computadora analógica para generar la función exponencial dada.

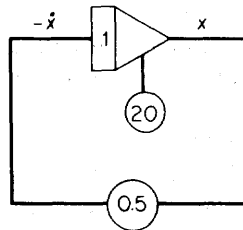


Fig. 7-51. Diagrama de computadora analógica.

**Generación de una función senoidal.** Aquí deseamos producir una señal senoidal, tal como  $10 \sin 3t$ . Con el objeto de construir el diagrama de computadora analógica, obtengamos la ecuación diferencial de más bajo orden cuya solución sea  $10 \sin 3t$ .

Sea

$$x(t) = 10 \sin 3t$$

Entonces

$$\ddot{x}(t) = -90 \sin 3t$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial requerida es

$$\ddot{x} + 9x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 30$$

Resolviendo esta ecuación diferencial para la derivada de mayor orden, tenemos

$$\ddot{x} = -9x$$

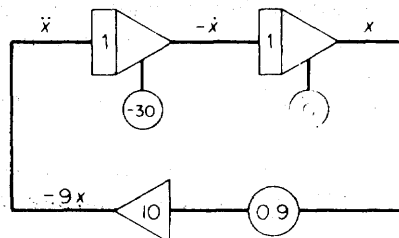


Fig. 7-52. Diagrama de computadora analógica.

Suponiendo que esté disponible  $\ddot{x}$ ,  $x$  puede obtenerse integrando  $\ddot{x}$  dos veces. En la Fig. 7-52 se da un diagrama de computadora de este sistema.

Nótese que las salidas del primero y el segundo integradores oscilan entre 30 y  $-30$  V y entre 10 y  $-10$  V, respectivamente. La salida del inverso de signo oscila entre 90 y  $-90$  V. Con el objeto de tener buena exactitud, es deseable hacer oscilar el voltaje de salida de cualquier amplificador entre 80 y 90 V. Este paso puede efectuarse utilizando los factores de escala de magnitud apropiada. (Los factores de escala de magnitud se expondrán en detalle más adelante en esta sección.)

**Factor de escala de tiempo.** Al resolver un sistema de ecuación diferencial, el tiempo de solución real puede ser tan rápido que el registrador sea incapaz de seguir la respuesta con exactitud. En fenómenos físicos que tienen lugar con semejante rapidez, la velocidad a la cual son simulados por la computadora debe disminuirse. Por otra parte, en algunos casos, la solución real puede tomar un tiempo excesivamente largo. Para evitar tales inconvenientes, se necesita la técnica conocida como *técnica de escalamiento en tiempo*.

El escalamiento en tiempo relaciona la variable independiente del sistema físico con la variable independiente de la computadora analógica. La computadora puede llevar a cabo la corrida más aprisa o más despacio que en "tiempo real" de ser conveniente o necesario. Nótese que si se van a usar partes reales del sistema con la computadora; esto es, si la computadora se usa para simular una o varias componentes del sistema real y está conectada directamente al hardware del sistema real, la escala de tiempo debe ser de uno a uno. En otras palabras, la computadora debe trabajar en tiempo real.

Sea la siguiente ecuación que relaciona el tiempo real  $t$  en segundos con el tiempo de la computadora (o tiempo de la máquina)  $\tau$  en segundos:

$$\tau = \lambda t$$

donde  $\lambda$  es el factor de escala de tiempo. Si  $\lambda$  se escoge como 0.1, entonces 10 segundos de tiempo real equivalen a 1 segundo de computadora. Esto significa que si la respuesta real toma 10 segundos de tiempo real para completarse, entonces la respuesta se completa en 1 segundo en la computadora. Recíprocamente, si  $\lambda$  se escoge como 10, entonces 1 segundo de tiempo real es equivalente a 10 segundos de tiempo de computadora. Por lo tanto, con el objeto de acelerar (retardar) la respuesta de la computadora,  $\lambda$  debe escogerse menor (mayor que) la unidad.

Como ilustración, considérese la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 100x = 0, \quad x(0) = 10, \quad \dot{x}(0) = 15 \quad (7-51)$$

En este sistema, puesto que la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es igual a 10 rad/s y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  es igual a 0.5, el tiempo

de asentamiento  $t_s$  es

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.5 \times 10} = 0.8 \text{ s}$$

La respuesta se establece dentro del 2% del valor final en 0.8 segundos.

Supóngase que deseamos retardar la respuesta de modo que el tiempo de asentamiento sea de 8 segundos. Podemos hacerlo escogiendo un factor de escala de tiempo  $\lambda$  de 10. Conviertamos la variable independiente  $t$  en  $\tau$ . Puesto que  $\tau = \lambda t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \lambda \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} \end{aligned}$$

La ecuación (7-51) se hace entonces

$$\lambda^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + 10\lambda \frac{dx}{d\tau} + 100x = 0$$

o bien

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{10}{\lambda} \frac{dx}{d\tau} + \frac{100}{\lambda^2} x = 0$$

Para retardar la solución mediante un factor de 10, sustituimos  $\lambda = 10$  en esta última ecuación. La ecuación de la computadora es entonces

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + x = 0$$

Las condiciones iniciales se transforman en,

$$x(0) = 10, \quad \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{\lambda} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{10}(15) = 1.5$$

**Ejemplo 7-12.** En el sistema eléctrico de la Fig. 7-53, el capacitor no está cargado inicialmente. El interruptor  $S$  se cierra en  $t = 0$ . Simulemos este sistema eléctrico en una computadora analógica.

La ecuación del circuito para  $t > 0$  es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E$$

Al sustituir  $dq/dt = i$  en esta última ecuación, tenemos

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E, \quad q(0) = 0, \quad \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

Definamos  $q/C = x$ . Entonces, esta última ecuación se hace

$$LC \frac{d^2x}{dt^2} + RC \frac{dx}{dt} + x = E, \quad x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

$$L = 5 \text{ mH}$$

$$R = 5 \Omega$$

$$C = 200 \mu\text{F}$$

$$E = 24 \text{ V}$$

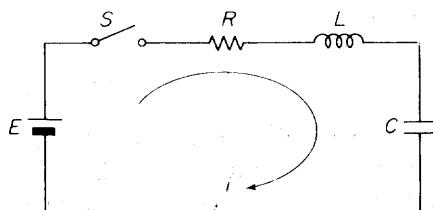


Fig. 7-53. Sistema eléctrico.

Sustituyendo los valores numéricos dados

$$(5)(10^{-3})(200)(10^{-6}) \frac{d^2x}{dt^2} + (5)(200)(10^{-6}) \frac{dx}{dt} + x = 24$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10^3 \frac{dx}{dt} + 10^6 x = (24)(10^6)$$

La respuesta de este sistema es muy rápida. (La frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es igual a  $10^3$  rad/s y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  igual a 0.5.) Retrasemos la respuesta en la computadora analógica mediante un factor de  $10^3$  o escojamos un factor de escala de tiempo  $\lambda$  que sea de  $10^3$ . Entonces, al cambiar la variable independiente  $t$  por  $\tau$ , donde  $\tau = \lambda t$ , vemos que

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{10^3}{\lambda} \frac{dx}{d\tau} + \frac{10^6}{\lambda^2} x = \frac{(24)(10^6)}{\lambda^2}$$

la cual, con la sustitución de  $\lambda = 10^3$ , se hace

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + x = 24$$

En la Fig. 7-54 se muestra un diagrama de computadora para simular este sistema. Nótese que  $q = Cx = 2 \times 10^{-4}x$  e  $i = dq/dt = \lambda(dq/d\tau) = \lambda C(dx/d\tau) = 0.2(dx/d\tau)$ .

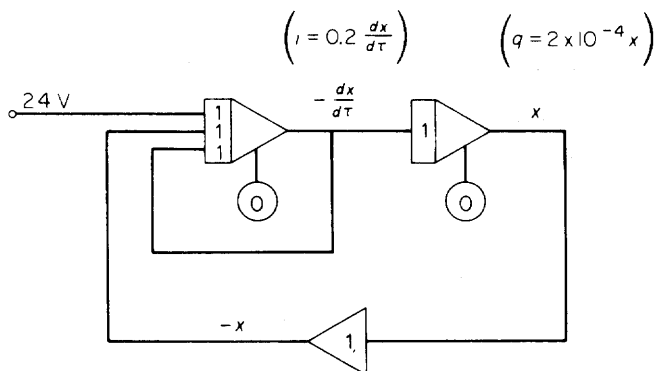


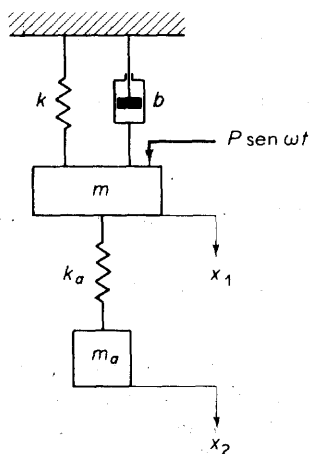
Fig. 7-54. Diagrama de computadora analógica para el sistema mostrado en la Fig. 7-53.

**Ejemplo 7-13.** (Simulación de un absorbedor de vibración dinámica.) En el sistema mecánico con un absorbedor de vibración dinámica mostrado en la Fig. 7-55, supóngase que todas las condiciones iniciales son cero y que la fuerza de entrada  $p \sin \omega t$  se da en  $t = 0$ . Simulamos este sistema en una computadora analógica.

Las ecuaciones de este sistema son

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b \frac{dx_1}{dt} + kx_1 + k_a(x_1 - x_2) = P \sin \omega t$$

$$m_a \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_a(x_2 - x_1) = 0$$



$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ kg} \\ b &= 5 \text{ N-s/m} \\ k &= 500 \text{ N/m} \\ m_a &= 0.5 \text{ kg} \\ k_a &= 200 \text{ N/m} \\ P &= 20 \text{ N} \\ \omega &= 20 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

**Fig. 7-55.** Sistema mecánico con un absorbedor de vibración dinámica.

Al sustituir los valores numéricos dados en estas ecuaciones, tenemos

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 5 \frac{dx_1}{dt} + 500x_1 + 200(x_1 - x_2) = 20 \sin 20t$$

$$0.5 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 200(x_2 - x_1) = 0$$

Si escogemos el factor de escala de tiempo  $\lambda$  de 10, las ecuaciones del sistema se hacen

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + 0.5 \frac{dx_1}{d\tau} + 5x_1 + 2(x_1 - x_2) = 0.2 \sin 2\tau$$

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + 4(x_2 - x_1) = 0$$

Definamos ahora las nuevas variables  $y_1$  y  $y_2$  tales que

$$y_1 = 100 x_1, \quad y_2 = 100 x_2$$

Las ecuaciones del sistema se hacen entonces

$$\frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + 0.5 \frac{dy_1}{d\tau} + 5y_1 + 2(y_1 - y_2) = 20 \sin 2\tau$$

$$\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + 4(y_2 - y_1) = 0$$

Para simplificar la notación, escribamos

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \dot{y}_1, \quad \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} = \ddot{y}_1, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = \dot{y}_2, \quad \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} = \ddot{y}_2$$

Por tanto, las ecuaciones del sistema pueden escribirse

$$\ddot{y}_1 + 0.5\dot{y}_1 + 5y_1 + 2(y_1 - y_2) = 20 \sin 2\tau \quad (7-52)$$

$$\ddot{y}_2 + 4(y_2 - y_1) = 0 \quad (7-53)$$

Las condiciones iniciales son

$$y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0$$

Usaremos las variables  $y_1$  y  $y_2$  para simular el sistema mecánico.

Al simular este sistema, producimos primero la función impulsora  $20 \sin 2\tau$ . Nótese que  $p = 20 \sin 2\tau$  es la solución de

$$\ddot{p} + 4p = 0, \quad p(0) = 0, \quad \dot{p}(0) = 40$$

En el siguiente paso, resolvemos las Ecs. (7-52) y (7-53) para los términos de la derivada de mayor orden, respectivamente.

$$\ddot{y}_1 = -0.5\dot{y}_1 - 7y_1 + 2y_2 + 20 \sin 2\tau$$

$$\ddot{y}_2 = 4y_1 - 4y_2$$

Supongamos entonces que  $\dot{y}_1$  y  $\dot{y}_2$  están disponibles e integremos estas señales para obtener  $-\dot{y}_1$  y  $-\dot{y}_2$  y también  $-\dot{y}_1$  y  $-\dot{y}_2$  con el objeto de obtener  $y_1$  y  $y_2$ . Al aumentar estos términos de menor orden a las componentes apropiadas requeridas por las ecuaciones del sistema, generamos los términos de las derivadas de mayor orden  $\dot{y}_1$  y  $\dot{y}_2$  y cerramos la trayectoria. La figura 7-56 es un diagrama de computadora analógica que simula el sistema mecánico con un absorbedor de vibración dinámica considerado.

Nótese que las señales de salida de la computadora están dadas en voltajes. Por lo tanto, es necesario interpretar los voltajes de salida de los amplificadores en términos de las cantidades físicas originales. (Se dispone de un modelo sistemático para correlacionar los voltajes de salida con cantidades físicas. Para los detalles, véanse los factores de escala de magnitud expuestos más adelante.) En este problema ejemplo, si los voltajes instantáneos de las señales  $y_1$  y  $y_2$  son 5 V y 10 V, respectivamente, entonces los desplazamientos  $x_1$  y  $x_2$  se interpretan como 0.05 m y 0.1 m, respectivamente.

En la solución de computadora analógica (Fig. 7-56), la amplitud de la señal  $y_1$  decrece a cero cuando se alcanza el estado estable. En el estado estable, la señal  $y_1$  es cero y la señal  $2y_2$  es  $-20 \sin 2\tau$ . En consecuencia, la señal  $2y_2$  cancela a la función de excitación  $p(\tau) = 20 \sin 2\tau$  en estado estable y, por lo tanto, la Ec. (7-52) se hace

$$\ddot{y}_1 + 0.5\dot{y}_1 + 7y_1 = 0$$

Así que el sistema no tiene función de excitación en estado estable y  $y_1(\infty)$  se hace cero.

**Factores de escala magnitud.** La magnitud del voltaje de salida del amplificador depende en gran medida de la exactitud del circuito. Cuando alambra-

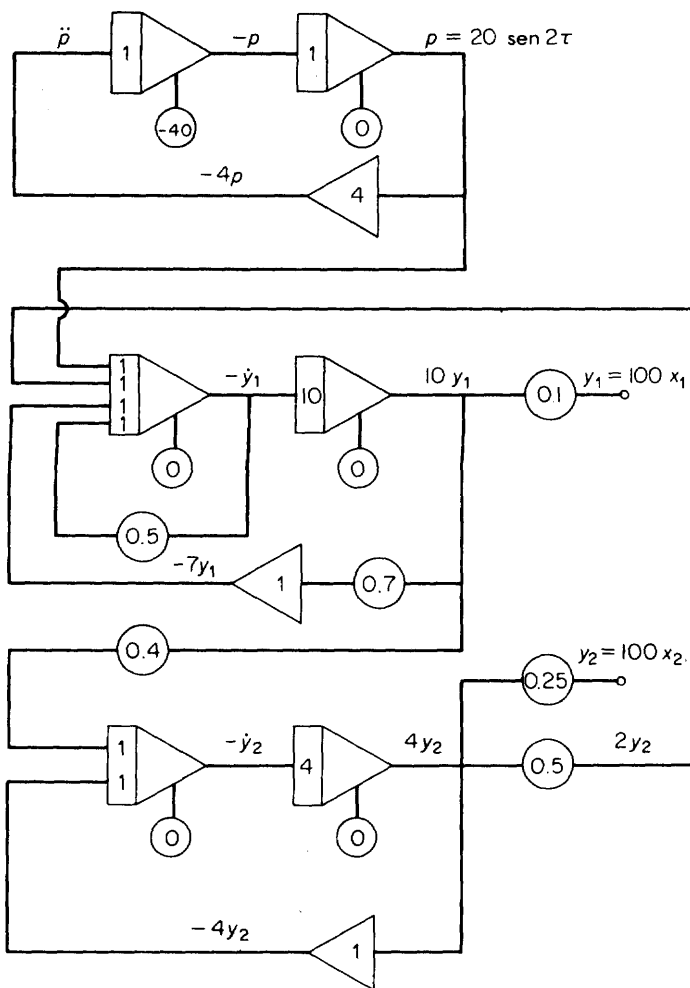


Fig. 7-56. Diagrama de computadora analógica para el sistema mostrado en la Fig. 7-55.

mos el circuito, el voltaje debe hacerse tan grande como sea posible dentro de los límites de la máquina. Los límites son usualmente  $\pm 100$  V. (En ciertas computadoras analógicas de pequeña escala los límites son  $\pm 10$  V.)

Después de la selección de un factor de escala de tiempo conveniente, debe darse atención a la escala de magnitudes. Puesto que la computadora manipula voltajes, es necesario transformar las ecuaciones del sistema real, las cuales pueden involucrar, por ejemplo, presión, temperatura, desplazamiento y cantidades similares, en ecuaciones de voltaje análogas. Esto es, en un sistema de presión, debemos decidir cuántos newtons por metro



cuadrado del sistema real deben ser representados por un volt en la computadora. Los factores de escala de magnitud relacionan los voltajes de salida de los amplificadores con las correspondientes cantidades físicas.

Al escoger factores de escala de magnitud, deben tenerse presentes los siguientes requisitos. El voltaje de salida de cualquier amplificador no debe exceder los límites del amplificador (usualmente  $\pm 100$  V) si se va a evitar la saturación. La saturación en el voltaje causará errores en la solución. Y con el objeto de eliminar el efecto del ruido, el voltaje máximo de cualquier amplificador no debe ser muy pequeño. Para asegurar la exactitud apropiada, es preferible que la máxima oscilación en el voltaje de salida de cualquier amplificador esté alrededor de  $\pm 80$  hasta  $\pm 90$  V. A este respecto, la selección apropiada de los factores de escala de magnitud es de gran importancia. (Nótese que en la mayor parte de las computadoras analógicas algunos errores son toscamente constantes. Para tales errores las salidas grandes resultan en errores de bajo porcentaje.) Esta magnitud del error puede ser adecuada, puesto que las suposiciones de simplificación en el análisis de ingeniería a menudo involucran aun mayor exactitud.

**Procedimiento para determinar factores de escala de magnitud.** A causa de que el cambio en escala de tiempo puede alterar las derivadas de tiempo de las variables dependientes, el factor de escala de tiempo debe decidirse antes de determinar los factores de escala de magnitud. Si la velocidad de las soluciones del sistema real está dentro del alcance razonable de la computadora, el dar escala de tiempo puede no ser necesario. El problema se puede correr en tiempo real.

El primer paso para determinar los factores de escala de magnitud consiste en estimar las magnitudes máximas de las variables que puedan ocurrir en el sistema físico. En la práctica, las escalas de las variables usualmente son desconocidas antes de obtener la solución. Por lo tanto, se necesita cierta cantidad de tanteos para establecer los factores de escala de magnitud apropiados. Tales estimaciones pueden provenir de un conocimiento del sistema real, de cálculos burdos, de una conjetura pura o de una combinación de éstos. (En muchos casos, las estimaciones se hacen despreciando el amortiguamiento en el sistema.) Excepto en problemas comunes y corrientes, puede haber gran necesidad de conjeturas.

Una vez encontradas las estimaciones iniciales de las magnitudes máximas de las variables, se pueden determinar los factores de escala de magnitud. Los valores así determinados pueden probarse para ver si son los apropiados mediante la corrida del problema con los factores de escala de magnitud supuestos y observando si los voltajes son demasiado grandes o demasiado pequeños. Si los factores de escala de magnitud no son los apropiados, éstos pueden variarse hasta obtener resultados satisfactorios.

**Ejemplo 7-14.** Considérese el sistema mostrado en la Fig. 7-57. Supóngase que el desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio. Las condiciones iniciales se dan como

$$x(0) = 0 \text{ m}, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 3 \text{ m/s}$$

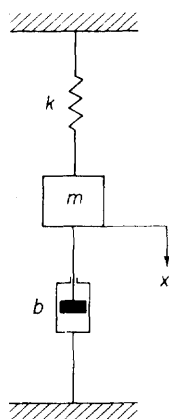
Simulemos este sistema mecánico en una computadora analógica.

La ecuación del sistema es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Al sustituir los valores numéricos dados para  $m$ ,  $b$  y  $k$ , tenemos

$$0.2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 1.2 \frac{dx}{dt} + 180 x = 0$$



$$\begin{aligned} m &= 0.2 \text{ kg} \\ b &= 1.2 \text{ N-s/m} \\ k &= 180 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Fig. 7-57. Sistema mecánico.

o bien

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 900 x = 0$$

Puesto que el tiempo de asentamiento del presente sistema es

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.1 \times 30} = 1.33 \text{ s}$$

retardemos la respuesta y hagamos que el nuevo tiempo de asentamiento sea de 13.3 segundos. Podemos hacerlo fácilmente escogiendo que el factor de escala de tiempo  $\lambda$  sea de 10.

Al cambiar la variable independiente de  $t$  a  $\tau$ , donde  $\tau = \lambda t = 10t$ , tenemos

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 0.6 \frac{dx}{d\tau} + 9x = 0$$

donde

$$x(0) = 0 \text{ m}, \quad \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0.3 \text{ m/s}$$

Por razón de simplicidad, escribamos

$$\frac{dx}{d\tau} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} = \ddot{x}$$

Entonces, se tiene una ecuación de sistema con escala de tiempo apropiada

$$\ddot{x} + 0.6 \dot{x} + 9x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.3 \quad (7-54)$$

Usaremos la Ec. (7-54) como la ecuación de partida para determinar los factores de escala de magnitud. Resolviendo la Ec. (7-54) para la derivada de mayor orden da

$$\ddot{x} = -0.6 \dot{x} - 9x \quad (7-55)$$

Determinemos los factores de escala de magnitud de modo que la oscilación máxima de cada amplificador sea de 90 V. Definamos  $k_1$  y  $k_2$  como factores de escala de magnitud tales que  $k_1$  relacione voltaje con velocidad (m/s) y  $k_2$  relacione voltaje con desplazamiento (m). Por lo tanto,  $k_1$  tiene la dimensión de volts por metro por segundo (V-s/m), y  $k_2$  tiene la dimensión de volts por metro (V/m). Reescribamos la Ec. (7-55) como

$$\ddot{x} = -\frac{0.6}{k_1}(k_1\dot{x}) - \frac{9}{k_2}(k_2x)$$

Con el objeto de hacer mínimo el efecto del ruido y mantener alta la exactitud, debe usarse un número mínimo de amplificadores. (En cualquier computadora analógica el número de amplificadores es limitado. Al resolver problemas complejos que requieren muchos integradores y sumadores, debe usarse un número mínimo de amplificadores para cada ecuación con el objeto de ahorrar componentes.) El presente sistema es de segundo orden y, por lo tanto, necesitamos dos integradores. Puesto que el número de amplificadores en cualquier trayectoria cerrada debe ser impar, necesitamos cuando menos un inversor de signo. Así, el número mínimo de amplificadores necesario es tres. La figura 7-58 muestra un diagrama de computadora para el problema donde se requiere un número mínimo de amplificadores.

En relación con la Fig. 7-58, el voltaje de salida del primer integrador es  $-k_1\dot{x}$ . El voltaje de salida del segundo integrador es  $k_2x$ . El voltaje de salida del inversor de signo es  $-k_2x$ . Estos voltajes de salida deben estar limitados a  $\pm 90$  V. (El voltaje máximo absoluto es  $\pm 100$  V, así que  $\pm 90$  V es una elección conservadora.) Un sistema de segundo orden tal como el representado por la Ec. (7-54) tiene su movimiento más violento cuando se remueve el término de amortiguamiento. Para obtener estimaciones conservadoras o excesivamente grandes de los valores máximos, podemos usar la solución de

$$\ddot{x} + 9x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.3$$

La solución de esta ecuación simplificada es

$$x(\tau) = 0.1 \sin 3\tau$$

En consecuencia,

$$\dot{x}(\tau) = 0.3 \cos 3\tau$$

De la solución presente podemos obtener estimaciones conservadoras (excesivamente grandes) para el sistema definido por la Ec. (7-54) tales que

$$\text{Valor máximo de } |x| = |x|_{\text{máx}} = 0.1$$

$$\text{Valor máximo de } |\dot{x}| = |\dot{x}|_{\text{máx}} = 0.3$$

Escojamos  $k_1$  y  $k_2$  de modo que  $|k_1 \dot{x}| = |k_2 x| = 90 \text{ V}$  para los valores de  $\dot{x}$  y  $x$ , res-

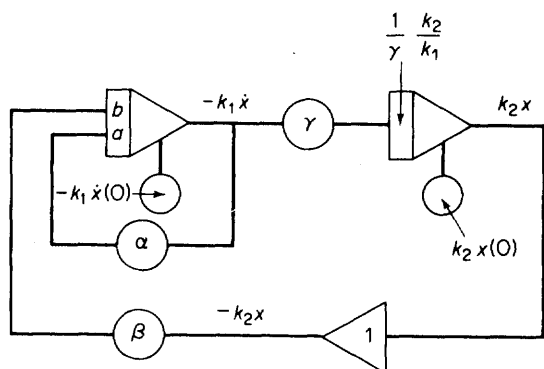


Fig. 7-58. Diagrama de computadora analógica para la determinación de factores de escala de magnitud.

pectivamente. Por lo tanto, los factores de escala de magnitud se determinan como

$$k_1 = \frac{90}{|\dot{x}|_{\text{máx}}} = \frac{90}{0.3} = 300 \text{ V-s/m}$$

$$k_2 = \frac{90}{|x|_{\text{máx}}} = \frac{90}{0.1} = 900 \text{ V/m}$$

Y así,

$$\frac{k_2}{k_1} = 3$$

Nótese que de la Ec. (7-58) tenemos

$$k_1 \ddot{x} = a\alpha(-k_1 \dot{x}) + b\beta(-k_2 x)$$

o bien

$$\ddot{x} + a\alpha \dot{x} + b\beta \frac{k_2}{k_1} x = 0$$

Observando que  $k_1/k_2 = 3$ , esta última ecuación se hace

$$\ddot{x} + a\alpha \dot{x} + 3b\beta x = 0 \quad (7-56)$$

Por comparación de las Ecs. (7-54) y (7-56), vemos que

$$a\alpha = 0.6, \quad b\beta = 3$$

Escojamos  $a = 1$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $b = 10$  y  $\beta = 0.3$ .

A continuación, debemos determinar el valor de  $\gamma$ . La constante del segundo integrador  $(1/\gamma)(k_2/k_1)$  generalmente se fija igual a 1 o 10. Puesto que  $k_2/k_1 = 3$ , escogemos

$$\frac{1}{\gamma} \frac{k_2}{k_1} = 10$$

Esto resulta en  $\gamma = 0.3$ . Se determinan entonces todas las constantes desconocidas en la Fig. 7-58. Un diagrama de computadora con escalas apropiadas se muestra en la Fig. 7-59(a). Las condiciones iniciales son

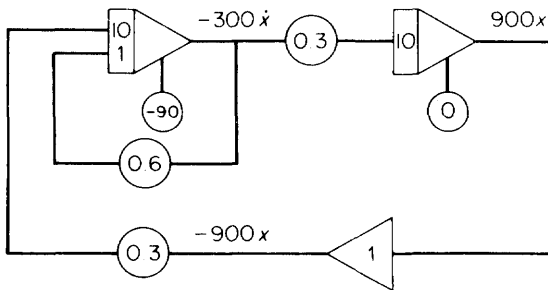
$$-k_1 \dot{x}(0) = -300 \times 0.3 = -90 \text{ V}$$

$$k_2 x(0) = 900 \times 0 = 0 \text{ V}$$

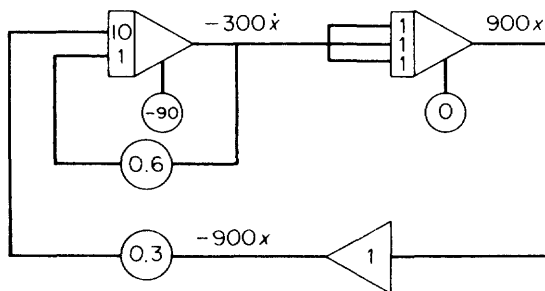
La salida del segundo integrador es  $900x(\tau)$ .

Es importante notar que el potenciómetro representado mediante  $\gamma$  en la Fig. 7-58 puede eliminarse, como lo muestra la Fig. 7-59(b). (Esta situación es equivalente a fijar la constante del integrador igual a 3.)

Nótese que en razón de que empleamos la determinación de la escala de tiempo al principio de la solución del problema, el tiempo involucrado en la solución de computadora es el tiempo de computadora  $\tau$  (donde  $\tau = 10t$  y  $t$  es el tiempo real). Nótese también que en esta solución de computadora analógica el desplazamiento y la velocidad se obtienen en volts. Los valores de voltaje pueden volverse a cambiar por las cantidades físicas correspondientes con base en la definición de los factores de escala de magnitud  $k_1$  y  $k_2$ .



(a)



(b)

**Fig. 7-59.** Diagramas de computadora analógica.

En este ejemplo, el desplazamiento medido en volts puede transformarse restableciéndolo en metros mediante el uso de la siguiente relación

$$1 \text{ V corresponde a } \frac{1}{900} \text{ m}$$

y la velocidad medida en volts puede transformarse restableciéndola en metros por segundo mediante el uso de la siguiente conversión

$$1 \text{ V corresponde a } \frac{1}{300} \frac{\text{metro}}{\text{segundo de computadora}}$$

Puesto que en el presente caso,

$$10 \text{ segundos de computadora} = 1 \text{ segundo real}$$

tenemos

$$1 \text{ V corresponde a } \frac{1}{300} \frac{\text{metro}}{0.1 \text{ segundo real}} = \frac{1}{30} \frac{\text{metro}}{\text{segundo real}}$$

**Resumen de procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales.** Los pasos que normalmente seguimos en la solución de ecuaciones diferenciales pueden resumirse como sigue:

1. Determine el factor de escala de tiempo y los factores de escala de magnitud como se necesiten.
2. Resuelva la ecuación diferencial para la derivada de mayor orden. El primer miembro de la ecuación obtenida define las entradas del primer integrador.
3. Integre la derivada de mayor orden para obtener las derivadas de menor orden y la variable en sí.
4. Alimente estos términos de las derivadas de menor orden en componentes apropiadas como lo pidan las ecuaciones del sistema, generando así la derivada de mayor orden y cerrando la trayectoria.
5. Proporcione las condiciones iniciales según se requiera.

**Conclusiones.** La simulación por computadora analógica juega un papel importante en el análisis y diseño de sistemas complicados. Los efectos de los cambios en los parámetros del sistema sobre el funcionamiento del sistema pueden ser fácilmente determinados. La ventaja de la simulación analógica es que puede usarse cualquier escala de tiempo conveniente. No obstante, se tiene la limitación de que la computadora analógica resuelve solamente ecuaciones específicas con condiciones iniciales numéricas y que da la solución como curva. La computadora no puede dar una solución general con constantes arbitrarias. Así que la solución por computadora tiene diferente carácter que la solución analítica por métodos exactos.

En general, la representación matemática precisa de una componente complicada es difícil. Es probable que alguna de las características importantes de la componente se pase por alto en la simulación, factor que puede causar serios errores en la solución. Con el objeto de evitar tales errores, el simulador debe incluir componentes del sistema reales. Si se incluyen tales componentes, no se perderán características importantes de las componentes reales. La solución, sin embargo, debe obtenerse en tiempo real.

Las computadoras analógicas de gran escala pueden usarse para simular sistemas no lineales o resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Operaciones no lineales tales como la multiplicación de dos variables pueden realizarse fácilmente con la computadora analógica electrónica. Se dispone de circuitos electrónicos estándar para simular no-linealidades comúnmente encontradas como la saturación, la zona muerta e histéresis. Las curvas características de entrada y salida de estas no linealidades se muestran en la Fig. 7-60(a), (b) y (c). El uso de la computadora analógica en sistemas no lineales no es esencialmente diferente de aquel de los sistemas lineales descrito en esta sección.

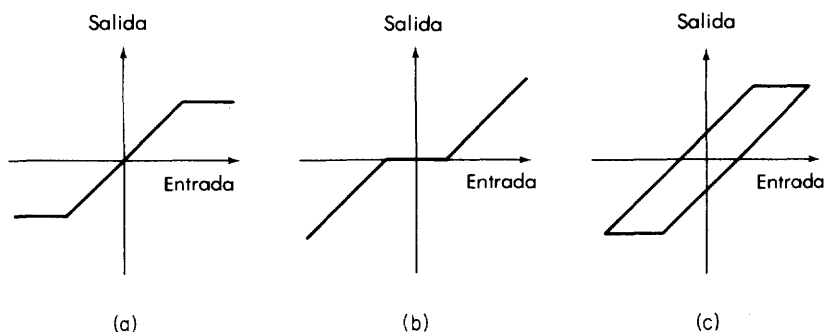


Fig. 7-60. Curvas características de entrada-salida; (a) no linealidad de saturación; (b) no linealidad de zona muerta; (c) no linealidad de histéresis.

## BIBLIOGRAFÍA

- 7-1 ASHLEY, R. J., *Introduction to Analog Computation*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.
- 7-2 CANNON, R. H., *Dynamics of Physical Systems*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1967.
- 7-3 DOEBELIN, E. O., *Dynamic Analysis and Feedback Control*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- 7-4 JOHNSON, C. L., *Analog Computer Techniques*. 2nd ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.
- 7-5 KORN, G. A., AND T. M. KORN, *Electronic Analog Computers*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.

- 7-6 OGATA K., *Modern Control Engineering*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- 7-7 RESWICK, J. B. AND C. K. TAFT, *Introduction to Dynamic Systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1967.
- 7-8 SHEARER, J. L., A. T. MURPHY, AND H. H. RICHARDSON, *Introduction to System Dynamics*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967.

## EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

**PROBLEMA A-7-1.** En relación con el circuito mostrado en la Fig. 7-61, supóngase que hay una carga inicial  $q_0$  en el capacitor justamente antes que el interruptor  $S$  se cierre en  $t = 0$ . Encuéntrese la corriente  $i(t)$ .

**Solución.** La ecuación del circuito es

$$Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt = E$$

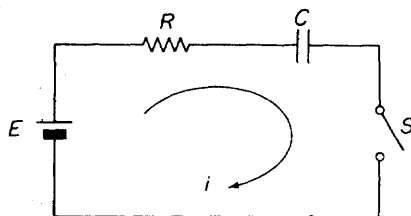


Fig. 7-61. Circuito eléctrico.

Tomando la transformada de Laplace de esta última ecuación

$$RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s) + \int i(t) \, dt \Big|_{t=0}}{s} = \frac{E}{s}$$

Puesto que

$$\int i(t) \, dt \Big|_{t=0} = q(0) = q_0$$

obtenemos

$$RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s) + q_0}{s} = \frac{E}{s} \quad (7-57)$$

o bien

$$RCsI(s) + I(s) + q_0 = CE$$

Resolviendo para  $I(s)$ , tenemos

$$I(s) = \frac{CE - q_0}{RCs + 1} = \frac{(E/R) - (q_0/RC)}{s + (1/RC)}$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da la corriente  $i(t)$ .

$$i(t) = \left( \frac{E}{R} - \frac{q_0}{RC} \right) e^{-t/RC}$$



Nótese que la transformada de Laplace de la ecuación integral incluye automáticamente la condición inicial como se vio anteriormente. Si la ecuación del circuito se escribe en la forma

$$Ri + \frac{1}{C} \left( \int_0^t i \, dt + q_0 \right) = E$$

entonces la transformada de Laplace de esta ecuación da

$$RI(s) + \frac{1}{C} \left[ \frac{I(s)}{s} + \frac{q_0}{s} \right] = \frac{E}{s}$$

la cual es, por supuesto, la misma que la Ec. (7-57) obtenida anteriormente.

**PROBLEMA A-7-2.** Supóngase que un disco gira a una velocidad constante de 100 rad/s y deseamos pararlo en 2 minutos. Suponiendo que el momento de inercia  $J$  del disco es de 6 kg-m<sup>2</sup>, determínese el par  $T$  necesario para detectar la rotación.

**Solución.** El par necesario  $T$  debe actuar de modo que reduzca la velocidad. Así que la ecuación de movimiento es

$$J\dot{\omega} = -T, \quad \omega(0) = 100$$

Al integrar esta última ecuación con respecto a  $t$ , obtenemos

$$J\omega(t) = -Tt + k$$

La constante de integración  $k$  se determina mediante el uso de la condición inicial. Así,

$$J\omega(0) = k = 100J$$

Y, por lo tanto,

$$J\omega(t) = -Tt + 100J$$

En  $t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$ , queremos parar, o que  $\omega(120)$  sea igual a cero. Por lo tanto,

$$J\omega(120) = 0 = -T \times 120 + 100 \times 6$$

Resolviendo para  $T$ , tenemos

$$T = \frac{600}{120} = 5 \text{ N-m}$$

**PROBLEMA A-7-3.** Una masa  $m$  está unida a una cuerda que está bajo una tensión  $T$  en el sistema de la Fig. 7-62(a). Suponemos que la tensión  $T$  permanece constante en pequeños desplazamientos  $x$ . Despreciando la gravedad, encuéntrase la frecuencia natural del movimiento vertical de la masa  $m$ . ¿Cuál es el desplazamiento  $x(t)$  cuando la masa tiene dadas las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ ?

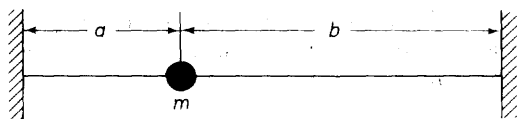
**Solución.** En relación con la Fig. 7-62(b), la componente vertical de la fuerza debida a la tensión es

$$-T \sin \theta_1 - T \sin \theta_2$$

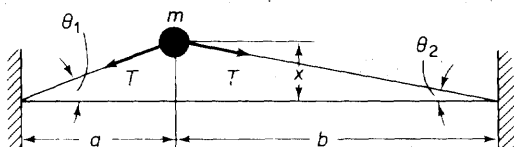
Para  $x$  pequeña, los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son pequeños y

$$\sin \theta_1 = \tan \theta_1 = \frac{x}{a}$$

$$\sin \theta_2 = \tan \theta_2 = \frac{x}{b}$$



(a)



(b)

**Fig. 7-62.** (a) Sistema vibratorio mecánico; (b) diagrama que muestra las fuerzas de tensión.

La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} = -T \sin \theta_1 - T \sin \theta_2 = -T \frac{x}{a} - T \frac{x}{b}$$

o bien

$$m\ddot{x} + T \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) x = 0$$

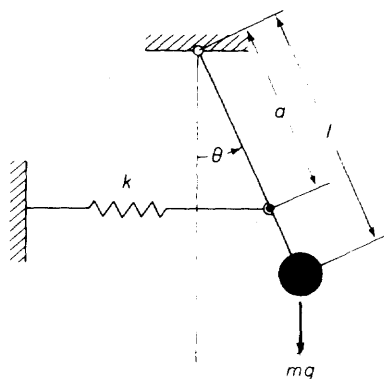
Por lo tanto, la frecuencia natural del movimiento de la masa es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{m} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}$$

La solución  $x(t)$  está dada por

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t$$

**PROBLEMA A-7-4.** Obtenga la ecuación de movimiento del sistema del péndulo mostrado en la Fig. 7-63, así como la frecuencia natural. Supóngase que cuando el péndulo está vertical, no hay fuerza del resorte; también, supóngase que  $\theta$  es pequeño. Finalmente, determínese  $\theta(t)$  cuando el péndulo tiene dadas las condiciones iniciales  $\theta(0) = \theta_0$  y  $\dot{\theta}(0) = 0$ .



**Fig. 7-63.** Sistema de péndulo.

**Solución.** Sobre este sistema están actuando dos pares: uno debido a la fuerza gravitacional y el otro debido a la fuerza del resorte. Al aplicar la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento del sistema se hace

$$J\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta - (ka \sin \theta)(a \cos \theta)$$

donde  $J = ml^2$ . Al reescribir esta última ecuación, tenemos

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta + ka^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

Para  $\theta$  pequeño, tenemos  $\sin \theta = \theta$  y  $\cos \theta = 1$ . Así que la ecuación de movimiento puede simplificarse a

$$ml^2\ddot{\theta} + (mgl + ka^2)\theta = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2} \right) \theta = 0$$

La frecuencia natural  $\omega_n$  del sistema es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}}$$

La solución  $\theta(t)$  está dada por

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t$$

**PROBLEMA A-7-5.** Dos masas  $m_1$  y  $m_2$  están conectadas mediante un resorte de constante  $k$  en la Fig. 7-64. Suponiendo que no hay fricción, obténgase la ecuación de movimiento. Además, encuentrese  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  cuando la fuerza externa  $F$  es constante. Supóngase que  $x_1(0) = 0$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$  y  $x_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = 0$ .

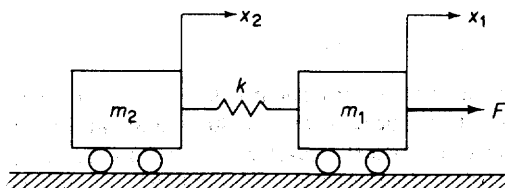


Fig. 7-64. Sistema mecánico.

**Solución.** La ecuación de movimiento es

$$m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) + F$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1)$$

Reescribiendo

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F \quad (7-58)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \quad (7-59)$$

De las Ecs. (7-58) y (7-59) obtenemos

$$m_1m_2(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (km_2 + km_1)(x_1 - x_2) = m_2F$$

Si definimos  $x_1 - x_2 = x$ , entonces esta última ecuación se simplifica a

$$m_1m_2\ddot{x} + k(m_1 + m_2)x = m_2F$$

Se sigue que

$$\ddot{x} + \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} x = \frac{F}{m_1} \quad (7-60)$$

Definamos

$$\omega_n^2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$$

Entonces, la Ec. (7-60) se hace

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m_1}$$

Al tomar la transformada de Laplace de esta última ecuación, sustituyendo las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , y observando que  $F$  es una constante, tenemos

$$(s^2 + \omega_n^2)X(s) = \frac{F}{m_1 s}$$

o bien

$$X(s) = \frac{F}{m_1 s} \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{F}{m_1 \omega_n^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right)$$

La transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  da

$$x(t) = \frac{F}{m_1 \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \quad (7-61)$$

Determinaremos ahora  $x_2(t)$ . De las Ecs. (7-59) y (7-61) encontramos

$$m_2 \ddot{x}_2 = kx = \frac{kF}{m_1 \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$$

Puesto que  $F$  = constante, podemos integrar fácilmente el lado derecho de esta última ecuación. Observando que  $x_2(0) = 0$  y  $\dot{x}_2(0) = 0$ , obtenemos

$$m_2 \dot{x}_2 = \frac{kF}{m_1 \omega_n^2} \left( t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \right)$$

o también

$$m_2 x_2 = \frac{kF}{m_1 \omega_n^2} \left( \frac{t^2}{2} + \frac{1}{\omega_n^2} \cos \omega_n t \right) - \frac{kF}{m_1 \omega_n^4}$$

Así que  $x_2$  se obtiene como

$$x_2(t) = \frac{F}{m_1 + m_2} \frac{t^2}{2} - \frac{F m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)^2} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} t \right] \quad (7-62)$$

Por tanto, la solución  $x_1(t)$  se obtiene de

$$x_1(t) = x(t) + x_2(t)$$

Al sustituir las Ecs. (7-61) y (7-62) en esta última ecuación y simplificar,

$$x_1(t) = \frac{F}{m_1 + m_2} \frac{t^2}{2} + \frac{F m_2^2}{k(m_1 + m_2)^2} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} t \right]$$

**PROBLEMA A-7-6.** En la Fig. 7-65 el sistema está en reposo inicialmente. En  $t = 0$  se aplica al punto  $A$  un escalón unitario como desplazamiento de entrada. Suponiendo

que el sistema permanece lineal a través del periodo de respuesta y que está subamortiguado, encuentre la respuesta  $x(t)$ , así como los valores de  $x(0+)$ ,  $\dot{x}(0+)$  y  $x(\infty)$ .

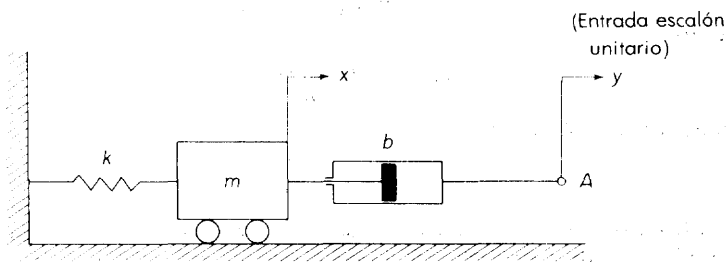


Fig. 7-65. Sistema mecánico.

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + kx = 0$$

o bien

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{y}$$

Observando que  $x(0-) = 0$ ,  $\dot{x}(0-) = 0$ , la transformada  $\mathcal{L}_-$  de esta última ecuación da

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = bsY(s)$$

Así,

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{bs}{ms^2 + bs + k}$$

Puesto que la entrada  $y$  es un escalón unitario,  $Y(s) = 1/s$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{bs}{ms^2 + bs + k} \frac{1}{s} = \frac{b}{ms^2 + bs + k} \\ &= \frac{2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{2\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las relaciones  $k/m = \omega_n^2$  y  $b/m = 2\zeta\omega_n$ . La transformada inversa de Laplace de  $x(s)$  es

$$x(t) = \frac{2\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t$$

Aunque los valores de  $x(0+)$ ,  $\dot{x}(0+)$  y  $x(\infty)$  pueden encontrarse fácilmente de esta última ecuación, en su lugar se usarán aquí los teoremas del valor inicial y final con el objeto de demostrar su aplicación.

Al aplicar el teorema del valor inicial a este problema, los valores iniciales  $x(0+)$  y  $\dot{x}(0+)$  pueden encontrarse como

$$x(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{s2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 0$$

$$\dot{x}(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 X(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{s^2 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 2\zeta\omega_n$$

El valor final  $x(\infty)$  se obtiene mediante el uso del teorema del valor final

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 0$$

Así la masa  $m$  retorna a su posición original en el transcurso del tiempo.

**PROBLEMA A-7-7.** Considérese el sistema rotatorio mostrado en la Fig. 7-66 y supóngase que el par  $T$  aplicado al rotor es de corta duración pero de gran amplitud de modo que se le puede considerar como una entrada de impulso. Supongamos que la velocidad angular inicialmente es cero, u  $\omega(0-) = 0$ . Dados los valores numéricos

$$J = 10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$b = 2 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$$

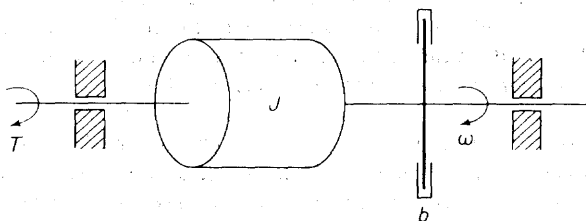


Fig. 7-66. Sistema rotatorio mecánico.

encuéntrese la respuesta  $\omega(t)$ . Supóngase que la amplitud del par  $T$  es de  $300 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{s}$  y que la duración del par es de  $0.1 \text{ s}$ ; esto es, la magnitud del par  $T$  es de  $300 \times 0.1 = 30 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema es

$$J\dot{\omega} + b\omega = T, \quad \omega(0-) = 0$$

Consideremos que el par impulsivo de magnitud  $1 \text{ N}\cdot\text{m}$  es  $\delta(t)$ . Entonces, al sustituir los valores numéricos dados en esta última ecuación, obtenemos

$$10\dot{\omega} + 2\omega = 30\delta(t)$$

Tomando la transformada  $\mathcal{L}$  de esta última ecuación,

$$10[s\Omega(s) - \omega(0-)] + 2\Omega(s) = 30$$

o sea

$$\Omega(s) = \frac{30}{10s + 2} = \frac{3}{s + 0.2}$$

La transformada inversa de Laplace de  $\Omega(s)$  es

$$\omega(t) = 3e^{-0.2t} \quad (7-63)$$

Nótese que  $\omega(0+) = 3 \text{ rad/s}$ . La velocidad angular del rotor es cambiada instantáneamente de  $\omega(0-) = 0$  a  $\omega(0+) = 3 \text{ rad/s}$ .

Si el sistema sólo está sometido a la condición inicial  $\omega(0) = 3$  rad/s y no hay par externo,  $T = 0$ , entonces la ecuación de movimiento se hace

$$10\dot{\omega} + 2\omega = 0, \quad \omega(0) = 3$$

Al tomar la transformada de Laplace de esta última ecuación

$$10[s\Omega(s) - \omega(0)] + 2\Omega(s) = 0$$

o bien

$$\Omega(s) = \frac{10\omega(0)}{10s + 2} = \frac{30}{10s + 2} = \frac{3}{s + 0.2}$$

La transformada inversa de Laplace de  $\Omega(s)$  da

$$\omega(t) = 3e^{-0.2t}$$

la cual es idéntica a la Ec. (7-63).

Del análisis precedente vemos que la respuesta de un sistema de primer orden a una entrada impulso es idéntica al movimiento desde la condición inicial en  $t = 0+$ .

Esto es, el efecto de la entrada de impulso a un sistema de primer orden consiste en generar la condición inicial distinta de cero en  $t = 0+$ .

**PROBLEMA A-7-8.** En relación con la Fig. 7-67, un hombre deja caer una bola de acero de masa  $m$  en el centro de la masa  $M$  desde una altura  $d$  y la atrapa en el primer rebote. Suponiendo que el sistema está inicialmente en reposo, ¿cuál es el movimiento de la masa  $M$  después de haber sido golpeada por la bola de acero? Supóngase que el impacto es perfectamente elástico. Además, supóngase que los valores numéricos de  $M$ ,  $m$ ,  $b$ ,  $k$  y  $d$  se dan como  $M = 1$  kg,  $m = 0.1$  kg,  $b = 4$  N-s/m,  $k = 125$  N/m y  $d = 1$  m. El desplazamiento  $x$  de la masa  $M$  se mide desde la posición de equilibrio antes que la bola la toque. Las condiciones iniciales son  $x(0-) = 0$  y  $\dot{x}(0-) = 0$ .

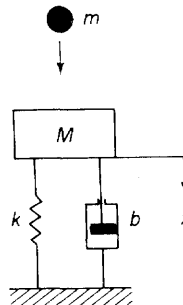


Fig. 7-67. Sistema mecánico sometido a una entrada impulso.

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema es

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = p(t) \quad (7-64)$$

Puesto que se supone que el impacto es perfectamente elástico, la cantidad de movimiento de la pelota cambia desde  $mv$  hacia abajo (en  $t = 0$ ) a  $mv$  hacia arriba (en  $t = 0$ ), o sea un cambio total de  $2mv$  donde  $v$  es la velocidad de la pelota antes de golpear la masa  $M$ . El impacto de la bola de acero es un impulso de entrada en masa  $M$ . La magnitud o área del impulso de entrada  $p(t)$  es

$$\int_{0-}^{0+} p(t) dt = 2mv$$

Así,

$$p(t) = 2mv \delta(t)$$

Y por lo tanto, la Ec. (7-64) se puede escribir

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 2mv \delta(t)$$

Observando que  $x(0-) = 0$  y  $\dot{x}(0-) = 0$ , la transformada  $\mathcal{L}_-$  de esta última ecuación da

$$(Ms^2 + bs + k)X(s) = 2mv$$

Resolviendo para  $X(s)$ , obtenemos

$$X(s) = \frac{2mv}{Ms^2 + bs + k}$$

Puesto que la velocidad  $v$  de la bola después de caer una distancia  $d$  es

$$v = \sqrt{2gd}$$

se sigue que

$$X(s) = \frac{2m\sqrt{2gd}}{Ms^2 + bs + k}$$

Al sustituir los valores numéricos dados en esta última ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2 \times 0.1 \sqrt{2 \times 9.81 \times 1}}{s^2 + 4s + 125} = \frac{0.886}{(s + 2)^2 + 11^2} \\ &= 0.0805 \frac{11}{(s + 2)^2 + 11^2} \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  da

$$x(t) = 0.0805 e^{-2t} \sin 11t \text{ m}$$

Así, la respuesta de la masa  $M$  es un movimiento senoidal amortiguado.

**PROBLEMA A-7-9.** Encuéntrese la función de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  del circuito eléctrico mostrado en la Fig. 7-68.

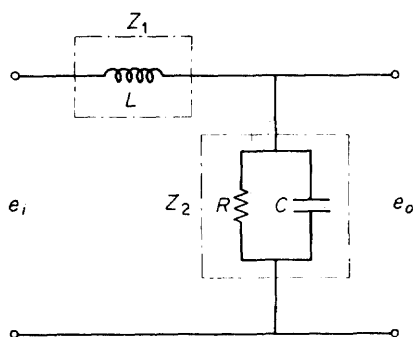


Fig. 7-68. Circuito eléctrico.

**Solución.** Las impedancias complejas  $Z_1$  y  $Z_2$  son

$$Z_1 = Ls$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + Cs = \frac{1 + RCs}{R}$$



Por lo tanto,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{R}{1 + RCs}}{Ls + \frac{R}{1 + RCs}} = \frac{R}{LRCs^2 + Ls + R}$$

**PROBLEMA A-7-10.** Una fuerza externa  $p(t)$  se aplica a la masa  $m_2$  en el sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-69. Obténgase la función de transferencia  $X(s)/P(s)$ . En el diagrama los desplazamientos  $x$  y  $y$  se miden desde sus respectivas posiciones de equilibrio.

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$m_2 \ddot{x} + b_1(\dot{x} - \dot{y}) + k_1(x - y) + k_2x = p$$

$$m_1 \ddot{y} + b_1(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(y - x) = 0$$

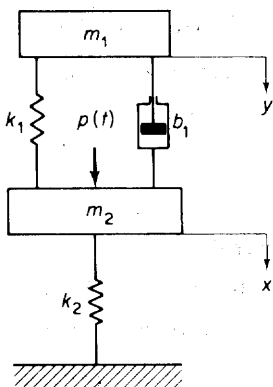


Fig. 7-69. Sistema mecánico.

Tomando la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones y suponiendo cero las condiciones iniciales, tenemos

$$(m_2 s^2 + b_1 s + k_1 + k_2)X(s) = (b_1 s + k_1)Y(s) + P(s)$$

$$(m_1 s^2 + b_1 s + k_1)Y(s) = (b_1 s + k_1)X(s)$$

Al eliminar  $Y(s)$  de estas dos últimas ecuaciones, la función de transferencia  $X(s)/P(s)$  resulta

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{m_1 s^2 + b_1 s + k_1}{(m_2 s^2 + k_2)m_1 s^2 + (m_1 s^2 + m_2 s^2 + k_2)(b_1 s + k_1)}$$

**PROBLEMA A-7-11.** Obténganse las funciones de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  y  $E_o(s)/E_i(s)$  de los sistemas mostrados en la Fig. 7-70(a) y (b), respectivamente, y muéstrese que los sistemas son análogos.

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema mecánico de la Fig. 7-70(a) es

$$b_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_1(x_i - x_o) = b_2 \dot{x}_o$$

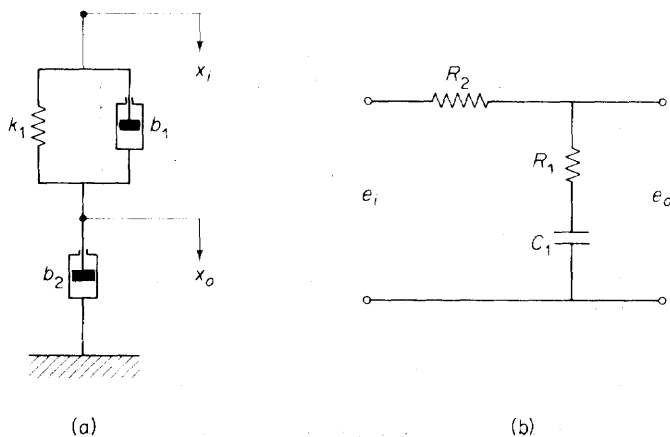


Fig. 7-70. (a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico análogo.

Así que al tomar la transformada de Laplace de esta ecuación, suponiendo cero las condiciones iniciales, tenemos

$$(b_1 s + k_1) X_i(s) = (b_1 s + k_1 + b_2 s) X_o(s)$$

La función de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  es

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_1 s + k_1}{(b_1 + b_2)s + k_1} = \frac{\frac{b_1}{k_1}s + 1}{\frac{b_1 + b_2}{k_1}s + 1}$$

A continuación, considérese el sistema eléctrico mostrado en la Fig. 7-70(b). Usando impedancias complejas, la función de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  se obtiene como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{R_2 + R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{R_1 C_1 s + 1}{(R_1 + R_2) C_1 s + 1}$$

Comparando las funciones de transferencia obtenidas, vemos que tienen la misma forma y, por lo tanto, son sistemas análogos.

**PROBLEMA A-7-12.** Encuéntrese la función de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  del sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-71(a) y muestre que este sistema es análogo al sistema eléctrico de la Fig. 7-71(b).

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico de la Fig. 7-71(a) son

$$k_1(x_i - y) = b_1(\dot{y} - \dot{x}_o)$$

$$b_1(\dot{y} - \dot{x}_o) = k_2 x_o$$

(Nótese que se transmite una fuerza igual a través de cada componente.) Al tomar la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones, suponiendo cero las condiciones

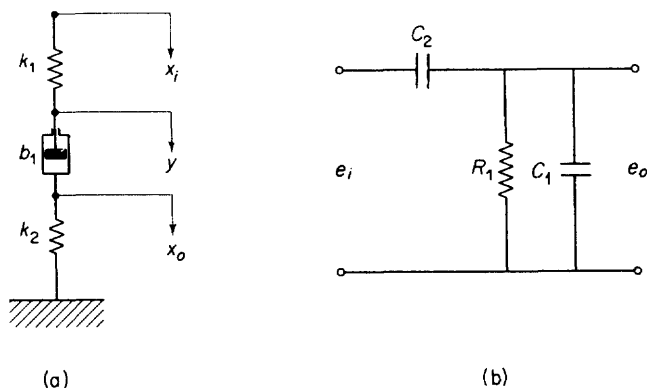


Fig. 7-71. (a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico análogo.

iniciales, tenemos

$$\begin{aligned} k_1[X_i(s) - Y(s)] &= b_1[sY(s) - sX_o(s)] \\ b_1[sY(s) - sX_o(s)] &= k_2X_o(s) \end{aligned}$$

Así que al eliminar  $Y(s)$  de las dos últimas ecuaciones, obtenemos  $X_o(s)/X_i(s)$  como

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{b_1}{k_2}s}{b_1\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)s + 1}$$

A continuación, considérese el sistema eléctrico mostrado en la Fig. 7-71(b). Usando impedancias complejas, la función de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  puede obtenerse como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{\frac{1}{C_2s} + \frac{1}{(1/R_1) + C_1s}} = \frac{R_1C_2s}{R_1(C_1 + C_2)s + 1}$$

La comparación de estas dos funciones de transferencia muestra que los dos sistemas son análogos.

**PROBLEMA A-7-13.** Después de obtener las funciones de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  y  $E_o(s)/E_i(s)$  de los sistemas mostrados en la Fig. 7-72(a) y (b), muestre que estos son sistemas análogos.

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema de la Fig. 7-72(a) son

$$\begin{aligned} k_1(x_i - x_o) &= b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) \\ b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) &= k_2y \end{aligned}$$

Al tomar la transformada de Laplace de estas dos últimas ecuaciones, suponiendo cero las condiciones iniciales, obtenemos

$$\begin{aligned} k_1[X_i(s) - X_o(s)] &= b_2[sX_o(s) - sY(s)] \\ b_2[sX_o(s) - sY(s)] &= k_2Y(s) \end{aligned}$$

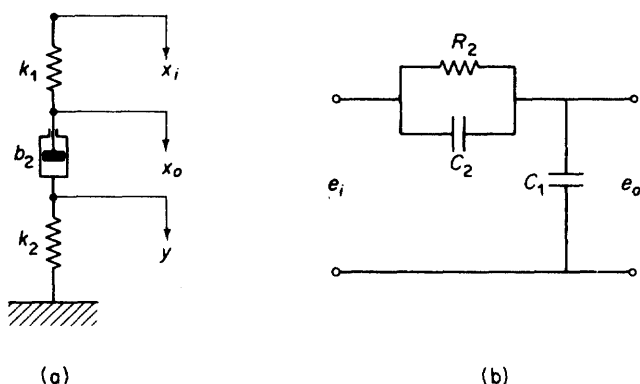


Fig. 7-72. (a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico análogo.

Al eliminar  $Y(s)$  de las dos últimas ecuaciones, la función de transferencia se hace

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{b_2}{k_2}s + 1}{b_2\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)s + 1}$$

La función de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  del sistema eléctrico de la Fig. 7-72(b) puede obtenerse como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{C_1 s}}{\frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1} + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2(C_1 + C_2)s + 1}$$

Comparando las funciones de transferencia de los sistemas mecánico y eléctrico, vemos que son sistemas análogos.

**PROBLEMA A-7-14.** Encuéntrese la función de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  del sistema mecánico de la Fig. 7-73(a) y muestre que es análogo al sistema eléctrico de la Fig. 7-73(b).

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico de la Fig. 7-73(a) son

$$\begin{aligned} b_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_1(x_i - x_o) &= b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) \\ b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) &= k_2 y \end{aligned}$$

Al tomar la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones, suponiendo cero las condiciones iniciales, tenemos

$$\begin{aligned} b_1[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1[X_i(s) - X_o(s)] &= b_2[sX_o(s) - sY(s)] \\ b_2[sX_o(s) - sY(s)] &= k_2 Y(s) \end{aligned}$$

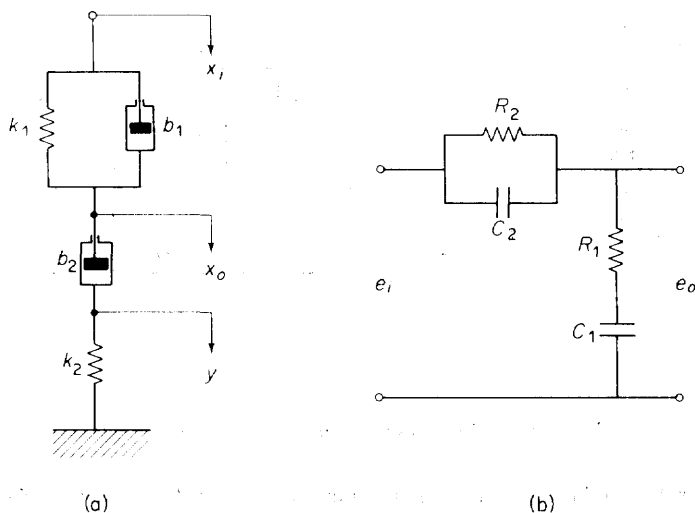


Fig. 7-73. (a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico análogo.

Si eliminamos  $Y(s)$  de las dos últimas ecuaciones, la función de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  se hace

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s + 1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s + 1\right) + \frac{b_2}{k_1}s}$$

Para el sistema eléctrico de la Fig. 7-73(b), la función de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  resulta

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{R_1 + \frac{1}{C_1s}}{\frac{1}{(1/R_2) + C_2s} + R_1 + \frac{1}{C_1s}} \\ &= \frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1) + R_2C_1s} \end{aligned}$$

Una comparación de las funciones de transferencia muestra que los sistemas de la Fig. 7-73(a) y (b) son análogos.

**PROBLEMA A-7-15.** Encuéntrese el periodo del péndulo cónico en el cual una bola de masa  $m$  da vueltas alrededor de un eje vertical fijo con una velocidad constante, como lo muestra la Fig. 7-74.

**Solución.** Mientras la bola se mantenga en un ángulo constante, la componente vertical de la tensión  $S$  en la cuerda se equilibrará con la fuerza gravitacional  $mg$  y la componente horizontal de  $S$  se balanceará con la fuerza centrífuga  $m\omega^2r$ . De modo

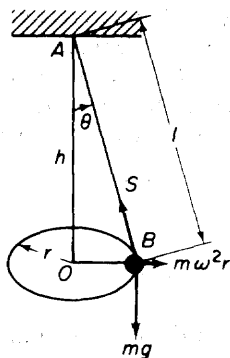


Fig. 7-74. Péndulo cónico.

que, por la geometría

$$\frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{r}{h}$$

o bien

$$\omega^2 = \frac{g}{h}$$

Por lo tanto, el periodo  $T$  es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

**PROBLEMA A-7-16.** Un muchacho monta en bicicleta con una velocidad constante de 800 m/min alrededor de una trayectoria circular horizontal de radio  $r = 50$  m inclinado hacia adentro un ángulo  $\theta$  con respecto a la vertical como en la Fig. 7-75. Determinése el ángulo de inclinación  $\theta$  necesario con el objeto de mantener un movimiento circular en estado estable.

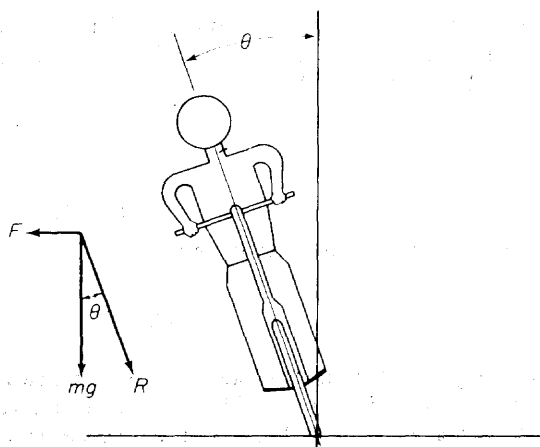


Fig. 7-75. Muchacho montando bicicleta alrededor de una trayectoria circular.

**Solución.** La fuerza centrípeta necesaria para un movimiento circular es

$$m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

La fuerza gravitacional  $mg$  puede resolverse en dos fuerzas componentes,  $F$  y  $R$  como se muestra en la Fig. 7-75. La fuerza horizontal  $F = mg \tan \theta$  debe proporcionar la fuerza centrípeta necesaria,  $mv^2/r$ . (Nótese que la fuerza horizontal  $F$  puede suministrarse mediante fricción si la superficie es suficientemente áspera. Si no lo es, el muchacho debe reducir la velocidad para evitar que derrape.) Por lo tanto,

$$mg \tan \theta = m \frac{v^2}{r}$$

o bien

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gr}$$

Al sustituir los valores numéricos dados en esta última ecuación, encontramos

$$\tan \theta = \frac{(800/60)^2}{9.81 \times 50} = 0.3625$$

o también

$$\theta = 19.9^\circ$$

**PROBLEMA A-7-17.** En sistemas rotatorios, si algunas flechas giran a velocidades críticas, pueden desarrollarse grandes vibraciones como resultado de efectos de la resonancia. En relación con la Fig. 7-76(a), donde el disco de masa  $m$  está montado en una flecha elástica cuya masa es despreciable comparada con la del disco y está colocado a media distancia entre los cojinetes, supóngase que el disco no es perfectamente simétrico y que hay una excentricidad  $e$  respecto al centro del disco. El centro geométrico del disco, el centro de masa del disco, y el centro de rotación están indicados mediante los puntos  $O$ ,  $G$  y  $R$ , respectivamente. La distancia entre los puntos  $R$  y  $O$  es  $r$  y aquella entre los puntos  $O$  y  $G$  es  $e$ . Supóngase que la constante de resorte equivalente de la flecha elástica es  $k$ , de modo que la fuerza restauradora debida a la flecha elástica es  $kr$ . ¿Cuál es la velocidad crítica del sistema?

**Solución.** En relación con el sistema de la Fig. 7-76(a), la fuerza centrífuga que actúa sobre la flecha es  $m\omega^2(e + r)$ . Esta fuerza se equilibra con la fuerza restauradora de la flecha elástica,  $kr$ . Así,

$$m\omega^2(e + r) = kr \quad (7-65)$$

o bien

$$\omega^2(e + r) = \omega_n^2 r$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . Resolviendo para  $r$ ,

$$r = \frac{e}{(\omega_n^2/\omega^2) - 1}$$

La deflexión  $r$  tiende a incrementarse rápidamente cuando  $\omega$  tiende a  $\omega_n$ . En  $\omega = \omega_n$ , ocurre la resonancia. La deflexión  $r$  se incrementa mientras que la Ec. (7-65) siga siendo válida. La velocidad crítica de la flecha es entonces

$$\omega_{cr} = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

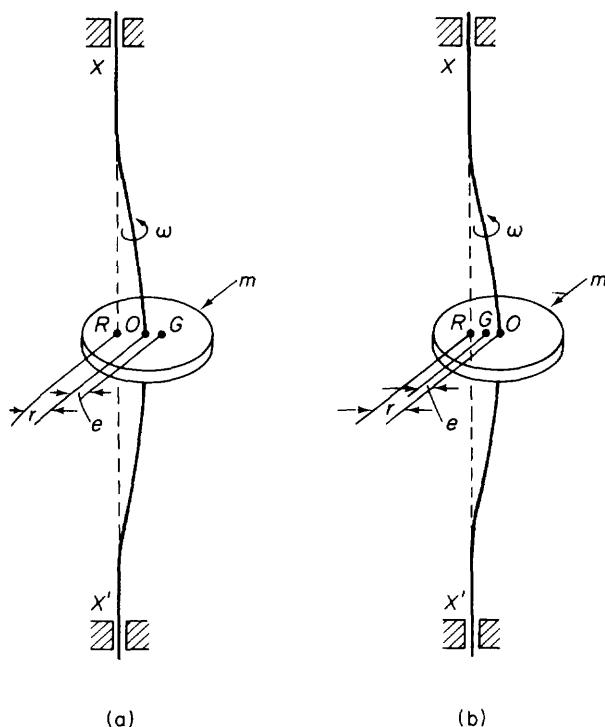


Fig. 7-76. Sistema rotatorio donde (a) la velocidad angular es menor que la velocidad crítica; (b) la velocidad angular es mayor que la velocidad crítica.

A velocidades mayores que la crítica, el centro de gravedad  $G$  estará situado como se muestra en la Fig. 7-76(b), y la fuerza centrífuga se hará

$$m\omega^2(r - e)$$

y esta fuerza se equilibra con la fuerza restauradora de la flecha elástica  $kr$ . Por lo tanto,

$$m\omega^2(r - e) = kr$$

Resolviendo para  $r$  y observando que  $k/m = \omega_n^2$ , tenemos

$$r = \frac{e}{1 - (\omega_n^2/\omega^2)}$$

Para  $\omega > \omega_n$ , la deflexión  $r$  decrece y tiende a  $e$  si se incrementa  $\omega$ . Para  $\omega \gg \omega_n$ , el centro de gravedad del disco se mueve hacia la línea  $XX'$ , y en este caso el disco no gira excéntricamente sino que la flecha deflexionada, gira excéntricamente alrededor del centro de gravedad  $G$ .

**PROBLEMA A-7-18.** Considérese el sistema masa-resorte mostrado en la Fig. 7-77. El sistema está inicialmente en reposo, o  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . En  $t = 0$  se aplica a la masa una fuerza  $p(t) = P \sin \omega t$ . Usando el método de la transformada de Laplace, determínese  $x(t)$  para  $t \geq 0$ . Cuando los valores de  $m$ ,  $k$ ,  $P$  y  $\omega$  estén dados como  $m = 1$  kg,  $k = 100$  N/m,  $P = 50$  N, y  $\omega = 5$  rad/s, encuéntrase la solución  $x(t)$ .



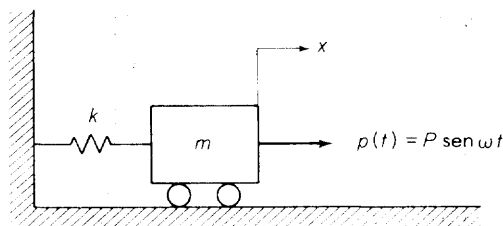


Fig. 7-77. Sistema masa-resorte.

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + kx = P \sin \omega t$$

Al definir  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ , esta última ecuación puede escribirse

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{P}{m} \sin \omega t$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación, usando las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , es

$$(s^2 + \omega_n^2)X(s) = \frac{P}{m} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{P\omega}{m} \frac{1}{(s^2 + \omega_n^2)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{P\omega}{m} \left( \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right) \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación es

$$x(t) = \frac{P}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t - \sin \omega t \right)$$

De los valores numéricos dados, encontramos  $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{100/1} = 10$  rad/s,  $P/m = 50$  N/kg, y  $\omega/\omega_n = 5/10 = 0.5$ . Sustituyendo estos valores numéricos en la última ecuación, tenemos

$$x(t) = -\frac{1}{3} \sin 10t + \frac{2}{3} \sin 5t \text{ m}$$

**PROBLEMA A-7-19.** Suponiendo que el sistema mecánico de la Fig. 7-78 esté en reposo antes de dar la fuerza de excitación  $P \sin \omega t$ , obténgase la solución completa  $x(t)$  y

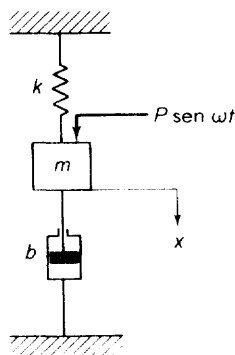


Fig. 7-78. Sistema mecánico.

la solución en estado estable  $x_{ss}(t)$ . El desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio.

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = P \sin \omega t$$

Observando que  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , la transformada de Laplace de esta ecuación es

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = P \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

o bien

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{P\omega}{(s^2 + \omega^2)(ms^2 + bs + k)} \\ &= \frac{P\omega}{m} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  y  $\zeta = b/(2\sqrt{mk})$ .  $X(s)$  puede expandirse como

$$X(s) = \frac{P\omega}{m} \left( \frac{as + c}{s^2 + \omega^2} + \frac{-as + d}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)$$

Mediante simples cálculos puede encontrarse que

$$a = \frac{-2\zeta\omega_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}$$

$$c = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}$$

$$d = \frac{4\zeta^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{P\omega}{m} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} \\ &\times \left[ \frac{-2\zeta\omega_n s + (\omega_n^2 - \omega^2)}{s^2 + \omega^2} + \frac{2\zeta\omega_n(s + \zeta\omega_n) + 2\zeta^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  da

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{P\omega}{m[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2]} \left[ -2\zeta\omega_n \cos \omega t + \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{\omega} \sin \omega t \right. \\ &\left. + 2\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \frac{2\zeta^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right] \end{aligned}$$

En estado estable ( $t \rightarrow \infty$ ) los términos que involucran a  $e^{-\zeta\omega_n t}$  tienden a cero. Así que en el estado estable

$$\begin{aligned} x_{ss}(t) &= \frac{P\omega}{m[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2]} \left( -2\zeta\omega_n \cos \omega t + \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega} \sin \omega t \right) \\ &= \frac{P\omega}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \left( b \cos \omega t + \frac{k - m\omega^2}{\omega} \sin \omega t \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

**PROBLEMA A-7-20.** Considérese el sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-79. Si se aplica una fuerza de excitación  $p(t) = P \sin \omega t$ , donde  $P = 1$  N y  $\omega = 2$  rad/s, se encuentra que la amplitud en estado estable de  $x(t)$  es de 0.05 m. Si la frecuencia de excitación se cambia a  $\omega = 10$  rad/s, se encuentra que la amplitud en estado estable de  $x(t)$  es de 0.02 m. Determinése los valores de  $b$  y  $k$ .

$$p(t) = P \sin \omega t$$

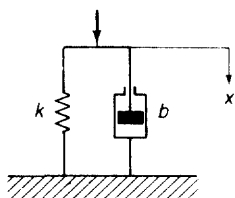


Fig. 7-79. Sistema mecánico.

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema es

$$b\dot{x} + kx = p(t)$$

La función de transferencia es

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{bs + k}$$

De donde la función de transferencia senoidal es

$$\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{1}{bj\omega + k}$$

La relación de amplitudes es

$$\left| \frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{b^2\omega^2 + k^2}}$$

Y así,

$$|X(j\omega)| = \frac{|P(j\omega)|}{\sqrt{b^2\omega^2 + k^2}}$$

Del planteo del problema, si  $p(t) = P \sin \omega t = \sin 2t$ , la amplitud de  $x(t)$  es de 0.05 m. Por lo tanto,

$$0.05 = \frac{1}{\sqrt{b^2 \times 2^2 + k^2}}$$

o bien

$$4b^2 + k^2 = 400 \quad (7-66)$$

Si  $p(t) = P \sin \omega t = \sin 10t$ , entonces la amplitud de  $x(t)$  es 0.02 m. Por lo tanto

$$0.02 = \frac{1}{\sqrt{b^2 \times 10^2 + k^2}}$$

o también

$$100b^2 + k^2 = 2500 \quad (7-67)$$

De las Ecs. (7-66) y (7-67) obtenemos

$$96b^2 = 2100$$

o bien

$$b = 4.68 \text{ N-s/m}$$

También,

$$k^2 = 312.5$$

o bien

$$k = 17.7 \text{ N/m}$$

**PROBLEMA A-7-21.** En relación con el sistema mostrado en la Fig. 7-80, supóngase que la entrada y la salida son el desplazamiento  $y$  y el desplazamiento  $x$ , respectivamente. Supóngase que  $y(t) = Y \sin \omega t$ . ¿Cuál es la salida  $x(t)$  en estado estable?

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema es

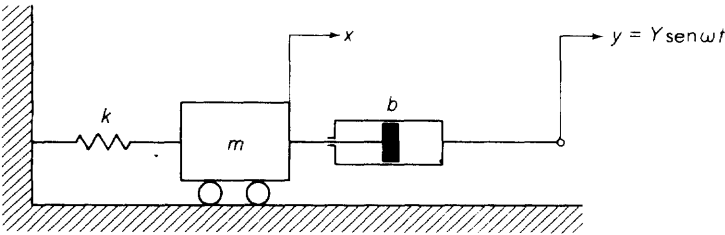
$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + kx = 0$$

o bien

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{y}$$

Por lo tanto, la función de transferencia entre  $X(s)$  y  $Y(s)$  es

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{bs}{ms^2 + bs + k}$$



**Fig. 7-80.** Sistema mecánico.

Entonces la función de transferencia senoidal es

$$\frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{bj\omega}{-m\omega^2 + bj\omega + k}$$

Así,

$$\left| \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} \right| = \frac{b\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

y

$$\begin{aligned} \phi &= \angle \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \tan^{-1} \frac{b\omega}{0} - \tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \\ &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \end{aligned}$$

Observando que  $Y(j\omega) = Y$ , la salida se obtiene como

$$x(t) = |X(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\ = \frac{b\omega Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin\left(\omega t + 90^\circ - \tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

El ángulo  $\tan^{-1}[b/(k - m\omega^2)]$  varía de  $0$  a  $180^\circ$  cuando  $\omega$  se incrementa de cero a infinito. Así que para  $\omega$  pequeña la salida adelanta a la entrada casi por  $90^\circ$ , para  $\omega$  grande la salida se atrasa respecto a la entrada casi por  $90^\circ$ .

**PROBLEMA A-7-22.** Encuéntrense los desplazamientos en estado estable  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  del sistema mostrado en la Fig. 7-81. Supóngase que los coeficientes de amortiguamiento viscoso  $b_1$  y  $b_2$  son positivos, pero despreciables por su pequeñez. (Esto significa que para obtener las ecuaciones del sistema, podemos suponer  $b_1 \doteq 0$ ,  $b_2 \doteq 0$ . Puesto que  $b_1$  y  $b_2$  son positivos, aunque pequeños, el sistema es estable y la Ec. (7-33) puede usarse para encontrar la solución en estado estable.) Los desplazamientos  $x_1$  y  $x_2$  se miden desde sus respectivas posiciones de equilibrio en ausencia de la fuerza de excitación.

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) = p(t) \quad P \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Puesto que  $b_1$  y  $b_2$  son despreciables por su pequeñez, sustituimos  $b_1 = 0$  y  $b_2 = 0$

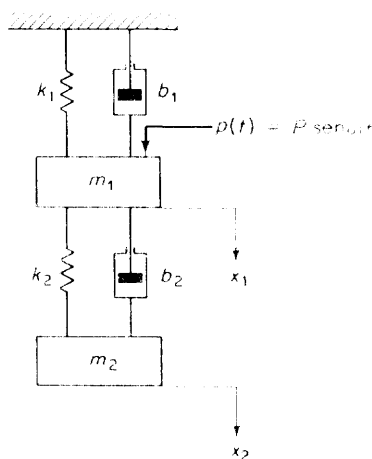


Fig. 7-81. Sistema mecánico.

en las ecuaciones de movimiento. Entonces,

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = p(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Al tomar la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones, suponiendo como las condiciones iniciales, tenemos

$$\begin{aligned}(m_1 s^2 + k_1 + k_2)X_1(s) - k_2 X_2(s) &= P(s) \\ (m_2 s^2 + k_2)X_2(s) - k_2 X_1(s) &= 0\end{aligned}$$

de la cual

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{k_2}{m_2 s^2 + k_2}$$

y

$$\frac{X_1(s)}{P(s)} = \frac{m_2 s^2 + k_2}{(m_1 s^2 + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + k_2) - k_2^2}$$

Puesto que el sistema es básicamente estable, puede aplicarse la Ec. (7-33). Al aplicar la Ec. (7-33) al presente problema las amplitudes  $|X_1(j\omega)|$  y  $|X_2(j\omega)|$  se obtienen de las funciones de transferencia senoidales como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{X_1(j\omega)}{P(j\omega)} &= \frac{k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \\ \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)} &= \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega^2}\end{aligned}$$

Así que la solución en estado estable  $x_1(t)$  es

$$\begin{aligned}x_1(t) &= |X_1(j\omega)| \sin \left[ \omega t + \frac{X_1(j\omega)}{P(j\omega)} \right] \\ &= \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) P}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \sin \omega t\end{aligned}$$

La solución en estado estable  $x_2(t)$  es

$$\begin{aligned}x_2(t) &= |X_2(j\omega)| \sin \left[ \omega t + \frac{X_2(j\omega)}{P(j\omega)} \right] \\ &= \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega^2} |X_1(j\omega)| \sin \left[ \omega t + \frac{X_2(j\omega) X_1(j\omega)}{X_1(j\omega) P(j\omega)} \right] \\ &= \frac{k_2 P}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \sin \omega t\end{aligned}$$

Nótese que los ángulos  $\angle X_1(j\omega)/P(j\omega)$  y  $\angle X_2(j\omega)/P(j\omega)$  son de  $0^\circ$  o bien de  $180^\circ$ . Los movimientos de las masas  $m_1$  y  $m_2$  están en fase o bien  $180^\circ$  desfasados de la excitación.

Nótese también que las masas  $m_1$  y  $m_2$  se mueven en la misma dirección si  $\omega < \sqrt{k_2/m_2}$  y en dirección opuesta  $\omega > \sqrt{k_2/m_2}$ . Si  $\omega = \sqrt{k_2/m_2}$ , la masa  $m_1$  permanece inmóvil, en tanto que la masa  $m_2$  se mueve senoidalmente.

**PROBLEMA A-7-23.** La figura 7-82 es un diagrama esquemático de un acelerómetro. Supóngase que la caja del acelerómetro está unida al bastidor de un avión. El acelerómetro indica la aceleración de su caja con respecto al espacio inercial. El ángulo de inclinación  $\theta$  medido desde la línea horizontal se supone constante durante el periodo de medición. Muestre que, para entradas de baja frecuencia, la aceleración de la caja relativa al espacio inercial puede determinarse mediante el desplazamiento de la masa

$m$  con respecto a su caja. En el diafragma  $x$  es el desplazamiento de la masa  $m$  relativo al espacio inercial y se mide desde la posición donde el resorte no está comprimido ni estirado y  $y$  es el desplazamiento de la caja relativo al espacio inercial.

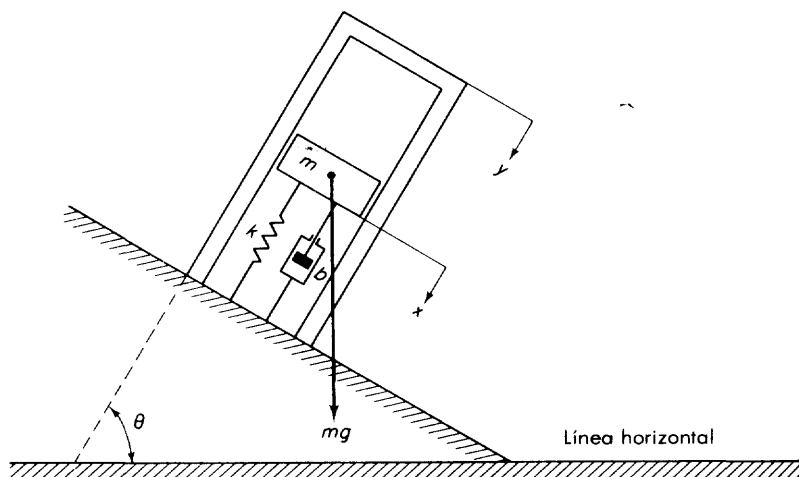


Fig. 7-82. Diagrama esquemático de un sistema de acelerómetro.

**Solución.** La ecuación de movimiento del sistema es

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = mg \sin \theta$$

En términos de un desplazamiento relativo  $x - y$ , la última ecuación se hace

$$m(\ddot{x} - \ddot{y}) + b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = mg \sin \theta - m\ddot{y} \quad (7-68)$$

Puesto que  $\theta$  se supone constante durante el periodo de medición,  $mg \sin \theta$  es constante. Por lo tanto, es posible calibrar el desplazamiento y definir una nueva variable  $z$  tal que

$$z = x - y - \frac{mg}{k} \sin \theta$$

Entonces, la Ec. (7-68) puede escribirse

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

Si la aceleración  $\ddot{y}$  (la aceleración de la caja relativa al espacio inercial) se toma como entrada al sistema y la variable  $z$  se toma como la salida, la función de transferencia del sistema se hace

$$\frac{Z(s)}{s^2 Y(s)} = \frac{-m}{ms^2 + bs + k} = \frac{-1}{s^2 + (b/m)s + (k/m)}$$

La función de transferencia senoidal es

$$\frac{Z(j\omega)}{-\omega^2 Y(j\omega)} = \frac{-1}{-\omega^2 + (b/m)j\omega + (k/m)}$$

Si la frecuencia de entrada  $\omega$  del sistema es muy baja comparada con  $\sqrt{k/m}$ , entonces

$$\frac{Z(j\omega)}{-\omega^2 Y(j\omega)} \doteq -\frac{m}{k}$$

lo cual significa que  $z = x - y - (mg/k)$  sen  $\theta$  es aproximadamente proporcional a la aceleración de entrada lentamente variable  $\ddot{y}$ . Así que para entradas de baja frecuencia, la aceleración  $\ddot{y}$  de la caja relativa al espacio inercial puede estar dada por

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\left(\ddot{y} - x + \frac{mg}{k} \text{sen } \theta\right)$$

De este modo, para entradas de baja frecuencia, la aceleración  $\ddot{y}$  de la caja relativa al espacio inercial puede determinarse mediante el desplazamiento de la masa  $m$  con respecto a su caja.

Nótese que un acelerómetro tal como éste debe tener una frecuencia natural no amortiguada  $\sqrt{k/m}$  suficientemente alta comparada con la mayor frecuencia de entrada que se vaya a medir.

**PROBLEMA A-7-24.** Una máquina rotatoria con una masa de 100 kg, montada sobre un aislador gira a una velocidad constante de 10 Hz. Una masa desbalanceada  $m$  ubicada a una distancia  $r$  del centro del rotor está emitiendo vibraciones a una frecuencia  $\omega$  muy próxima a la frecuencia natural  $\omega_n$  del sistema con el resultado de que la máquina vibra violentamente y se transmite a la cimentación una gran fuerza vibratoria.

Diséñese un absorbedor de vibración dinámica para reducir la vibración. Cuando el absorbedor de vibración dinámica se agrega a la máquina rotatoria como se muestra en la Fig. 7-83, el sistema entero se hace un sistema de dos grados de libertad. Determinése la masa  $m_a$  y la constante del resorte  $k_a$  del absorbedor de vibración dinámica tal que la más baja frecuencia natural sea 20% de la frecuencia de operación. Determinése también la más alta frecuencia natural del sistema. Supóngase que los valores de  $b$  (coeficiente de fricción viscosa del aislador) y  $b_a$  (coeficiente de fricción viscosa del absorbedor de vibración dinámica) son positivos pero despreciables por su pequeñez. (Nótese que puesto que los valores de  $b$  y  $b_a$  son positivos, aunque

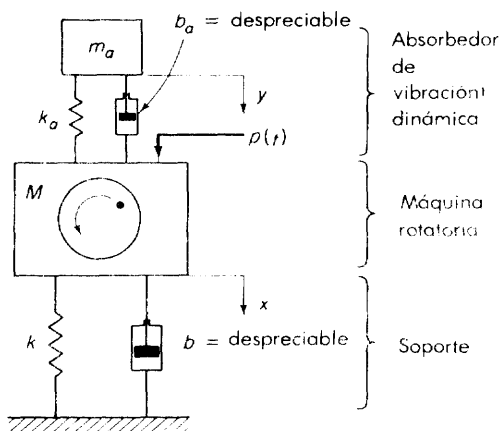


Fig. 7-83. Máquina rotatoria con un absorbedor de vibración dinámica.



pequeños, el sistema es estable. Por lo tanto, los desplazamientos pueden obtenerse mediante el uso de la función de transferencia senoidal.)

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx + b_a(\dot{x} - \dot{y}) + k_a(x - y) = p(t) = m\omega^2 r \sin \omega t$$

$$m_a\ddot{y} + b_a(\dot{y} - \dot{x}) + k_a(y - x) = 0$$

donde  $x$  y  $y$  son desplazamientos de la masa  $M$  y de la masa  $m_a$ , respectivamente, y ambos  $x$  y  $y$  se miden desde sus respectivas posiciones de equilibrio. Puesto que  $b \neq 0$  y  $b_a \neq 0$ , las dos últimas ecuaciones pueden simplificarse a

$$M\ddot{x} + kx + k_a(x - y) = p(t)$$

$$m_a\ddot{y} + k_a(y - x) = 0$$

Cuando se desprecia la fricción viscosa, el sistema se hace equivalente al mostrado en la Fig. 7-42(b) con  $b = 0$ . Por lo tanto, de la Ec. (7-44) obtenemos la amplitud de  $x(t)$  como

$$|X(j\omega)| = \left| \frac{m\omega^2 r (k_a - m_a\omega^2)}{(k + k_a - M\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - k_a^2} \right| \quad (7-69)$$

Para hacer esta amplitud igual a cero, escogemos

$$k_a = m_a\omega^2$$

Puesto que la velocidad de operación es de 10 Hz, tenemos

$$\omega = 10 \times 2\pi = 62.8 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto,

$$\frac{k_a}{m_a} = 62.8^2 = 3944$$

Las dos frecuencias naturales  $\omega_1$  y  $\omega_2$  (donde  $\omega_1 < \omega_2$ ) el sistema entero pueden encontrarse de la ecuación característica. [El denominador de la Ec. (7-69) es el polinomio característico.]

$$(k + k_a - M\omega_i^2)(k_a - m_a\omega_i^2) - k_a^2 = 0 \quad (i = 1, 2)$$

o bien

$$\left(1 + \frac{k_a}{k} - \frac{M}{k}\omega_i^2\right)\left(1 - \frac{m_a}{k_a}\omega_i^2\right) - \frac{k_a}{k} = 0 \quad (7-70)$$

Nótese que en el presente sistema, puesto que la frecuencia natural del sistema  $\omega_n = \sqrt{k/M}$  está muy próxima a la frecuencia de operación  $\omega = \sqrt{k_a/m_a}$ , podemos establecer

$$\sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}} = \omega = 62.8$$

Por el planteo del problema la más baja frecuencia natural debe ser 20% diferente de la frecuencia de operación  $\omega$ . Puesto que  $\omega_1 < \omega$ , esto significa que

$$\omega_1 = 0.8\omega = 0.8 \times 62.8$$

Al sustituir  $\omega_1 = \omega_1$  y  $k/M = k_a/m_a = \omega^2$  en la Ec. (7-70), tenemos

$$\left(1 + \frac{k_a}{k} - \frac{\omega^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2}\right) - \frac{k_a}{k} = 0$$

Sustituyendo  $\omega_1/\omega = 0.8$  en esta última ecuación y simplificando da

$$\left(1 + \frac{k_a}{k} - 0.8^2\right)(1 - 0.8^2) - \frac{k_a}{k} = 0$$

Resolviendo para  $k_a/k$ ,

$$\frac{k_a}{k} = 0.2025$$

Se sigue que

$$\frac{m_a}{M} = \frac{k_a}{k} = 0.2025$$

Puesto que  $M = 100$  kg, tenemos

$$m_a = 0.2025 \times 100 = 20.25 \text{ kg}$$

Puesto que

$$\frac{k}{M} = \frac{k_a}{m_a} = 62.8^2$$

obtenemos

$$k_a = (62.8)^2 m_a = (62.8)^2 (20.25) = 79.9 \times 10^3 \text{ N/m}$$

Así que la masa y la constante del resorte del absorbador de vibración dinámica son  $m_a = 20.25$  kg y  $k_a = 79.9 \times 10^3$  N/m, respectivamente.

Las dos frecuencias naturales  $\omega_1$  y  $\omega_2$  pueden determinarse sustituyendo  $k_a/k = 0.2025$  en la ecuación

$$\left(1 + \frac{k_a}{k} - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}\right) - \frac{k_a}{k} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

o bien

$$\left(1 + 0.2025 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}\right) - 0.2025 = 0$$

Resolviendo para  $\omega_i/\omega$ ,

$$\frac{\omega_i^2}{\omega^2} = 0.64 \text{ o sea } 1.5625$$

Puesto que  $\omega_1 < \omega_2$ ,

$$\frac{\omega_1^2}{\omega^2} = 0.64, \quad \frac{\omega_2^2}{\omega^2} = 1.5625$$

Por lo tanto,

$$\omega_1 = 0.8\omega = 0.8 \times 62.8 = 50.24 \text{ rad/s} = 8 \text{ Hz} = 480 \text{ cpm}$$

y

$$\omega_2 = 1.25\omega = 1.25 \times 62.8 = 78.5 \text{ rad/s} = 12.5 \text{ Hz} = 750 \text{ cpm}$$

**PROBLEMA A-7-25.** Considérese una ecuación diferencial en tiempo real  $t$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.01\frac{dx}{dt} + 0.0001x = 0, \quad x(0) = 10, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Suponiendo que la resolvemos usando una computadora analógica, determínese el factor de escala de tiempo  $\lambda$  (donde  $\tau = \lambda t$ ) tal que el tiempo de asentamiento  $\tau_s$  sea de 10 segundos.

**Solución.** Al cambiar el tiempo real  $t$  a tiempo de computadora  $\tau$ , donde  $\tau = \lambda t$ , la ecuación diferencial dada puede escribirse

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{0.01}{\lambda} \frac{dx}{d\tau} + \frac{0.0001}{\lambda^2} x = 0$$

De esta última ecuación obtenemos  $\omega_n = 0.01/\lambda$  y  $\zeta = 0.5$ . El tiempo de asentamiento  $\tau_s$  es cuatro veces la constante de tiempo,  $4/\zeta\omega_n$ . Por lo tanto,

$$\tau_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4\lambda}{0.005}$$

Asignando  $\tau_s = 10$ , obtenemos  $\lambda = 0.0125$ .

**PROBLEMA A-7-26.** En el sistema de ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 4x = 40 \cdot 1(t)$$

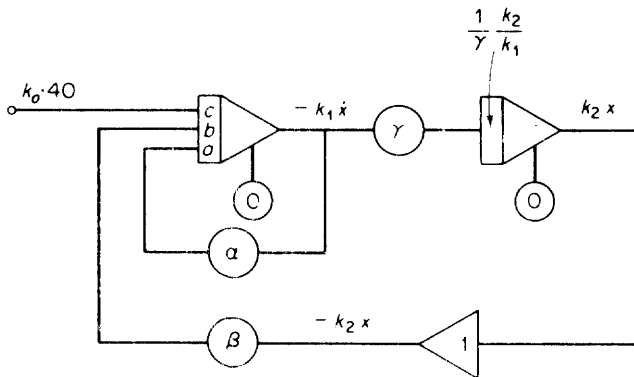
el segundo miembro de la ecuación representa la función de excitación, una función escalón de magnitud 40 que ocurre en  $t = 0$ . Las condiciones iniciales son  $x(0) = 0$ , y  $\dot{x}(0) = 0$ . Trácese un diagrama de computadora analógica para obtener la respuesta  $x(t)$ . Hágase el voltaje de salida máximo de cada amplificador de  $\pm 80$  V.

**Solución.** Para  $t > 0$ , tenemos

$$\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 4x = 40$$

Resolviendo esta última ecuación para la derivada de más alto orden resulta

$$\ddot{x} = -0.4\dot{x} - 4x + 40 \quad (7-71)$$



**Fig. 7-84.** Diagrama de computadora analógica para la determinación de factores de escala de magnitud.

Definamos  $k_0$ ,  $k_1$  y  $k_2$  como los factores de escala de magnitud y reescribamos la Ec. (7-71) como

$$\ddot{x} = -\frac{0.4}{k_1}(k_1\dot{x}) - \frac{4}{k_2}(k_2x) + \frac{1}{k_0}(k_0 \cdot 40)$$

En relación con la Fig. 7-84, el voltaje de entrada es  $k_0 \cdot 40$ , el voltaje de salida del primer integrador es  $-k_1 \dot{x}$ , y el voltaje de salida del segundo integrador es  $k_2 x$ . (El voltaje de salida del inversor del signo es  $-k_2 x$ ). Por el planteo del problema los voltajes de salida máximos deben ser  $\mp 80$  V.

Se pueden obtener estimaciones conservadoras de los valores máximos de  $x$  y  $\dot{x}$  al despreciar el término de amortiguamiento en la ecuación del sistema. La ecuación simplificada es

$$\ddot{x} + 4x = 40, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

La solución de esta ecuación simplificada es

$$x(t) = 10 - 10 \cos 2t$$

Por lo tanto,

$$\dot{x}(t) = 20 \sin 2t$$

Los valores máximos son

$$|x|_{\text{máx}} = 20$$

$$|\dot{x}|_{\text{máx}} = 20$$

Escogemos ahora  $k_0$ ,  $k_1$  y  $k_2$  de modo que los valores máximos de  $k_0 \cdot 40$ ,  $|-k_1 \dot{x}|$ , y  $|k_2 x|$  sean 80 V. Así tenemos

$$k_0 = \frac{80}{40} = 2$$

$$k_1 = \frac{80}{|\dot{x}|_{\text{máx}}} = \frac{80}{20} = 4$$

$$k_2 = \frac{80}{|x|_{\text{máx}}} = \frac{80}{20} = 4$$

Se sigue que

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{4}{4} = 1$$

Puesto que  $k_2/k_1 = 1$ , escogemos  $\gamma = 1$ . (El potenciómetro  $\gamma$  puede ser eliminado.) La constante del segundo integrador  $(1/\gamma)(k_2/k_1)$  se hace 1. Nótese que de la Fig. 7-84, obtenemos

$$k_1 \ddot{x} = a\alpha(-k_1 \dot{x}) + b\beta(-k_2 x) + ck_0 40$$

o bien

$$\ddot{x} = -a\alpha \dot{x} - b\beta \frac{k_2}{k_1} x + c \frac{k_0}{k_1} 40$$

Observando que  $k_2/k_1 = 1$  y  $k_0/k_1 = 0.5$ , la última ecuación se hace

$$\ddot{x} = -a\alpha \dot{x} - b\beta x + 20c \quad (7-72)$$

Una comparación de las Ecs. (7-71) y (7-72) muestra que

$$a\alpha = 0.4, \quad b\beta = 4, \quad 20c = 40$$

Por lo tanto, podemos escoger  $a = 1$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $b = 4$ ,  $\beta = 1$ , y  $c = 2$ . Entonces quedan determinadas todas las constantes desconocidas en la Fig. 7-84. La figura 7-85 es el diagrama de computadora para obtener la respuesta  $x(t)$ . [La salida del segundo integrador da  $4x(t)$ .]

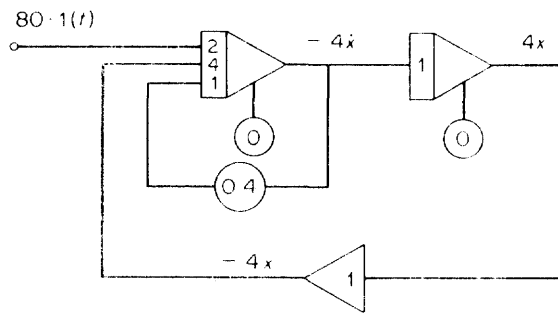


Fig. 7-85. Diagrama de computadora analógica.

**PROBLEMA A-7-27.** Encuéntrese la ecuación diferencial representada por el diagrama de computadora analógica de la Fig. 7-86.

**Solución.** En relación con el diagrama, vemos que

$$\dot{x} = -0.5u + y + 1.5x$$

$$\dot{y} = u - x$$

Eliminando  $y$  y  $\dot{y}$  de las dos ecuaciones resulta la ecuación diferencial del sistema.

$$\ddot{x} + 1.5\dot{x} + x = \dot{u} + 0.5\dot{u}$$

donde  $x(0) = 0$  y  $\int (x - u) dt \Big|_{t=0} = 0$ .

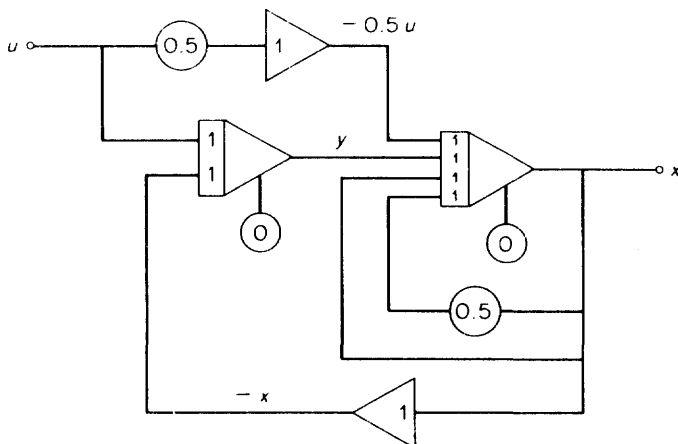


Fig. 7-86. Diagrama de computadora analógica.

**PROBLEMA A-7-28.** Trácese un diagrama de computadora analógica para el sistema de la siguiente función de transferencia, que incluye dinámica de un numerador.

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{5s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

**Solución.** Al reescribir la función de transferencia, obtenemos

$$s^2 X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = 5sU(s) + U(s)$$

Resolviendo para  $s^2 X(s)$ ,

$$s^2 X(s) = s[5U(s) + 3X(s)] + U(s) + 2X(s)$$

o bien

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s}[5U(s) + 3X(s)] + \frac{1}{s^2}[U(s) + 2X(s)] \\ &= \frac{1}{s}\left\{5U(s) + 3X(s) + \frac{1}{s}[U(s) + 2X(s)]\right\} \end{aligned}$$

En la Fig. 7-87 se muestra un diagrama de computadora analógica para esta última ecuación.

**PROBLEMA A-7-29.** Trácese un diagrama de computadora analógica para el sistema de la función de transferencia

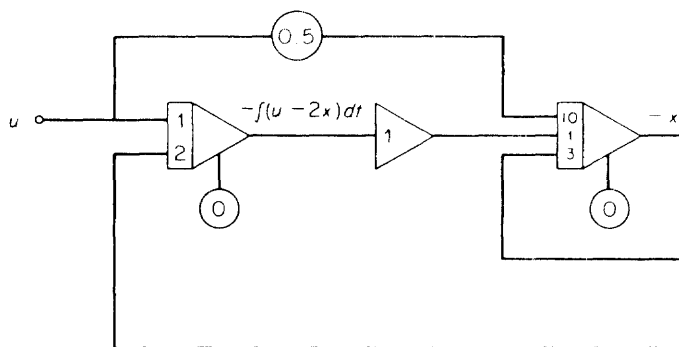
$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

**Solución.** Al reescribir la función de transferencia, tenemos

$$(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)X(s) = (b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3)U(s)$$

Resolviendo para  $s^3 X(s)$ , obtenemos

$$s^3 X(s) = (b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3)U(s) - (a_1 s^2 + a_2 s + a_3)X(s)$$



**Fig. 7-87.** Diagrama de computadora analógica.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X(s) &= b_0 U(s) + \frac{1}{s}[b_1 U(s) - a_1 X(s)] + \frac{1}{s^2}[b_2 U(s) - a_2 X(s)] \\ &\quad + \frac{1}{s^3}[b_3 U(s) - a_3 X(s)] \\ &= b_0 U(s) + \frac{1}{s}\left([b_1 U(s) - a_1 X(s)] + \frac{1}{s}[b_2 U(s) - a_2 X(s)]\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{s}[b_3 U(s) - a_3 X(s)]\right) \end{aligned}$$

En la Fig. 7-88 se muestra un diagrama de computadora analógica para representar este sistema.

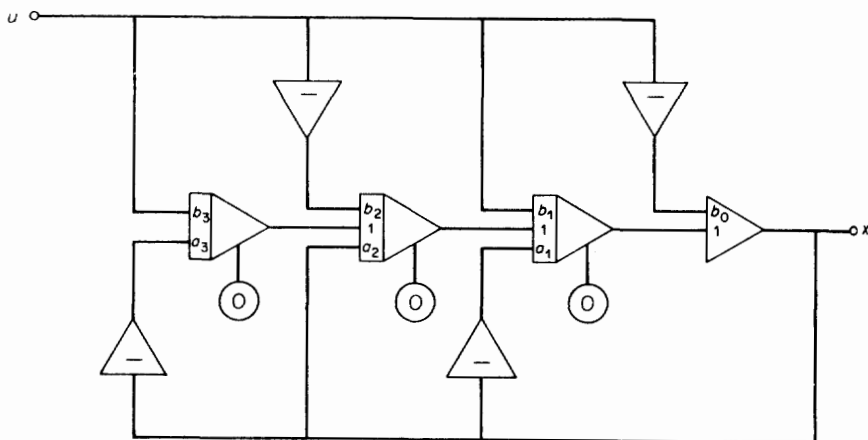


Fig. 7-88. Diagrama de computadora analógica.

**PROBLEMA A-7-30.** Trácese un diagrama de computadora analógica para simular el sistema mecánico de la Fig. 7-89. Supóngase  $x(0) = 0$  y  $y(0) = 0$ . Los valores numéricos de  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $k_1$  y  $k_2$  se dan como  $b_1 = 20$  N-s/m,  $b_2 = 30$  N-s/m,  $k_1 = 100$  N/m y  $k_2 = 60$  N/m.

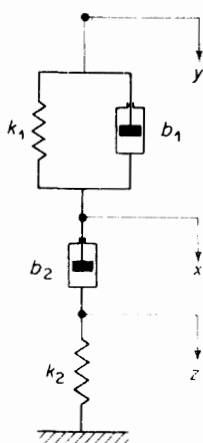


Fig. 7-89. Sistema mecánico.

**Solución.** Las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$b_1(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(y - x) = b_2(\dot{x} - \dot{z})$$

$$b_2(\dot{x} - \dot{z}) = k_2 z$$

Al tomar la transformada de Laplace de estas ecuaciones, sustituyendo las condiciones iniciales en cero y eliminando  $Z(s)$ , encontramos

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{(b_1s + k_1)(b_2s + k_2)}{(b_1s + k_1)(b_2s + k_2) + b_2k_2s}$$

Sustituyendo los valores numéricos dados en esta última ecuación da

$$\begin{aligned}\frac{X(s)}{Y(s)} &= \frac{(20s + 100)(30s + 60)}{(20s + 100)(30s + 60) + 30 \times 60s} \\ &= \frac{s^2 + 7s + 10}{s^2 + 10s + 10}\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$(s^2 + 10s + 10)X(s) = (s^2 + 7s + 10)Y(s)$$

Resolviendo para  $s^2 X(s)$ , tenemos

$$s^2 X(s) = (s^2 + 7s + 10)Y(s) - (10s + 10)X(s)$$

Así,

$$X(s) = Y(s) + \frac{1}{s} \left\{ [7Y(s) - 10X(s)] + \frac{1}{s} [10Y(s) - 10X(s)] \right\}$$

En la Fig. 7-90 se muestra un diagrama de computadora analógica para esta ecuación.

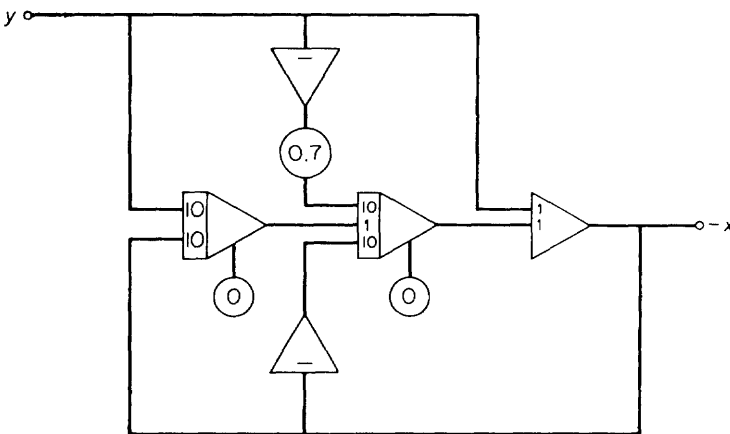


Fig. 7-90. Diagrama de computadora analógica.



## PROBLEMAS

**PROBLEMA B-7-1.** En el sistema de la Fig. 7-91 el interruptor se cierra en  $t = 0$ . Encuentre el voltaje  $e_o(t)$ . Suponga al capacitor descargado inicialmente.

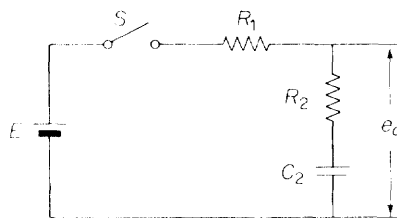


Fig. 7-91. Sistema eléctrico.

**PROBLEMA B-7-2.** En relación con la Fig. 7-92 la fuente de voltaje  $E$  se conecta súbitamente por medio del interruptor  $S$  en el instante  $t = 0$ . Suponga al capacitor  $C$  descargado inicialmente y que la inductancia  $L$  no lleva corriente inicial. ¿Cuál es la corriente  $i(t)$ ?

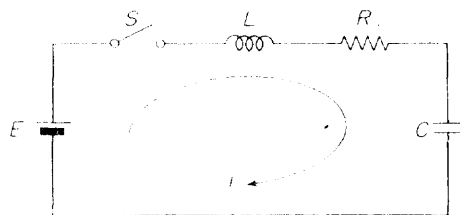


Fig. 7-92. Sistema eléctrico.

**PROBLEMA B-7-3.** La masa  $m$  ( $m = 1$  kg) está vibrando inicialmente en el sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-93. En  $t = 0$  golpeamos la masa con una fuerza impulsiva  $p(t)$  cuya magnitud es de 10 N. Suponiendo que la constante del resorte  $k$  es de 100 N/m y que  $x(0^-) = 0.1$  m,  $\dot{x}(0^-) = 1$  m/s, encuentre el desplazamiento como función del tiempo  $t$ . El desplazamiento  $x(t)$  se mide desde la posición de equilibrio en ausencia de la fuerza de excitación.

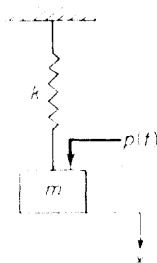
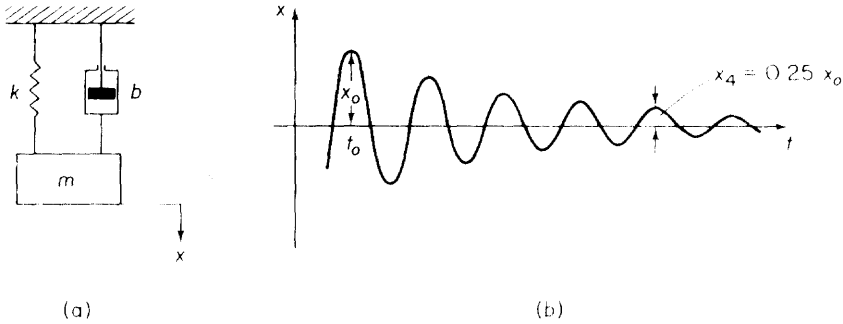


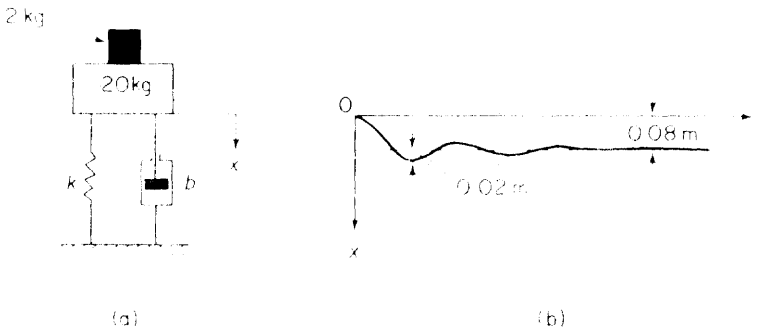
Fig. 7-93. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-7-4.** Una vibración libre del sistema mecánico de la Fig. 7-94(a) indica que la amplitud de la vibración decrece a 25% de su valor en  $t = t_0$  después de cuatro ciclos consecutivos de movimiento, como lo muestra la Fig. 7-94(b). Determine el coeficiente de fricción viscosa  $b$  del sistema si  $m = 1$  kg y  $k = 500$  N/m.



**Fig. 7-94.** (a) Sistema mecánico; (b) porción de una curva de vibración libre.

**PROBLEMA B-7-5.** Una masa de 20 kg está soportada por un resorte y un amortiguador como se muestra en la Fig. 7-95(a). Cuando se agrega una masa de 2 kg a los 20 kg masa, el sistema vibra como se encuentra en la Fig. 7-95(b). Determine la constante del resorte  $k$  y el coeficiente de fricción viscosa  $b$ . [Note que  $(0.02/0.08) \times 100 = 25\%$  de la diferencia máxima que corresponde a  $\zeta = 0.4$ .]



**Fig. 7-95.** (a) Sistema mecánico; (b) curva de respuesta escalon.

**PROBLEMA B-7-6.** Considere el sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-96. El péndulo  $m_2$  está soportado por la masa  $m_1$ , la cual vibra a causa de una conexión elástica. Obtenga las ecuaciones de movimiento del sistema.

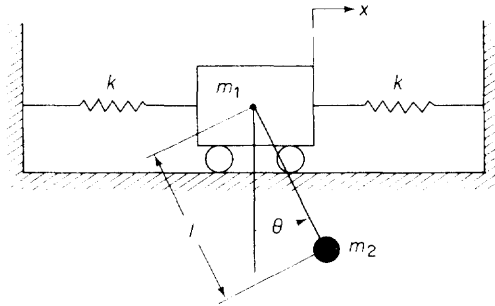


Fig. 7-96. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-7-7.** El sistema mostrado en la Fig. 7-97 está inicialmente en reposo. En  $t = 0$  una masa  $m$  se pone en movimiento por una fuerza impulsiva cuya magnitud es la unidad. ¿Puede la masa detenerse por otra fuerza impulsiva semejante?

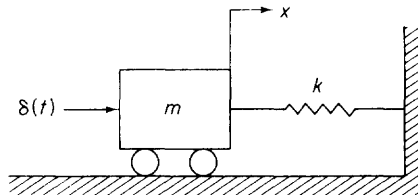


Fig. 7-97. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-7-8.** La Fig. 7-98 muestra un sistema que consiste en una masa y un amortiguador. El sistema está inicialmente en reposo. Cuando se pone en movimiento mediante una fuerza impulsiva cuya magnitud es la unidad, encuentre la respuesta  $x(t)$ . Determine la velocidad inicial de la masa  $m$ .

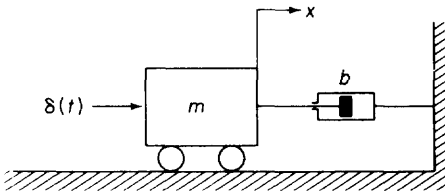
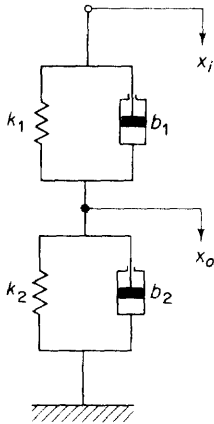
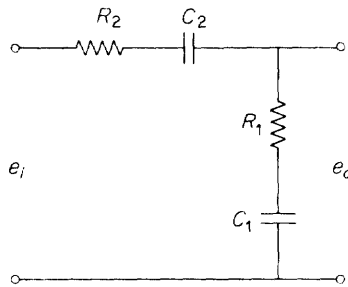


Fig. 7-98. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-7-9.** Encuentre las funciones de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  y  $E_o(s)/E_i(s)$  de los sistemas mecánico y eléctrico mostrados en la Fig. 7-99(a) y (b), respectivamente.



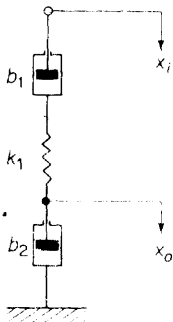
(a)



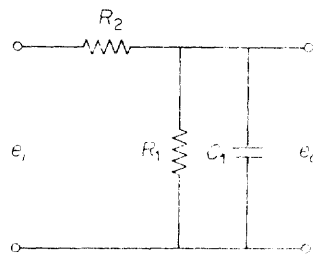
(b)

**Fig. 7-99.** (a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico.

**PROBLEMA B-7-10.** Obtenga las funciones de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  y  $E_o(s)/E_i(s)$  de los sistemas mostrados en la Fig. 7-100(a) y (b) y muestre que son sistemas análogos.



(a)



(b)

**Fig. 7-100.** (a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico análogo.

**PROBLEMA B-7-11.** Después de encontrar la función de transferencia  $X_o(s)/X_i(s)$  del sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-101, obtenga un sistema eléctrico análogo.

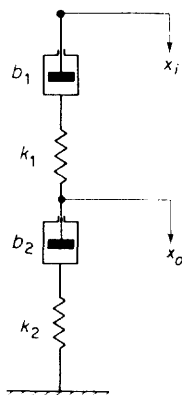


Fig. 7-101. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-7-12.** Encuentre la función de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  del sistema eléctrico mostrado en la Fig. 7-102. Además, encuentre un sistema mecánico análogo.

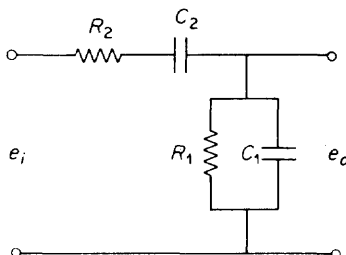


Fig. 7-102. Sistema eléctrico.

**PROBLEMA B-7-13.** Obtenga tanto la función de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  del sistema mecánico mostrado en la Fig. 7-103, como también un sistema eléctrico análogo.

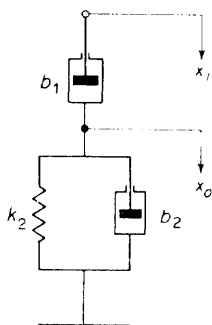
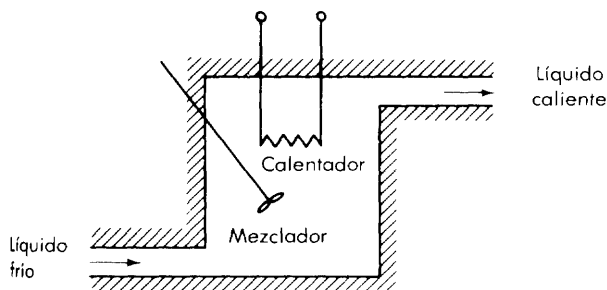
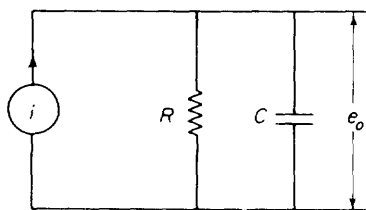


Fig. 7-103. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-7-14.** En el sistema térmico mostrado en la Fig. 7-104(a) se supone que el tanque está aislado para evitar pérdidas de calor hacia el aire del medio ambiente, que no hay almacenamiento de calor en el aislamiento y que el líquido en el tanque está perfectamente mezclado de modo que se le tiene a una temperatura uniforme. (Así que puede usarse una sola temperatura para denotar la temperatura del líquido en el tanque y la del líquido que sale.) Posteriormente se supone que la razón de flujo de líquido hacia el tanque y saliendo del tanque es constante e igual a  $\bar{\Theta}_i$  K. Para  $t < 0$  el sistema se encuentra en estado permanente y el calentador suministra calor a razón de  $\bar{H}$  J/s. En  $t = 0$  la razón de entrada de calor se cambia de  $\bar{H}$  a  $\bar{H} + h$  J/s. Este cambio causa que la temperatura del líquido que sale cambie de  $\bar{\Theta}_0$  a  $\bar{\Theta}_0 + \theta$  K. Suponga que el cambio en temperatura  $\theta$  K, es la salida y que el cambio en la entrada de calor  $h$  J/s, es la entrada al sistema. Determine la función de transferencia  $\Theta(s)/H(s)$ , donde  $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$  y  $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ . Muestre que el sistema térmico es análogo al sistema eléctrico mostrado en la Fig. 7-104(b), donde el voltaje  $e_o$  es la salida y la corriente  $i$  es la entrada.



(a)

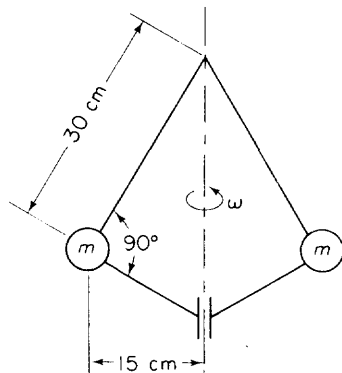


(b)

**Fig. 7-104.** (a) Sistema térmico; (b) sistema eléctrico análogo.

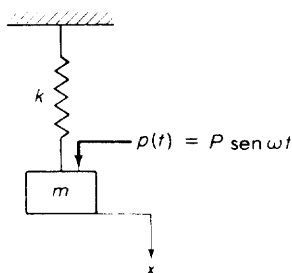
**PROBLEMA B-7-15.** Una piedra con masa de 0.1 kg está unida al extremo de una cuerda de 1 m y gira a una velocidad angular de 1 Hz. Encuentre la tensión en la cuerda. Si la máxima tensión que la cuerda permite es de 40 N, ¿cuál es la velocidad angular máxima (en Hz) que puede obtenerse sin romper la cuerda?

**PROBLEMA B-7-16.** En el regulador de velocidad de la Fig. 7-105, ¿cuál es la frecuencia  $\omega$  necesaria para mantener la configuración mostrada en el diagrama?



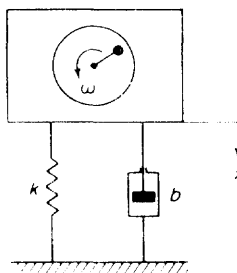
**Fig. 7-105.** Sistema regulador de velocidad.

**PROBLEMA B-7-17.** El sistema masa-resorte mostrado en la Fig. 7-106 está inicialmente en reposo. Si se excita la masa  $m$  mediante una fuerza senoidal  $p(t) = P \sin \omega t$ , ¿cuál es la respuesta  $x(t)$ ? Suponga que  $m = 1$  kg,  $K = 100$  N/m,  $P = 5$  N, y  $\omega = 2$  rad/s.



**Fig. 7-106.** Sistema masa-resorte.

**PROBLEMA B-7-18.** Una máquina rotatoria de masa  $M = 100$  kg tiene una masa desbalanceada  $m = 0.2$  kg a una distancia  $r = 0.5$  m del centro de rotación. (La masa  $M$  incluye a la masa  $m$ .) La velocidad de operación es de 10 Hz. Suponga que la máquina está montada sobre un aislador que consta de un resorte y un amortiguador como se muestra en la Fig. 7-107. Si se desea tener  $\zeta = 0.2$ , especifique la constante del resorte  $k$  tal que solamente 10% de la fuerza de excitación se transmita a la cimentación. Determine la amplitud de la fuerza transmitida.



**Fig. 7-107.** Máquina rotatoria montada sobre un aislador de vibración.

**PROBLEMA B-7-19.** En la Fig. 7-108 un instrumento está sujeto a una base cuyo movimiento se va a medir. El movimiento relativo entre la masa  $m$  y la base, registrado en un tambor rotatorio indicará el movimiento de la base. Suponga que  $x$  es el desplazamiento de la masa,  $y$  es el desplazamiento de la base,  $z = x - y$  es el movimiento de la pluma relativo a la base. Si el movimiento de la base es  $y = Y \sin \omega t$  ¿cuál es la relación de amplitudes de  $z$  con respecto a  $y$  en estado estable? Muestre que si  $\omega \gg \omega_n$ , donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ , el dispositivo puede usarse para medir el desplazamiento de la base, y  $\omega \ll \omega_n$ , éste puede usarse para medir la aceleración de la base.

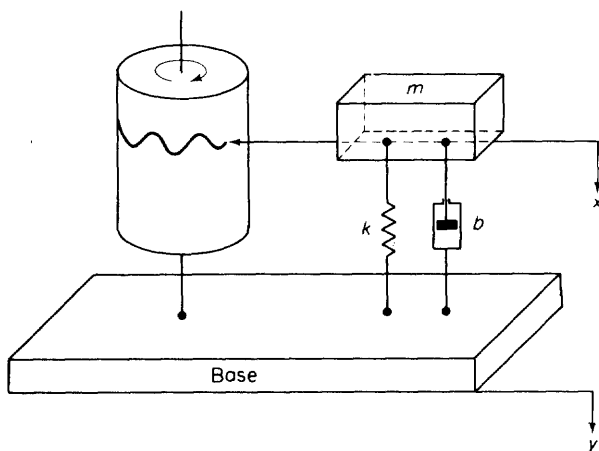


Fig. 7-108. Instrumento de medición de movimiento o aceleración.

**PROBLEMA B-7-20.** La figura 7-109 muestra una máquina  $m$  montada sobre un aislador en el cual el resorte  $k_1$  es el resorte que soporta a la carga y el amortiguador viscoso  $b_2$  está en serie con el resorte  $k_2$ . Determine la transmisibilidad de la fuerza cuando la masa  $m$  esté sometida a una fuerza de excitación  $p(t) = P \sin \omega t$ . Determine también la amplitud de la fuerza transmitida a la cimentación.

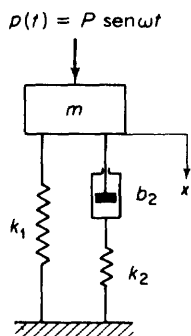
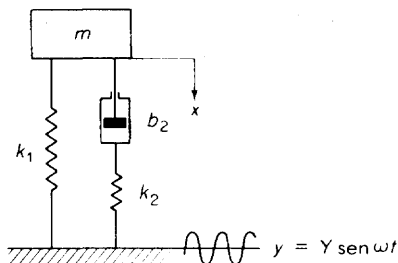


Fig. 7-109. Máquina montada sobre un aislador de vibración.

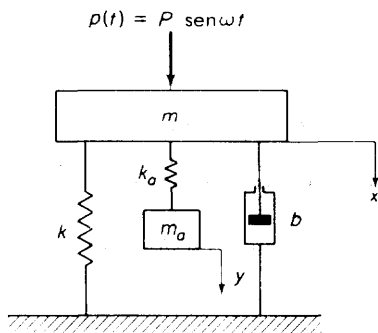


**PROBLEMA B-7-21.** Una máquina  $m$  está montada sobre un aislador en la Fig. 7-110. Si la cimentación está vibrando de acuerdo con  $y = Y \sin \omega t$ , donde  $y$  es el desplazamiento de la cimentación, encuentre la amplitud de vibración de la máquina. Determine la transmisibilidad del movimiento.



**Fig. 7-110.** Máquina montada sobre un aislador de vibración.

**PROBLEMA B-7-22.** La figura 7-111 muestra una máquina con un absorbedor de vibración dinámica. La frecuencia natural no amortiguada del sistema en ausencia del absorbedor de vibración dinámica es  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . Suponga que la frecuencia de operación  $\omega$  está próxima a  $\omega_n$ . Si el absorbedor de vibración dinámica se sintoniza de modo que  $\sqrt{k_a/m_a} = \omega$ , ¿cuál es la amplitud de la masa  $m_a$  del absorbedor de vibración?



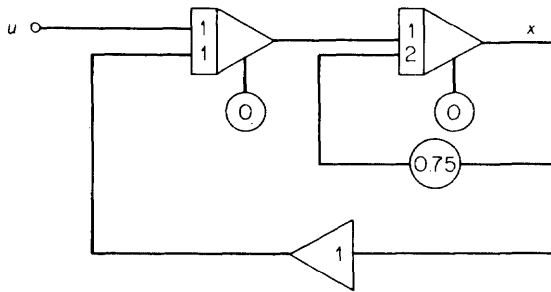
**Fig. 7-111.** Máquina con un absorbedor de vibración dinámica.

**PROBLEMA B-7-23.** Al resolver la siguiente ecuación diferencial por medio de una computadora analógica

$$50\ddot{x} + 2\dot{x} + 0.02x = \sin t$$

es deseable emplear una asignación de escala de tiempo con el objeto de reducir la variación de las magnitudes de los coeficientes y ajustar la velocidad de respuesta. Determine un factor de escala de tiempo  $\lambda$  adecuado para que el tiempo de asentamiento sea de 50 segundos.

**PROBLEMA B-7-24.** Obtenga la función de transferencia  $X(s)/U(s)$  del sistema mostrado en la Fig. 7-112.



**Fig. 7-112.** Diagrama de computadora analógica para simular un sistema.

**PROBLEMA B-7-25.** Trace un diagrama de computadora analógica para generar una señal

$$x(t) = 80e^{-t} \cos t$$

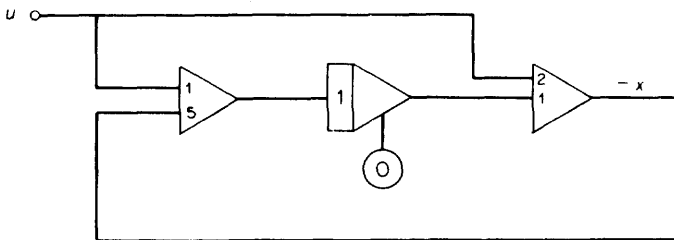
Use el número mínimo de amplificadores operacionales.

**PROBLEMA B-7-26.** Trace un diagrama de computadora analógica para resolver la ecuación

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 10 \cdot 1(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Determine los factores de escala de magnitud de modo que el voltaje de salida máximo de cada amplificador sea de  $\pm 90$  V.

**PROBLEMA B-7-27.** Encuentre la función de transferencia  $X(s)/U(s)$  del sistema mostrado en la Fig. 7-113.



**Fig. 7-113.** Diagrama de computadora analógica para simular un sistema.

**PROBLEMA B-7-28.** Determine la función de transferencia  $X(s)/U(s)$  del diagrama de computadora analógica mostrado en la Fig. 7-114.

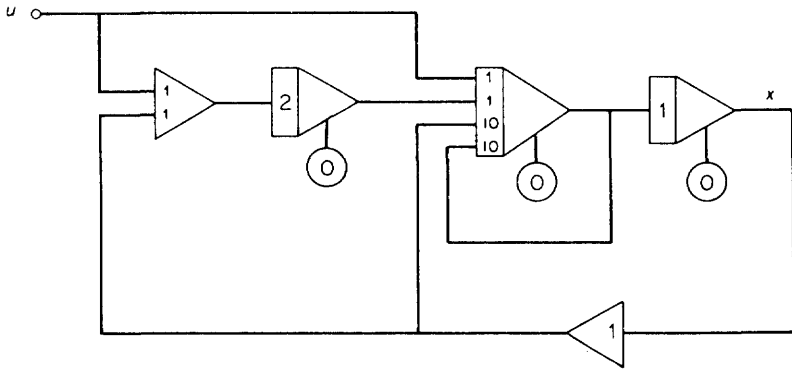


Fig. 7-114. Diagrama de computadora analógica para simular un sistema.

**PROBLEMA B-7-29.** La figura 7-115 es un diagrama de computadora analógica para simular cierto sistema. Obtenga la función de transferencia  $X(s)/U(s)$  del sistema.

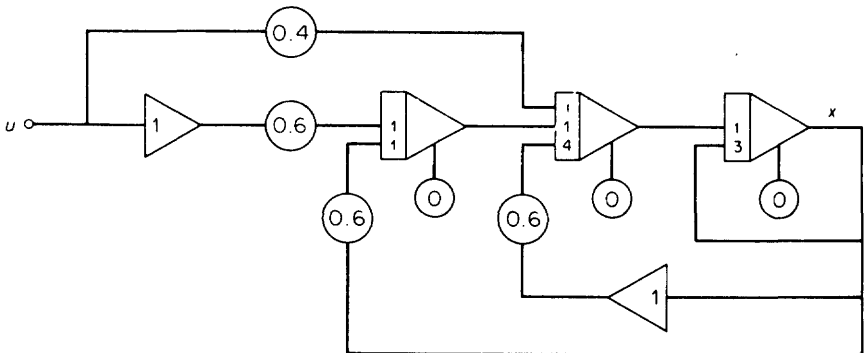


Fig. 7-115. Diagrama de computadora analógica para simular un sistema.

**PROBLEMA B-7-30.** En relación con el sistema vibratorio mecánico de la Fig. 7-116, trace un diagrama de computadora analógica para simular este sistema. Suponga que

Entrada de fuerza

$$p(t) = P \sin \omega t$$

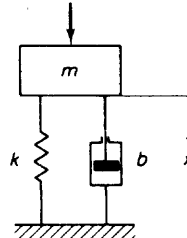


Fig. 7-116. Sistema vibratorio mecánico.

el desplazamiento  $x$  se mide desde la posición de equilibrio en ausencia de la fuerza de excitación senoidal. Las condiciones iniciales son  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$  y la fuerza de entrada  $P \sin \omega t$  se aplica en  $t = 0$ . Los valores numéricos de  $m$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $P$  y  $\omega$  se dan como  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $b = 0.2 \text{ N-s/m}$ ,  $k = 200 \text{ N/m}$ ,  $P = 5 \text{ N}$ , y  $\omega = 3 \text{ rads/s}$ .

# 8

## ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL

### 8-1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se expone solamente material introductorio acerca de sistemas de control. Nuestro estudio se limita al análisis en el dominio del tiempo o análisis de la respuesta transitoria. Comenzaremos definiendo la terminología necesaria para describir sistemas de control, con términos tales como plantas, perturbaciones, control realimentado y sistemas de control realimentados, seguidos por descripciones de sistemas de control cerrados y abiertos. Finalmente se comparan las ventajas y desventajas de los sistemas de control de malla cerrada y de malla abierta.

**Plantas.** Una *planta* es una pieza de equipo, un conjunto de partes de máquina que funcionan juntas, cuyo propósito es realizar una función particular. En este libro llamaremos planta a cualquier objeto físico sometido a control.

**Perturbaciones.** Una *perturbación* es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se llama *interno*; una perturbación *externa* se genera fuera del sistema y es una entrada.

**Control realimentado.** El *control realimentado* se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre

la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y que actúa sobre la base de esta diferencia. En esta operación sólo se especifican perturbaciones impredecibles, puesto que las perturbaciones predecibles o conocidas pueden compensarse dentro del propio sistema.

**Sistemas de control realimentados.** Un sistema que mantiene una relación prescrita entre la salida y alguna entrada de referencia comparándolas y usando la diferencia como medio de control se llama *sistema de control realimentado*. El sistema de control de la temperatura ambiente puede ser un ejemplo. Midiendo la temperatura real de un cuarto y comparándola con la temperatura de referencia (temperatura deseada), el termostato enciende o apaga el equipo de calefacción o enfriamiento de tal modo que asegure una temperatura ambiente confortable independientemente de las condiciones del exterior.

Los sistemas de control realimentados, por supuesto, no están limitados a la ingeniería, sino que puede encontrárseles también en varios campos diferentes a la ingeniería. El cuerpo humano, por ejemplo, es un sistema avanzado de control con realimentación. Tanto la temperatura del cuerpo como la presión de la sangre se mantienen constantes mediante realimentación fisiológica. De hecho, la realimentación realiza una función vital: hace al cuerpo humano relativamente insensible a las perturbaciones externas, capacitándolo así para funcionar apropiadamente en un ambiente cambiante.

Como otro ejemplo, considere el control de la velocidad de un automóvil por un operador humano. El conductor decide acerca de la velocidad apropiada para la situación, la cual puede ser la velocidad límite establecida para el camino o carretera involucrados. El conductor observa la velocidad real mirando el velocímetro. Si viaja muy despacio, acelera y la velocidad del carro aumenta. Si la velocidad real es muy alta, desacelera y el carro va más lento. Ese es un sistema de control realimentado con un operador humano. Aquí el operador humano puede reemplazarse fácilmente por un dispositivo mecánico, eléctrico o similar. En lugar del conductor observando el velocímetro, se puede usar un generador eléctrico para producir un voltaje proporcional a la velocidad. Este voltaje puede compararse con un voltaje de referencia que corresponda a la velocidad deseada. La diferencia en los voltajes se puede usar como señal de error para posicionar el carburador e incrementar o decrementar la velocidad según se necesite.

**Sistemas de control de malla cerrada.** Los sistemas de control realimentados son llamados frecuentemente *sistemas de control de malla cerrada*. En la práctica, los términos control realimentado y control de malla cerrada son intercambiables. En un sistema de control de malla cerrada la señal de error, la cual es la diferencia entre la señal de entrada y la señal realimentada (la cual puede ser la señal de salida misma o una función de la señal de salida y sus derivados), se alimenta al controlador de modo que se re-

duzca el error y lleve la salida del sistema a un valor deseado. El término control de malla cerrada siempre implica el uso de una acción de control realimentado con el objeto de reducir el error del sistema.

**Sistemas de control de malla abierta.** Aquellos sistemas en los cuales la salida no tiene efecto en la acción de control se llaman *sistemas de control de malla abierta*. En otras palabras, en un sistema de control de malla abierta la salida no se mide ni se realimenta para compararse con la entrada. Un ejemplo práctico es un máquina lavadora. Remojar, lavar y enjuagar en la lavadora operan sobre base de tiempo. La máquina no mide la señal de salida, es decir, la limpieza de la ropa.

En cualquier centro de malla abierta la salida no se compara con la entrada de referencia. Así, a cada entrada de referencia corresponde una condición de operación fija; como resultado, la exactitud del sistema depende de la calibración. En presencia de perturbaciones un sistema de malla abierta no efectuará la tarea deseada. El control de malla abierta puede usarse en la práctica sólo si la relación entre la entrada y la salida se conoce y si no hay perturbaciones internas ni externas. Claramente, tales sistemas no son sistemas de control realimentados. Nótese que cualquier sistema de control que opere sobre la base del tiempo es de malla abierta. Por ejemplo, un control de tráfico que opere mediante señales producidas sobre la base de tiempo es otro ejemplo de control de malla abierta.

**Sistemas de control de malla cerrada contra sistemas de control de malla abierta.** Una ventaja del sistema de control de malla cerrada estriba en el hecho de que el uso de la realimentación hace la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema. Así, es posible usar componentes inexactas y baratas para obtener un control exacto de una planta dada, en tanto que es imposible hacerlo en el caso del sistema de malla abierta.

Desde el punto de vista de la estabilidad, el sistema de control de malla abierta es más fácil de construir porque la estabilidad del sistema no representa mayor problema. Por otra parte, la estabilidad es un problema mayor en el sistema de control de malla cerrada, el cual puede tender a sobre corregir errores lo que puede causar oscilaciones de amplitud constante o cambiante.

**Requisitos generales de los sistemas de control.** Todo sistema de control debe ser estable. Este es un requisito primario. Además de la estabilidad absoluta, un sistema de control debe tener una estabilidad relativa razonable; es decir, la respuesta debe mostrar un amortiguamiento razonable. Más aún, la velocidad de respuesta debe ser razonablemente rápida. Un sistema de control también debe ser capaz de reducir los errores a cero o a algún valor pequeño. Todo sistema de control útil debe satisfacer estos requisitos.

A causa de que la necesidad de una estabilidad relativa razonable y de exactitud en el estado estable tienden a ser incompatibles, es necesario al diseñar sistemas de control, establecer el equilibrio más efectivo entre las dos.

**Esquema del capítulo.** Como se ha notado, este capítulo explica el material introductorio sobre análisis de sistemas de control. En adición a las definiciones necesarias, se han dado varios ejemplos de sistemas de control en la Sec. 8-1. En la Sec. 8-2 tratamos de los diagramas de bloques de los sistemas de control y sus componentes. Después de describir las acciones de control encontradas generalmente en los controladores automáticos industriales, la Sec. 8-3 explica las técnicas estándar para obtener diferentes acciones de control mediante el uso de componentes neumáticas, hidráulicas y electrónicas. A continuación se cubre el análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de control en la Sec. 8-4. Aquí se expone la respuesta de sistemas de primero y segundo órdenes a las entradas aperiódicas, y los efectos de diferentes acciones de control sobre las características de la respuesta transitoria de los sistemas de control. La sección 8-5 trata de las especificaciones de la respuesta transitoria. En la Sec. 8-6 se dan métodos para mejorar las características de la respuesta transitoria. El capítulo termina con un problema de diseño sencillo en la Sec. 8-7.

## 8-2 DIAGRAMAS DE BLOQUES

Un sistema puede estar formado por varias componentes. Con el objeto de mostrar las funciones realizadas por cada componente, se usan frecuentemente unos diagramas en el análisis y diseño de los sistemas, llamados diagramas de bloques. Esta sección explica qué es un diagrama de bloques, expone un método para obtener diagramas de bloques de los sistemas físicos, y, finalmente, describe técnicas para simplificar tales diagramas.

**Diagramas de bloques.** Un *diagrama de bloques* de un sistema es una representación gráfica de las funciones realizadas por cada componente y del flujo de las señales. Tal diagrama describe las interrelaciones que existen entre las diferentes componentes. A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar más realistamente los flujos de la señal del sistema real.

En un diagrama de bloques todas las variables del sistema están concatenadas una con otra a través de bloques funcionales. El *bloque funcional* o simplemente *bloque* es un símbolo de la operación matemática sobre la señal de entrada en el bloque que produce la salida. Las funciones de transferencia de las componentes usualmente se meten en los bloques correspondientes, los cuales están conectados mediante flechas para indicar la dirección del flujo de las señales. Nótese que la señal puede pasar solamente en la



dirección de las flechas. Así, un diagrama de bloques de un sistema de control muestra explícitamente una propiedad unilateral.

La figura 8-1 muestra un elemento de un diagrama de bloques. La cabeza de flecha que apunta hacia el bloque indica la entrada, y la cabeza de la flecha que sale del bloque representa la salida. A tales flechas se les identifica como *señales*.

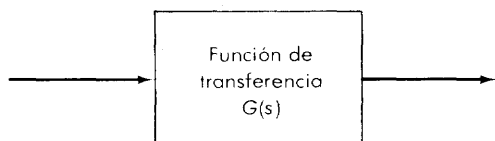


Fig. 8-1. Elemento de un diagrama de bloques.

Nótese que las dimensiones de la señal de salida del bloque son las dimensiones de la señal de entrada multiplicadas por las dimensiones de la función de transferencia del bloque.

Las ventajas de la representación en diagrama de bloques estriban en la facilidad de formar diagramas de bloques totales para el sistema entero, exclusivamente mediante la conexión de los bloques de las componentes de acuerdo con el flujo de la señal y la posibilidad de evaluar la contribución de cada componente al funcionamiento total de sistemas.

En general, la operación funcional del sistema puede visualizarse más pronto examinando el diagrama de bloques que examinando el sistema físico directamente. Un diagrama de bloques contiene información concerniente al comportamiento dinámico, pero no incluye información alguna acerca de la construcción física del sistema. En consecuencia, muchos sistemas no similares ni relacionados pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques.

Debe notarse que en un diagrama de bloques no se muestra explícitamente la fuente principal de energía y que el diagrama de bloques de un sistema dado no es único. Se pueden trazar numerosos diagramas de bloques diferentes de un sistema dependiendo del punto de vista del análisis.

**Punto suma.** En relación con la Fig. 8-2, el símbolo que indica una operación de suma es un círculo con una cruz. El signo más o menos en cada punta de flecha indican si la señal va a ser sumada o restada. Es importante que las cantidades que se van a sumar o restar tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades.

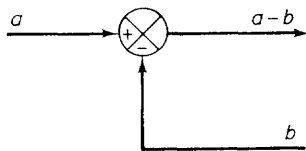


Fig. 8-2. Punto suma.

**Puntos de bifurcación.** Un *punto de bifurcación* es un punto en el cual la señal de un bloque concurre a otros bloques o puntos suma.

**Diagrama de bloques de un sistema de malla cerrada.** La figura 8-3 es un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema de malla cerrada. La salida  $\Theta_o(s)$  se realimenta al punto suma, en donde se le compara con la entrada  $\Theta_i(s)$ . La naturaleza de la malla cerrada del sistema se indica claramente en la figura. La salida del bloque  $\Theta_o(s)$  se obtiene en este caso multiplicando la función de transferencia  $G(s)$  por la entrada al bloque,  $E(s)$ .

Cualquier sistema lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formado por bloques, puntos suma y puntos de bifurcación. Cuando la salida se realimenta por un punto suma para compararla con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida a la forma de la señal de

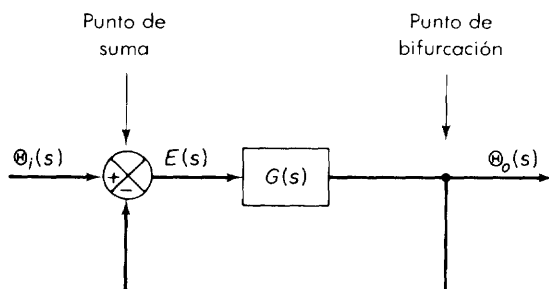


Fig. 8-3. Diagrama de bloques de un sistema de malla cerrada.

entrada. Esta conversión se logra mediante el elemento de realimentación cuya función de transferencia es  $H(s)$ , como se muestra en la Fig. 8-4. Otro papel importante del elemento de realimentación es el de modificar la salida antes de que se le compare con la entrada. En el ejemplo presente la señal de la realimentación que se alimenta por el punto suma para compararla con la entrada es  $B(s) = H(s)\Theta_o(s)$ .

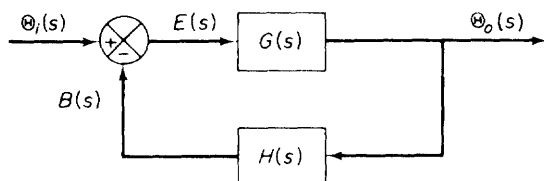


Fig. 8-4. Diagrama de bloques de un sistema de malla cerrada.

**Función de transferencia de malla abierta y función de transferencia prealimentada.** La relación de la señal realimentada  $B(s)$  con respecto a la señal de error  $E(s)$  se llama *función de transferencia de malla abierta*. Es decir,

$$\text{Función de transferencia de trayectoria abierta} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

La relación de salida  $\Theta_o(s)$  con respecto a la señal de error actuante  $E(s)$  se llama *función de transferencia prealimentada*, de modo que

$$\text{Función de transferencia prealimentada} = \frac{\Theta_o(s)}{E(s)} = G(s)$$

Si la función de transferencia de la realimentación es unitaria, entonces la función de transferencia de malla abierta y la función de transferencia prealimentada son una misma.

**Función de transferencia de malla cerrada.** En el sistema mostrado en la Fig. 8-4, la salida  $\Theta_o(s)$  y la entrada  $\Theta_i(s)$  están relacionadas como sigue:

$$\Theta_o(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = \Theta_i(s) - B(s) = \Theta_i(s) - H(s)\Theta_o(s)$$

Eliminando  $E(s)$  de estas ecuaciones da

$$\Theta_o(s) = G(s)[\Theta_i(s) - H(s)\Theta_o(s)]$$

o bien

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (8-1)$$

La función de transferencia que relaciona  $\Theta_o(s)$  con  $\Theta_i(s)$  se llama *función de transferencia de malla cerrada*. Esta función de transferencia relaciona la dinámica del sistema de malla cerrada con la dinámica del sistema prealimentado y los elementos del sistema realimentado. Puesto que la transformada de Laplace de la salida  $\Theta_o(s)$  se da en la Ec. (8-1) como

$$\Theta_o(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \Theta_i(s)$$

el comportamiento de un sistema de malla cerrada dado depende tanto de la función de transferencia de malla cerrada como de la naturaleza de la entrada.

**Procedimientos para trazar un diagrama de bloques.** Con el objeto de trazar un diagrama de bloques de un sistema, primero se escriben las ecuaciones que describen el comportamiento de cada componente. Luego se toma la transformada de Laplace de estas ecuaciones, suponiendo cero las condiciones iniciales, y se representa cada ecuación transformada individualmente en forma de bloque. Finalmente, se arman los elementos en un diagrama de bloques completo.

Como ejemplo, considérese el circuito *RC* mostrado en la Fig. 8-5(a). Las ecuaciones de este circuito son

$$i = \frac{e_i - e_o}{R} \quad (8-2)$$

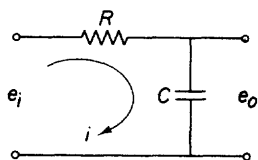
$$e_o = \frac{1}{C} \int i \, dt \quad (8-3)$$

La transformada de Laplace de las Ecs. (8-2) y (8-3) con condiciones iniciales cero, se hacen

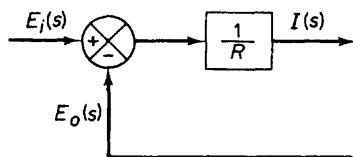
$$I(s) = \frac{1}{R} [E_i(s) - E_o(s)] \quad (8-4)$$

$$E_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (8-5)$$

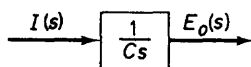
La ecuación (8-4) representa una operación suma y el diagrama correspondiente se muestra en la Fig. 8-5(b). La ecuación (8-5) representa los bloques como se muestran en la Fig. 8-5(c). Armandos estos dos elementos, obtenemos el diagrama de bloques total del sistema como se muestra en la Fig. 8-5(d).



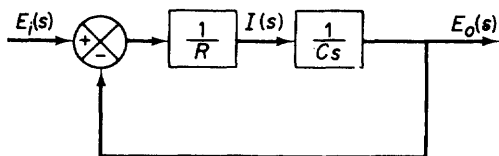
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 8-5. (a) Circuito RC; (b) diagrama de bloques correspondientes a la Ec. (8-4); (c) diagrama de bloques correspondientes a la Ec. (8-5); (d) diagrama de bloques del circuito RC.

**Reducción de un diagrama de bloques.** Debe notarse que los bloques pueden conectarse en serie sólo si la salida de un bloque no se afecta por el bloque siguiente. Si hay cualesquiera efectos entre las componentes, estas componentes deben combinarse en un solo bloque.

Cualquier número de bloques en cascada que representen componentes sin carga puede reemplazarse por un solo bloque, cuya función de transferencia es simplemente el producto de las funciones de transferencia individuales.

Un diagrama de bloques complicado que involucre muchas trayectorias de realimentación puede simplificarse mediante un rearrreglo paso a paso, usando reglas de álgebra de los diagramas de bloques. Algunas de estas reglas importantes se dan en la tabla 8-1. Se obtienen escribiendo la misma ecuación en forma diferente. La simplificación del diagrama de bloques mediante rearrreglos y sustituciones reduce considerablemente la labor necesaria para el análisis matemático subsecuente. Debe notarse, sin embargo, que a medida que el diagrama de bloques se simplifica, la función de transferencia de los nuevos bloques se hace más compleja porque se generan nuevos polos y nuevos ceros.

Al simplificar un diagrama de bloques, recuérdese lo siguiente:

1. El producto de las funciones de transferencia en dirección de prealimentación debe permanecer igual.
2. El producto de las funciones de transferencia alrededor de una malla debe permanecer igual.

Una regla general para simplificar un diagrama de bloques consiste en mover los puntos de bifurcación y los puntos suma, intercambiar los puntos suma y después reducir las mallas internas de realimentación.

---

**Ejemplo 8-1.** Considérese el sistema mostrado en la Fig. 8-6(a). Simplifique este diagrama mediante el uso de las reglas dadas en la tabla 8-1.

Al mover el punto suma de la malla de realimentación negativa que contiene a  $H_2$  afuera de la malla de realimentación positiva que contiene a  $H_1$ , obtenemos la Fig. 8-6(b). Eliminando la malla de realimentación positiva, tenemos la Fig. 8-6(c). Eliminando entonces la malla que contiene a  $H_2/G_1$  de la Fig. 8-6(d). Finalmente, eliminando la malla de realimentación resulta la Fig. 8-6(e).

Nótese que el numerador de la función de transferencia de malla cerrada  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$  es el producto de las funciones de transferencia de la malla realimentada. El denominador de  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$  es igual a

$$\begin{aligned}
 1 - \sum (\text{producto de las funciones de transferencia alrededor de cada malla cerrada}) \\
 &= 1 - (G_1 H_1 - G_2 H_2 - G_1 G_2) \\
 &= 1 - G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2
 \end{aligned}$$

(La malla de realimentación positiva produce un término negativo en el denominador.)

**Tabla 8.1** REGLAS DEL ÁLGEBRA DE LOS DIAGRAMAS DE BLOQUES

	Diagramas de bloques originales	Diagramas de bloques equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Tabla 8.1 (CONTINUACIÓN)

	Diagramas de bloques originales	Diagramas de bloques equivalentes
8		
9		
10		
11		
12		
13		

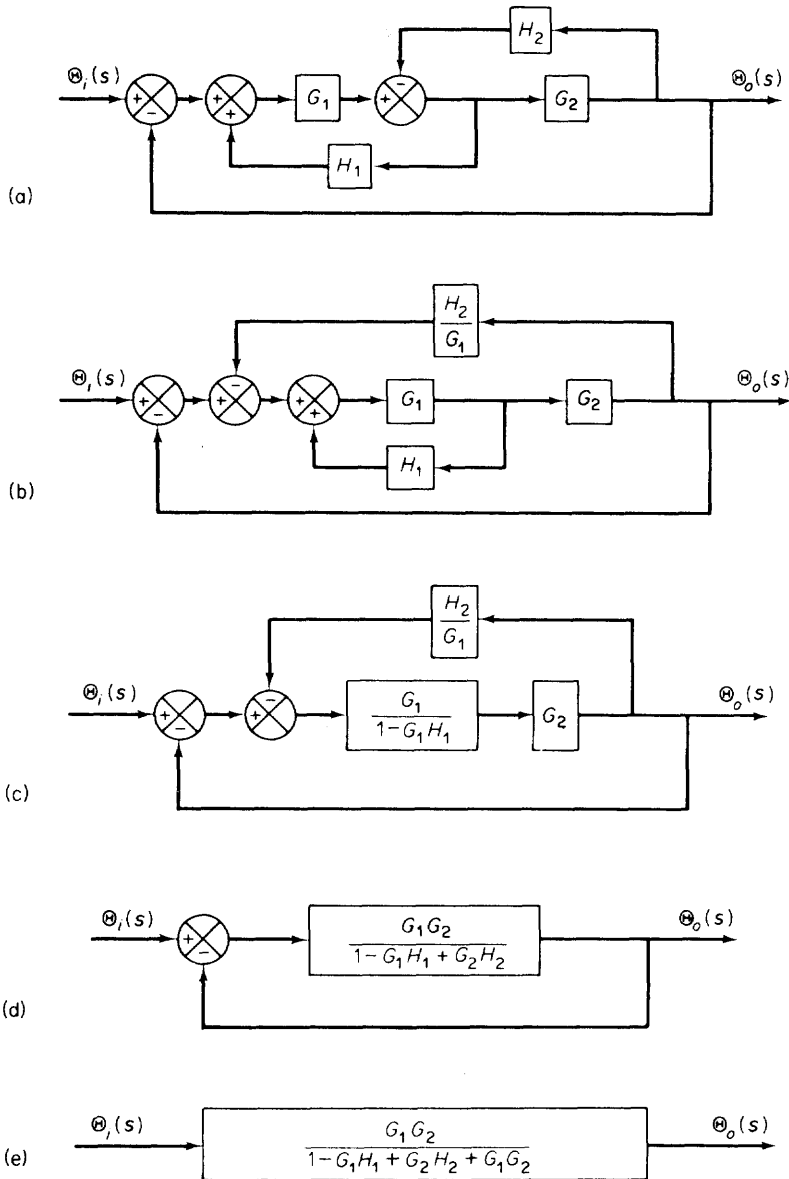


Fig. 8-6. Diagrama de bloques de un sistema y diagramas simplificados.



**Ejemplo 8-2.** Trácese un diagrama de bloque para el circuito mostrado en la Fig. 8-7. Después simplifíquese el diagrama de bloques y obténgase la función de transferencia entre  $E_o(s)$  y  $E_i(s)$ .

Definamos el voltaje a través de la capacitancia  $C_1$  como  $e_1$ . Entonces las ecuaciones del circuito son

$$e_i - e_1 = R_1 i_1$$

$$e_1 - e_o = R_2 i_2$$

$$e_1 = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt$$

$$e_o = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt$$

Reescribiendo estas cuatro ecuaciones en la forma de sus transformadas de Laplace,

$$I_1(s) = \frac{1}{R_1} [E_i(s) - E_1(s)] \quad (8-6)$$

$$I_2(s) = \frac{1}{R_2} [E_1(s) - E_o(s)] \quad (8-7)$$

$$E_1(s) = \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] \quad (8-8)$$

$$E_o(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s) \quad (8-9)$$

De las Ecs. (8-6) y (8-9) obtenemos elementos del diagrama de bloques mostrado en la Fig. 8-8(a). Al conectar las señales apropiadamente podemos construir un diagrama de bloques como el de la Fig. 8-8(b). La interacción de los dos circuitos RC simples puede verse claramente en el diagrama. Usando las reglas de álgebra de los

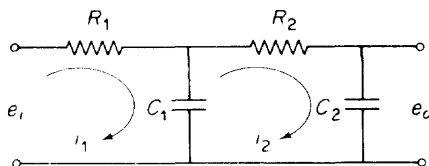


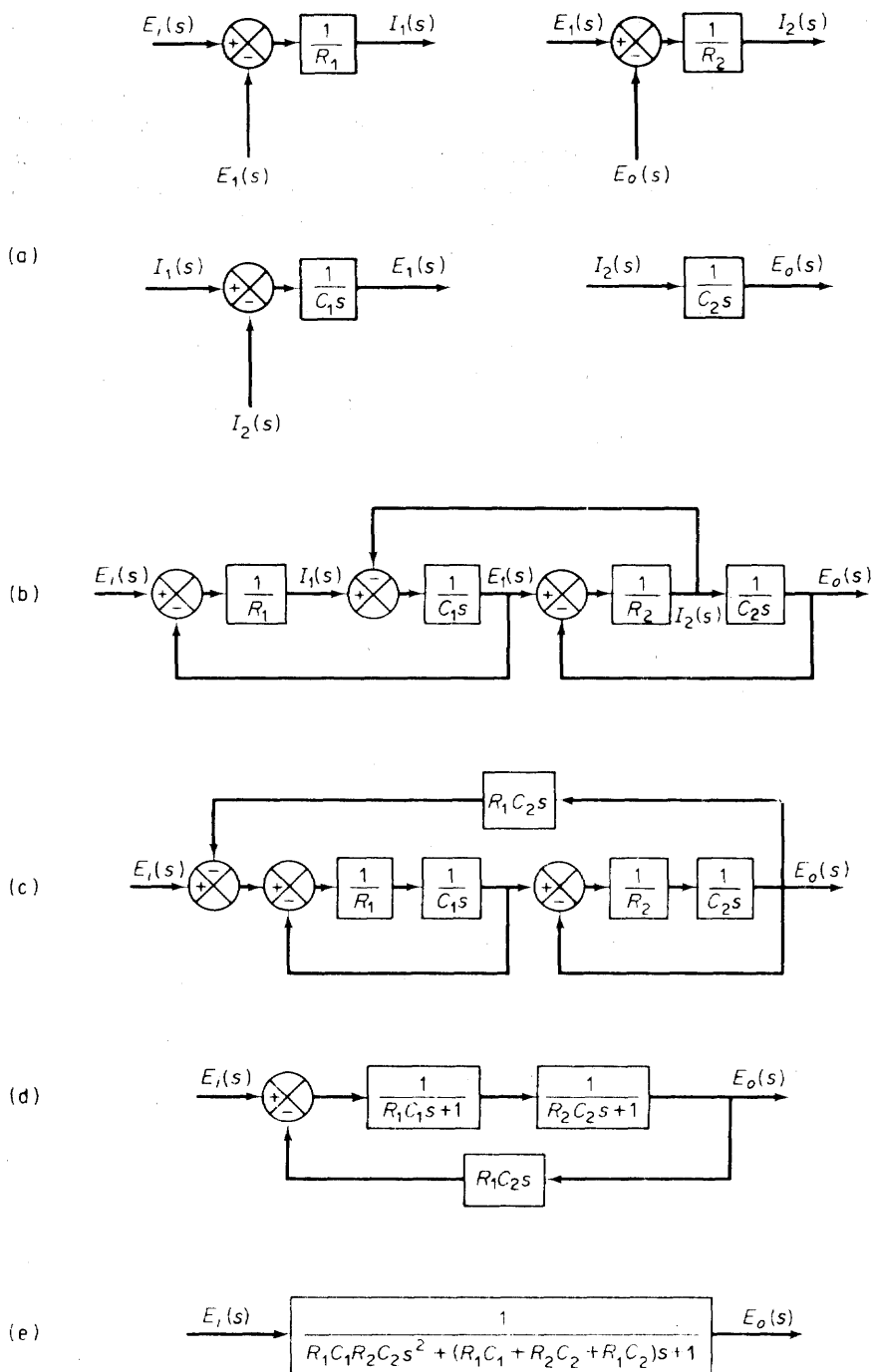
Fig. 8-7. Circuito eléctrico.

diagramas de bloques dadas en la tabla 8-1, este diagrama puede simplificarse al mostrado en la Fig. 8-8(c). La simplificación subsecuente resulta en la Fig. 8-8(d) y (e). La función de transferencia entre  $E_o(s)$  y  $E_i(s)$  es, por lo tanto,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

### 8-3 CONTROLADORES AUTOMÁTICOS INDUSTRIALES

Un controlador automático compara el valor real de la salida de la planta con el valor deseado, determina la desviación y produce una señal de



**Fig. 8-8.** (a) Elementos de un diagrama de bloques; (b) diagrama de bloques como resultado de combinar elementos; (c), (d), (e) diagramas de bloques simplificados.

control que reduce la desviación a cero o a un valor pequeño. La forma en la cual el controlador produce la señal de control se llama *acción de control*.

A continuación describiremos las acciones de control fundamentales usadas comúnmente en los controladores automáticos industriales, seguidas por los principios básicos de los controladores neumáticos, los controladores hidráulicos y los controladores electrónicos.

**Acciones de control.** Las acciones de control encontradas normalmente en los controladores automáticos industriales consisten en: dos posiciones o encendido-apagado, proporcional, integral o derivativo. Es necesario comprender bien las propiedades básicas de las diferentes acciones de control con el objeto de que el ingeniero seleccione la más adecuada a su instalación particular.

**Clasificación de los controladores automáticos industriales.** Los controladores automáticos industriales pueden clasificarse de acuerdo a su acción de control como

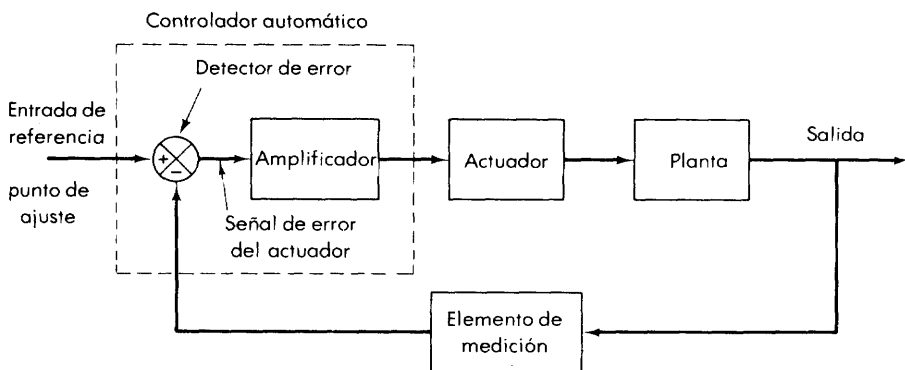
1. Controladores de dos posiciones o de encendido-apagado
2. Controladores proporcionales
3. Controladores integrales
4. Controladores proporcionales integrales
5. Controladores proporcionales derivativos
6. Controladores proporcionales integrales derivativos

**Controlador automático, actuador y elemento de medición.** La figura 8-9 es un diagrama de bloques de un sistema de control industrial, el cual consta de un controlador automático, un actuador, una planta y un elemento de medición. El controlador detecta la señal de error actuante, la cual usualmente está en un nivel muy bajo de potencia y la amplifica a un nivel suficientemente alto. (Así, el controlador automático comprende un detector de error y un amplificador.) Muy a menudo se usa un circuito de realimentación adecuado, junto con un amplificador para componer la señal de error actuante y producir una mejor señal de control.

El actuador es un elemento que produce la entrada a la planta de acuerdo con la señal de control, de modo que la señal de realimentación corresponda a la señal de entrada de referencia.

El elemento de medición es un dispositivo que convierte la variable de salida en otra variable adecuada, tal como desplazamiento, presión o voltaje, la cual puede usarse para comparar la salida con la señal de entrada de referencia. Este elemento se encuentra en el lazo de realimentación del sistema de malla cerrada. El punto de ajuste del controlador debe convertirse en

una entrada de referencia con las mismas unidades de la señal realimentada desde el elemento de medición.



**Fig. 8-9.** Diagrama de bloques de un sistema de control industrial, el cual consta de un controlador automático, un actuador, una planta y un elemento de medición.

**Acción de control de dos posiciones o de encendido-apagado.** En el sistema de control de dos posiciones el actuador tiene sólo dos posiciones fijas, las cuales son, en muchos casos, simplemente de encendido y apagado. El control de dos posiciones o de encendido y apagado es sencillo y barato, por esta razón, se usa ampliamente en sistemas de control tanto industriales como domésticos.

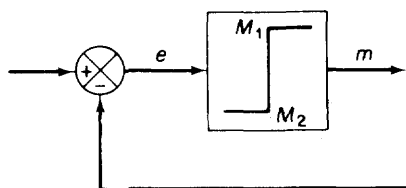
Para explicar el concepto, supongamos que la señal de salida del controlador es  $m(t)$  y la señal de error actuante sea  $e(t)$ . En el control de dos posiciones la señal  $m(t)$  permanece en un valor, ya sea máximo o mínimo, dependiendo de que la señal de error del actuador sea positiva o negativa, de modo que

$$\begin{aligned} m(t) &= M_1 \quad \text{para } e(t) > 0 \\ &= M_2 \quad \text{para } e(t) < 0 \end{aligned}$$

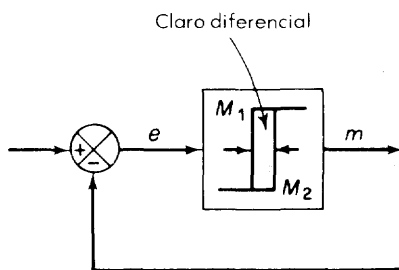
donde  $M_1$  y  $M_2$  son constantes. El valor mínimo  $M_2$  es generalmente cero o  $-M_1$ . Como regla, los controladores de dos posiciones son dispositivos eléctricos y en éstos se usa ampliamente una válvula eléctrica operada por solenoide. Los controladores proporcionales neumáticos con muy alta ganancia actúan como controladores de dos posiciones y en ocasiones se les llama controladores de dos posiciones neumáticos.

La figura 8-10(a) y (b) muestra el diagrama de bloques para este tipo de controlador. La escala a través de la cual la señal de error del actuador debe moverse antes que ocurra la conmutación se llama *claro diferencial* [véase la Fig. 8-10(b)]. Dicho claro causa que la salida del controlador  $m(t)$  mantenga su valor presente hasta que la señal de error del actuador se haya movido li-

geramente más allá del valor cero. En algunos casos, el claro diferencial es el resultado de una fricción no intencional y de pérdida de movimiento; sin embargo, muy a menudo se proporciona intencionalmente con el objeto de evitar una operación muy frecuente del mecanismo de encendido-apagado.



(a)



(b)

**Fig. 8-10.** (a) Diagrama de bloques de un controlador de dos posiciones; (b) diagrama de bloques de un controlador con posiciones con claro diferencial.

Miremos el sistema de control de nivel de líquido de la Fig. 8-11. Con un control de dos posiciones la válvula de entrada está abierta o cerrada y por lo tanto, la razón de cambio en el flujo de entrada es una constante positiva o cero. Como se muestra en la Fig. 8-12, la señal de salida se mueve continuamente entre los dos límites requeridos, causando por lo tanto que el actuador se mueva de una posición fija a la otra. Tal oscilación en la salida entre dos límites es una característica de la respuesta típica de un sistema bajo control de dos posiciones.

De la Fig. 8-12, vemos que la amplitud de oscilación de la salida puede reducirse decrementando el claro diferencial. Sin embargo, este paso incrementa el número de conmutaciones de encendido-apagado por unidad de tiempo y reduce la vida útil de la componente. La magnitud del claro diferencial debe determinarse a partir de factores tales como la exactitud requerida y la vida de la componente.

**Acciones de control proporcional, integral y derivativa.** Además de la acción de control de dos posiciones o de encendido-apagado; las acciones de control proporcional, integral, y derivativa son acciones de control básicas

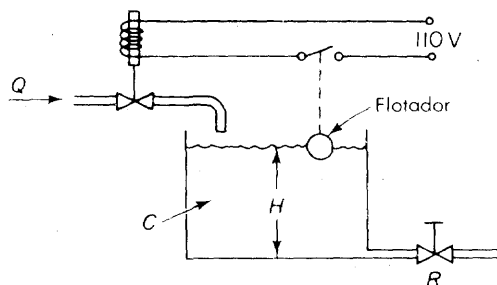


Fig. 8-11. Sistema de control de nivel de líquido.

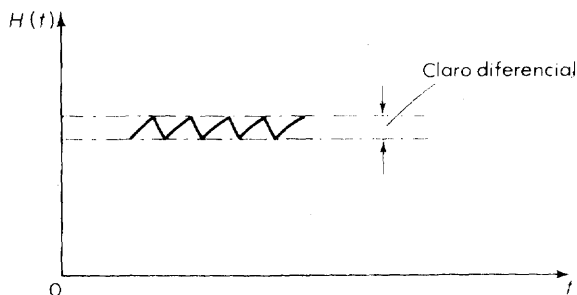


Fig. 8-12. Curva altura contra tiempo del sistema mostrado en la Fig. 8-11.

que se encuentran en los controladores automáticos industriales. Para cada acción de control la relación entre la salida del controlador  $M(s)$  y la señal de error del actuador  $E(s)$  se establece por una función de transferencia de forma específica. En lo que sigue, ilustramos funciones de transferencia  $M(s)/E(s)$  de acción de control proporcional, acción de control proporcional integral, acción de control proporcional derivativa y acción de control proporcional integral derivativa.

En relación con el controlador mostrado en la Fig. 8-13, para la acción de control proporcional,  $M(s)$  y  $E(s)$  están relacionadas por

$$\frac{M(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p$$

donde  $K_p$  se llama *ganancia proporcional*.

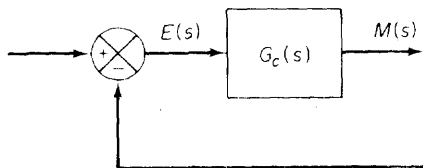


Fig. 8-13. Diagrama de bloques de un controlador.

Para la acción de control integral, la relación entre  $M(s)$  y  $E(s)$  es

$$\frac{M(s)}{E(s)} = G_c(s) = \frac{K_i}{s}$$

donde  $K_i$  es una constante.

Para la acción de control proporcional integral,  $M(s)$  y  $E(s)$  están relacionadas por

$$\frac{M(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

donde  $K_p$  es la ganancia proporcional y  $T_i$  es una constante llamada *tiempo integral*.

Para la acción de control proporcional derivativa,  $M(s)$  y  $E(s)$  están relacionadas por

$$\frac{M(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p (1 + T_d s)$$

donde  $K_p$  es la ganancia proporcional y  $T_d$  es una constante llamada *tiempo derivativo*.

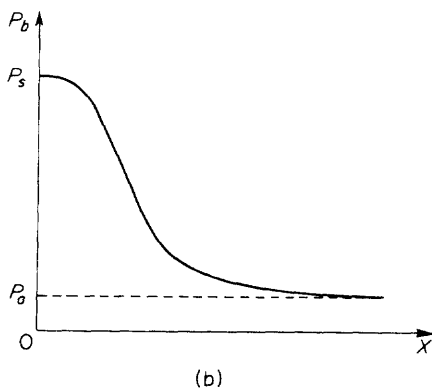
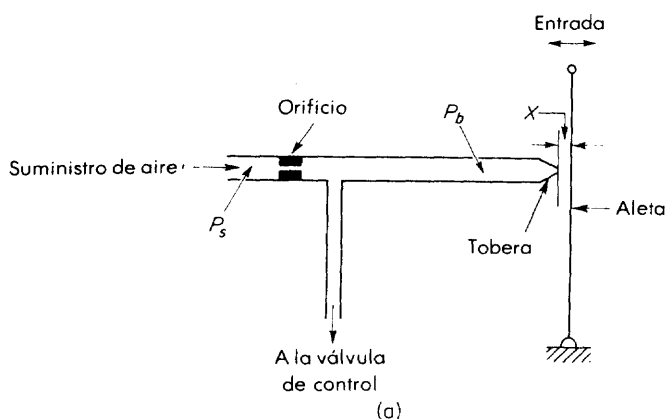
En forma similar, para la acción de control proporcional integral derivativa,  $M(s)$  y  $E(s)$  están relacionadas por

$$\frac{M(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

**Controladores neumáticos.** Las décadas recientes han visto un gran desarrollo de los controladores neumáticos de baja presión para sistemas de control industriales, y en el presente se les usa ampliamente en los procesos industriales. Las razones de su amplia demanda incluyen su característica a prueba de explosión, su simplicidad y facilidad de mantenimiento.

**Amplificadores neumáticos de tobera y aleta.** En la Fig. 8-14(a) aparece un diagrama esquemático de un amplificador neumático de tobera y aleta. En este sistema se alimenta aire a presión a través del orificio, y ese aire se alimenta de la tobera hacia la aleta. Generalmente, la presión de suministro  $P_s$  para tal controlador es  $1.38 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup> manométrica (1.4 kg/cm<sup>2</sup> manométrica o 20 psig). El diámetro del orificio es del orden de 0.25 mm (o 0.01 in) y el de la tobera es del orden de 0.4 mm (0.016 in). Para asegurar el funcionamiento apropiado del amplificador, el diámetro de la tobera debe ser mayor que el diámetro del orificio.

Al operar este sistema, la aleta se posiciona contra la abertura de la tobera. La presión de respaldo de la tobera  $P_b$  se controla mediante la distancia entre tobera y aleta. A medida que la aleta se aproxima a la tobera, la oposición al flujo de aire a través de la tobera se incrementa con el resultado de que la presión de respaldo de la tobera  $P_b$  se incrementa. Si la tobera queda completamente cerrada por la aleta, la presión de respaldo de la tobera  $P_b$  se hace igual a la presión de suministro  $P_s$ . Si la aleta se separa de la tobera, de modo que se amplíe la distancia entre tobera y aleta (en el orden de 0.25 mm o 0.01 in), entonces casi no hay restricción al flujo y la presión de respaldo de la tobera  $P_b$  adopta un valor mínimo que depende del dispo-



**Fig. 8-14.** (a) Diagrama esquemático de un amplificador neumático de tobera y aleta; (b) curva de presión de respaldo de la tobera contra distancia tobera-aleta.

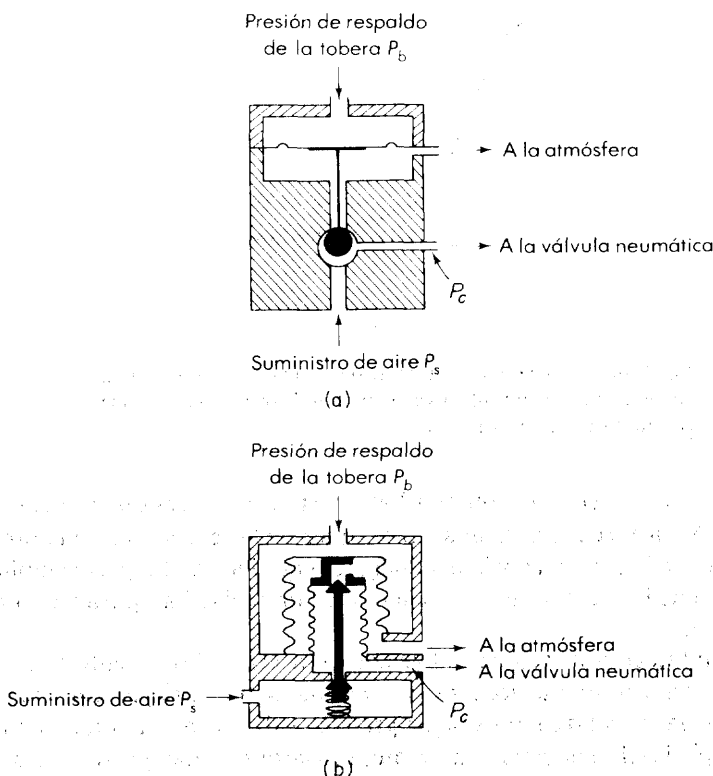
sitivo tobera-aleta. (La presión más baja posible es la presión ambiente  $P_a$ .) En la Fig. 8-14(b) se muestra una curva típica de la relación entre la presión de respaldo de la tobera  $P_b$  y la distancia tobera-aleta  $X$ . La parte empinada y casi lineal de la curva se utiliza en la operación real del amplificador de tobera y aleta.

El amplificador de tobera y aleta convierte el desplazamiento en una señal de presión. Puesto que los sistemas de control industriales requieren una gran potencia de salida para operar grandes válvulas actuadoras neumáticas, la amplificación de potencia del amplificador de tobera y aleta es usualmente insuficiente. En consecuencia, un relevador neumático a menudo sirve como amplificador de potencia en combinación con un amplificador de tobera y aleta.



**Relevadores neumáticos.** En la práctica, en un controlador neumático, un amplificador de tobera y aleta actúa como amplificador de primera etapa y un relevador neumático como amplificador de segunda etapa. El relevador neumático es capaz de manejar una gran cantidad de flujo de aire.

En la Fig. 8-15(a) se muestra un diagrama esquemático de un relevador neumático. A medida que la presión de respaldo de la tobera  $P_b$  se incrementa, la válvula de esfera es forzada hacia su asiento inferior, haciendo decrecer, por lo tanto, la presión de control  $P_c$ . Tal relevador se llama *relevador de acción reversa*. Cuando la válvula de la esfera se encuentra en lo más alto de su asiento, la abertura a la atmósfera se cierra y la presión de control  $P_c$  se hace igual a la presión de suministro  $P_s$ . Cuando la válvula de la esfera está en el fondo de su asiento, interrumpe el suministro de aire y la presión de control  $P_c$  cae hasta la presión ambiente. La presión de control  $P_c$  puede así variar desde la presión manométrica cero hasta la presión de suministro total (de 0 N/m<sup>2</sup> manométrica hasta  $1.38 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup> manométrica, o de 0 psig a 20 psig). El movimiento total de la válvula de esfera entre sus asientos



**Fig. 8-15.** (a) Diagrama esquemático de un relevador neumático del tipo de descarga a la atmósfera; (b) diagrama esquemático de un relevador neumático del tipo sin descarga a la atmósfera.

superior e inferior es pequeño (del orden de 0.25 mm o 0.01 in). En todas las posiciones de la válvula de esfera, excepto en su asiento superior, el aire continúa fluyendo hacia la atmósfera, aun cuando se alcance una posición de equilibrio entre la presión de respaldo de la tobera y la presión de control. Así el relevador mostrado en la Fig. 8-15(a) se conoce como *relevador del tipo de descarga a la atmósfera*.

Hay otro tipo de relevador, el tipo *sin descarga a la atmósfera*. Aquí, el flujo de aire para cuando se alcanza una condición de equilibrio y, por lo tanto, no hay pérdida de aire a presión en la operación en estado estable. En la Fig. 8-15(b) se muestra un diagrama esquemático de un relevador del tipo sin descarga a la atmósfera.

**Controladores proporcionales neumáticos.** En el diagrama esquemático de un controlador proporcional neumático mostrado en la Fig. 8-16, el amplificador de tobera y aleta constituye el amplificador de primera etapa, y la presión de respaldo de la tobera se controla mediante la distancia tobera-aleta. El amplificador del tipo de relevador constituye el amplificador de segunda etapa. La presión de respaldo de la tobera determina la posición de la válvula de esfera en el amplificador de segunda etapa.

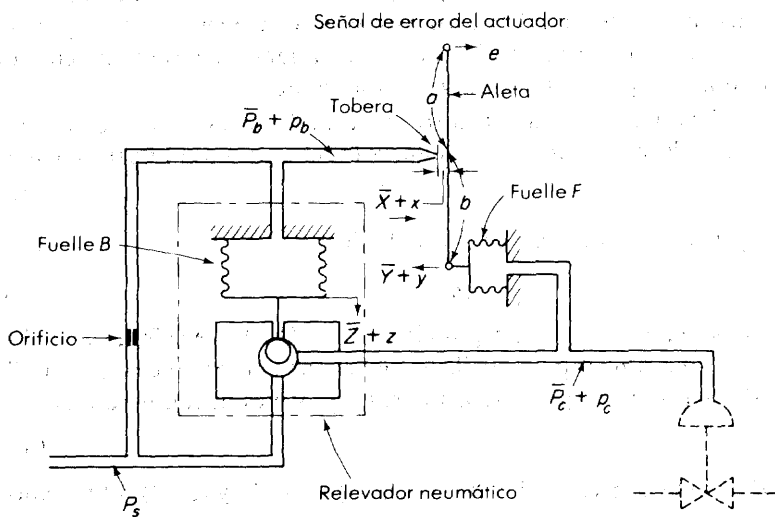


Fig. 8-16. Controlador proporcional neumático.

Este controlador opera como sigue. La señal de entrada al amplificador neumático de dos etapas es la señal de error del actuador. Al incrementarse la señal de error del actuador se mueve la aleta hacia la derecha. Este paso decrementará, a su turno la presión de respaldo de la tobera y el fuelle  $B$  se contraerá, lo que resultará en un movimiento hacia arriba de la válvula de esfera. En con-

secuencia, hay más aire fluyendo hacia la válvula neumática y la presión de control se incrementa. Este incremento hará que el fuelle  $F$  se expanda y mueva la aleta hacia la izquierda, cerrando así la tobera. Por esta realimentación el desplazamiento tobera-aleta es muy pequeño, pero el cambio en la presión de control puede ser grande. Si el cambio en el error del actuador decrece, la presión de respaldo de la tobera se incrementa y la válvula de esfera se mueve hacia abajo, resultando, por lo tanto, en un decremento del flujo de control y un incremento en la descarga a la atmósfera. Esta situación puede causar que la presión de control disminuya.

Debe notarse que la operación apropiada del controlador requiere que el fuelle de realimentación mueva la aleta menos que el movimiento causado por la señal de error solitaria. (Si estos dos movimientos fueran iguales, no resultaría acción de control alguna.)

Las ecuaciones de este controlador se pueden obtener como sigue. Cuando el error del actuador es cero,  $e = 0$ , existe un estado de equilibrio con la distancia tobera-aleta igual a  $\bar{X}$ , el desplazamiento del fuelle  $F$  igual a  $\bar{Y}$ , el desplazamiento del fuelle  $B$  igual a  $\bar{Z}$ , la presión de respaldo de la tobera igual a  $\bar{P}_b$ , y la presión de control igual a  $\bar{P}_c$ . Cuando existe un error del actuador, la distancia tobera-aleta, el desplazamiento de los fuelles  $F$  y  $B$ , la presión de respaldo de la tobera, y la presión de control se desvían de sus respectivos valores de equilibrio. Sean estas desviaciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $p_b$  y  $p_c$ , respectivamente. (La dirección positiva de cada variable de desplazamiento está indicada por una punta de flecha en el diagrama.)

Suponiendo que la relación entre la variación de la presión de respaldo de la tobera y la variación de la distancia tobera-aleta sea lineal, tenemos

$$p_b = -K_1 x \quad (8-10)$$

donde  $K_1$  es una constante. Pero el fuelle  $B$ ,

$$p_b = K_2 z \quad (8-11)$$

donde  $K_2$  es una constante. La posición de la válvula de esfera, la cual depende del desplazamiento del fuelle  $B$ , determina la presión de control. Si la válvula de esfera es tal que la relación entre  $p_c$  y  $z$  es lineal, entonces

$$p_c = -K_3 z \quad (8-12)$$

donde  $K_3$  es una constante. De las Ecs. (8-10), (8-11) y (8-12), obtenemos

$$p_c = -\frac{K_3}{K_2} p_b = Kx \quad (8-13)$$

donde  $K = K_1 K_3 / K_2$  es una constante. Para el movimiento de la aleta, tenemos

$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y \quad (8-14)$$

El fuelle  $F$  actúa como un resorte y la siguiente ecuación se mantiene.

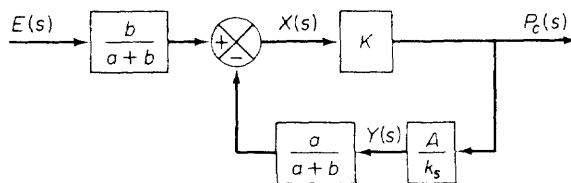
$$Ap_c = k_s y \quad (8-15)$$

Aquí  $A$  es el área efectiva del fuelle  $F$ , y  $k_s$  es la constante equivalente del resorte; es decir, el estiramiento debido a la acción del lado corrugado del fuelle.

Suponiendo que todas las variaciones de las variables estén dentro de una escala lineal, podemos obtener un diagrama de bloques de este sistema de las Ecs. (8-13), (8-14) y (8-15) como se muestra en la Fig. 8-17(a). De la Fig. 8-17(a) puede verse que el controlador neumático mostrado en la Fig. 8-16 es en sí mismo un sistema realimentado. La función de transferencia entre  $p_c$  y  $e$  está dada por

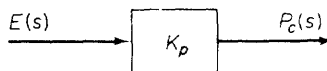
$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + K \frac{a}{a+b} \frac{A}{k_s}} = K_p$$

En la Fig. 8-17(b) se da un diagrama de bloques simplificado. Puesto que  $p_c$  y  $e$  son proporcionales, el controlador neumático de la Fig. 8-16 es un controlador proporcional. En los controladores proporcionales comerciales, se provee de mecanismos de ajuste para variar la ganancia  $K_p$ .



(a)

Fig. 8-17. (a) Diagrama de bloques del controlador proporcional neumático mostrado en la Fig. 8-16; (b) diagrama de bloques simplificado.



(b)

Como se notó anteriormente, la señal de error del actuador movía a la aleta en una dirección y el fuelle de realimentación lo movía en la dirección opuesta, pero en menor grado. Así es que el efecto del fuelle de realimentación es reducir la sensibilidad del controlador. El principio de la realimentación se usa comúnmente para obtener controladores de banda proporcional amplia.

Los controladores neumáticos que no tienen mecanismos de realimentación (lo cual significa que uno de los extremos de la aleta está fijo) tienen alta sensibilidad y se llaman *controladores de dos posiciones neumáticos* o

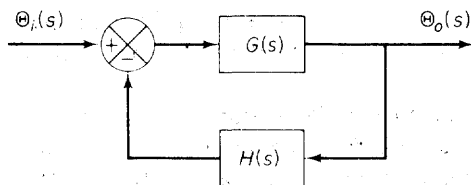


Fig. 8-18. (a) Diagrama de bloques de un sistema de malla cerrada.

*controladores de encendido-apagado neumáticos.* En estos controladores, sólo se requiere un pequeño movimiento entre la tobera y la aleta para dar un cambio completo de la presión de control máxima a la mínima.

**Obtención de las acciones de control derivativa e integral.** El principio básico para operar una acción de control deseada consiste en insertar el inverso de la función de transferencia deseada en la trayectoria de la realimentación. En el sistema mostrado en la Fig. 8-18, la función de transferencia de malla cerrada es

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Si  $|G(s)H(s)| \gg 1$ , entonces la función de transferencia de la malla cerrada puede modificarse a

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} \approx \frac{1}{H(s)}$$

Así que si se desea una acción de control proporcional derivativa, insertamos un elemento que tenga la función de transferencia  $1/(Ts + 1)$  en la trayectoria de la realimentación; y si se quiere una acción de control proporcional integral, insertamos un elemento que tenga la función de transferencia  $Ts/(Ts + 1)$  en la trayectoria de realimentación.

**Controladores proporcionales derivativos neumáticos.** En el sistema de fuelle neumático mostrado en la Fig. 8-19 la resistencia de la restricción (válvula) se denota mediante  $R$  y la capacitancia del fuelle mediante  $C$ . En relación con la Sec. 5-5, la ecuación de este sistema puede darse mediante la Ec. (5-40), reescrita así:

$$RC \frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$$

La función de transferencia de este sistema de fuelle es, por lo tanto,

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

Luego, si el sistema de fuelle mostrado en la Fig. 8-19 se inserta en la trayectoria de realimentación del controlador proporcional neumático, el controlador se convertirá en uno proporcional derivativo.

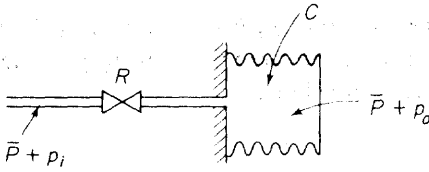


Fig. 8-19. Sistema de fuelle neumático.

Considérese el controlador neumático mostrado en la Fig. 8-20(a). Suponiendo cambios pequeños en el error del actuador, la distancia tobera-aleta, y la presión de control una vez más, se puede trazar un diagrama de bloques de este controlador como en la Fig. 8-20(b). En el diagrama de bloques

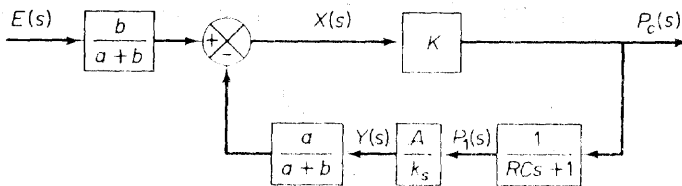
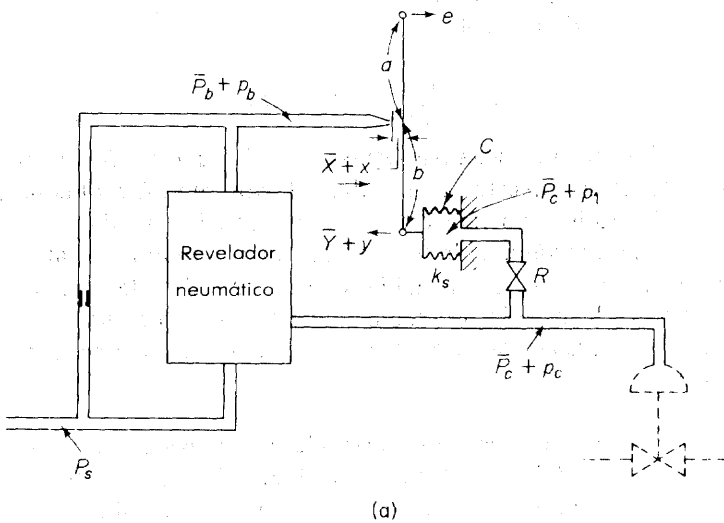


Fig. 8-20. (a) Diagrama de controlador proporcional derivativo; (b) diagrama de bloques.

ques  $K$  es una constante,  $A$  es el área del fuelle y  $k_s$  es la constante del resorte equivalente del fuelle. La función de transferencia entre  $p_c$  y  $e$  puede encontrarse del diagrama de bloques como sigue:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b}K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \frac{1}{RCs+1}}$$

Nótese que en un controlador como ese la ganancia de malla cerrada  $|KaA/[(a+b)k_s(RCs+1)]|$  se hace usualmente mucho mayor que la unidad. La función de transferencia  $P_c(s)/E(s)$  puede, por lo tanto, simplificarse a

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{bk_s}{aA}(RCs+1) = K_p(T_d s + 1)$$

donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \quad T_d = RC$$

Así que la alimentación negativa retrasada, o la función de transferencia  $1/(RCs+1)$ , en la trayectoria de realimentación modifica al controlador proporcional para hacerlo controlador proporcional derivativo.

Nótese que si la válvula de realimentación está totalmente abierta, entonces la resistencia  $R$  es despreciable,  $R \div 0$ , la acción de control se hace proporcional. Si la válvula de realimentación está totalmente cerrada, de modo que  $R = \infty$ , la acción de control se hace de dos posiciones o de encendido-apagado.

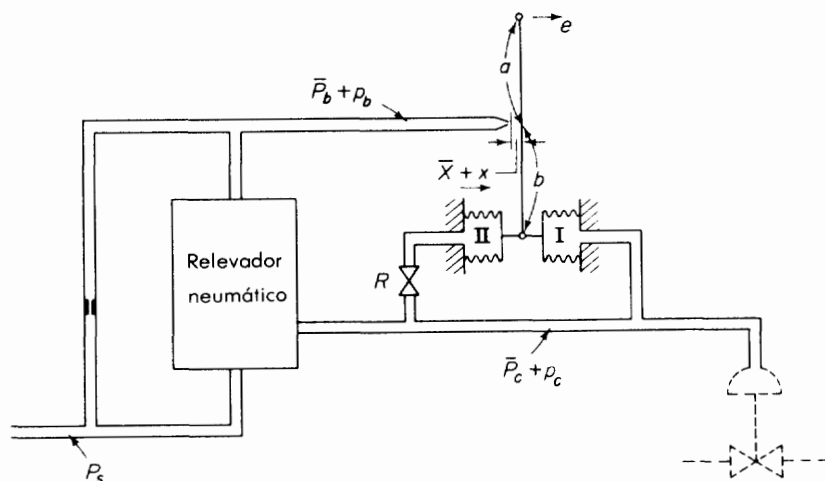
**Controladores proporcionales integrales neumáticos.** En relación con el controlador neumático mostrado en la Fig. 8-21(a), el fuelle denotado mediante I está conectado a la fuente de presión de control sin restricción alguna. El fuelle denotado mediante II está conectado a la presión de control a través de una restricción (válvula).

Bajo la suposición de variaciones pequeñas en las variables, en la Fig. 8-21(b) aparece un diagrama de bloques de este controlador. Se da una simplificación de este diagrama en la Fig. 8-21(c). La función de transferencia de este controlador es

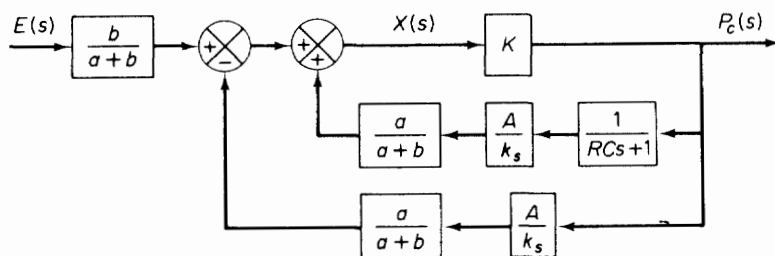
$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b}K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \left(1 - \frac{1}{RCs+1}\right)}$$

donde  $K$  es una constante,  $A$  el área de los fuelles y  $k_s$  la constante del resorte equivalente de los fuelles. Si  $|KaARCs/[(a+b)k_s(RCs+1)]| \gg 1$ , como es usualmente el caso, la función de transferencia puede simplificarse a

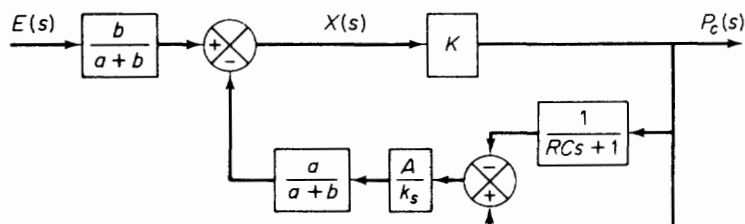
$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{bk_s}{aA} \frac{(RCs+1)}{RCs} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$



(a)



(b)



(c)

**Fig. 8-21.** (a) Controlador neumático proporcional integral; (b) diagrama de bloques; (c) diagrama de bloques simplificado.



donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \quad T_i = RC$$

Así, el controlador mostrado en la Fig. 8-21(a) es un controlador proporcional integral.

**Controladores proporcionales integrales derivativos neumáticos.** Una combinación de los controladores neumáticos de las Figs. 8-20(a) y 8-21(a) da un controlador proporcional integral derivativo. La figura 8-22(a) es un diagrama esquemático de este tipo. Aquí las resistencias  $R_i$  y  $R_d$  se escogen de tal modo que  $R_i \gg R_d$ . La figura 8-22(b) muestra un diagrama de bloques del controlador bajo la suposición de pequeñas variaciones en las variables.

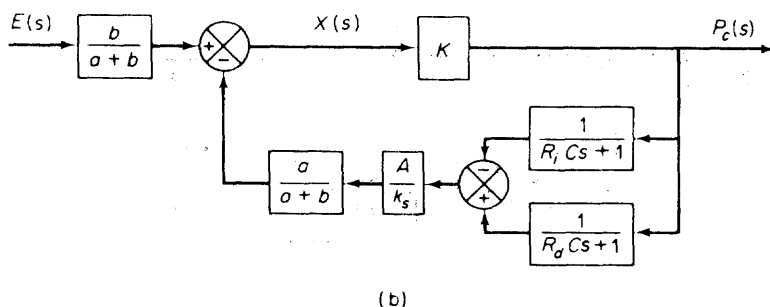
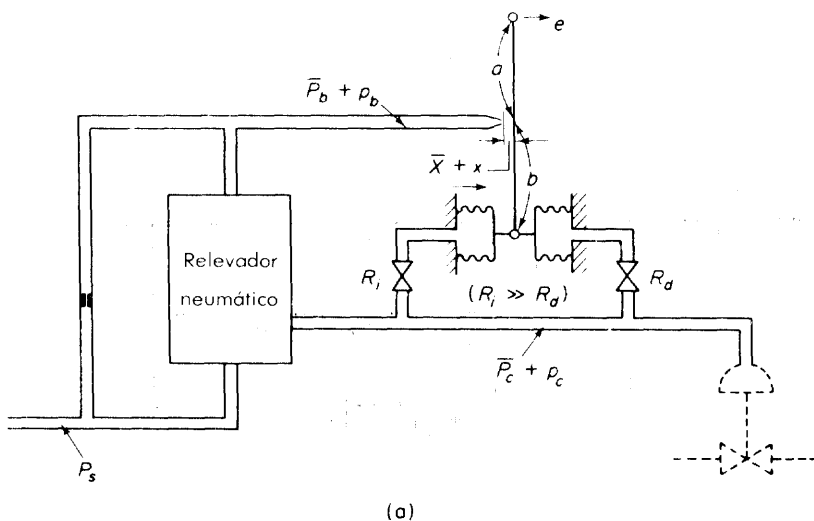


Fig. 8-22. (a) Controlador neumático proporcional integral derivativo; (b) diagrama de bloques.

La función de transferencia de este controlador es

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b}K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \frac{(R_i C - R_d C)s}{(R_d C s + 1)(R_i C s + 1)}} \quad (8-16)$$

Nótese que generalmente  $|KaA(R_i C - R_d C)s / [(a+b)k_s(R_d C s + 1)(R_i C s + 1)]| \gg 1$ . Por definición,

$$T_i = R_i C, \quad T_d = R_d C$$

y observando que  $T_i \gg T_d$ , la Ec. (8-16) se simplifica a

$$\begin{aligned} \frac{P_c(s)}{E(s)} &= \frac{bk_s (T_d s + 1)(T_i s + 1)}{aA (T_i - T_d)s} \\ &= \frac{bk_s T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{aA T_i s} \\ &= K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \end{aligned} \quad (8-17)$$

donde

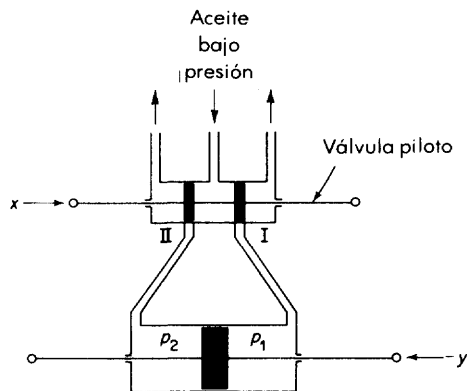
$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

La ecuación (8-17) indica que el controlador mostrado en la Fig. 8-22(a) es un controlador proporcional integral derivativo.

**Controladores hidráulicos.** Como los controladores neumáticos, los controladores hidráulicos también se usan ampliamente en la industria. Los sistemas hidráulicos de alta presión permiten obtener fuerzas muy grandes. Más aún, estos sistemas permiten un posicionamiento rápido y exacto de las cargas. Y frecuentemente se encuentra una combinación de sistemas electrónicos e hidráulicos por las ventajas que resultan de mezclar el control electrónico con la potencia hidráulica.

**Controladores integrales hidráulicos.** El servomotor hidráulico mostrado en la Fig. 8-23 es esencialmente un amplificador de potencia hidráulica y actuador controlado por válvula piloto. La válvula piloto es una válvula balanceada en el sentido de que las fuerzas de presión que actúan sobre ella están todas balanceadas. Una salida de gran potencia puede controlarse mediante una válvula piloto, la cual puede posicionarse con muy poca potencia.

En el presente análisis, suponemos que el fluido hidráulico es incompresible y que el momento de inercia del pistón de potencia y la carga es despreciable comparado con la fuerza hidráulica en el pistón de potencia. También suponemos que la válvula no tiene traslape y que la razón de cambio de flujo de aceite es proporcional al desplazamiento de la válvula piloto.



**Fig. 8-23.** Servomotor hidráulico.

La operación de este servomotor hidráulico es como sigue. Si la entrada  $x$  mueve la válvula piloto a la derecha, se descubre el puerto I y, por lo tanto, entra aceite a alta presión al lado derecho del pistón de potencia. Puesto que el puerto II está conectado al puerto de descarga, el aceite en el lado izquierdo del pistón de potencia es regresado por la descarga. El aceite que fluye al cilindro de potencia está a alta presión; el aceite que fluye del cilindro de potencia al drenaje está a baja presión. La diferencia de presión resultante entre ambos lados del pistón de potencia causará que éste se mueva hacia la izquierda.

Nótese que la razón de cambio de flujo de aceite  $q$  (kg/s) multiplicado por  $dt$  (s) es igual al desplazamiento del pistón de potencia  $dy$  (m) multiplicado por el área del pistón  $A$  (m<sup>2</sup>) y multiplicado por la densidad del aceite  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>). Por lo tanto,

$$A\rho dy = q dt \quad (8-18)$$

Por la suposición de que la razón de cambio de flujo de aceite  $q$  es proporcional al desplazamiento de la válvula piloto  $x$ , tenemos

$$q = K_1 x \quad (8-19)$$

donde  $K_1$  es una constante de proporcionalidad. De las Ecs. (8-18) y (8-19) obtenemos

$$A\rho \frac{dy}{dt} = K_1 x$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo cero las condiciones iniciales, da

$$A\rho s Y(s) = K_1 X(s)$$

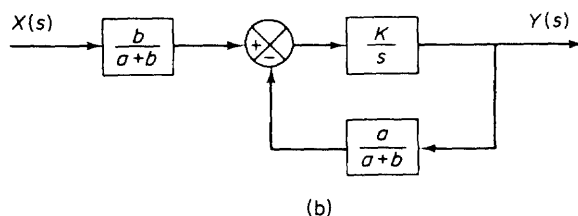
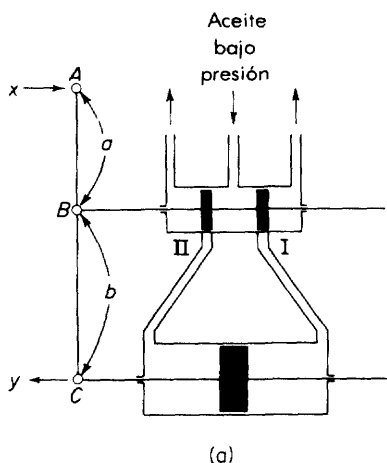
o bien

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{A\rho s} = \frac{K}{s}$$

donde  $K = K_1/(A\rho)$ . Así, el servomotor hidráulico mostrado en la Fig. 8-23 actúa como un controlador integral.

**Controladores proporcionales hidráulicos.** El servomotor hidráulico de la Fig. 8-23 puede modificarse para hacerlo un controlador proporcional por medio de un eslabón de realimentación. Considérese el controlador hidráulico mostrado en la Fig. 8-24(a). El lado izquierdo de la válvula piloto está unido al lado izquierdo del pistón de potencia mediante un eslabón *ABC*. Este es un eslabón flotante más que uno móvil alrededor de un pivote fijo.

El controlador opera aquí de la siguiente forma. Si la entrada *x* mueve la válvula piloto hacia la derecha, se descubrirá el puerto I y el aceite a alta presión fluirá a través del puerto I al lado derecho del pistón de potencia y forzará a dicho pistón hacia la izquierda. El pistón de potencia, al moverse hacia la izquierda, arrastrará al eslabón de realimentación *ABC* con él, moviendo, por lo tanto, la válvula piloto hacia la izquierda. Esta acción conti-



**Fig. 8-24.** (a) Controlador proporcional hidráulico; (b) diagrama de bloques.

núa hasta que la válvula piloto cubre otra vez los puertos I y II. Puede trazarse un diagrama de bloques del sistema como en la Fig. 8-24(b). La función de transferencia entre *y* y *x* está dada por

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s} \frac{a}{a+b}} = \frac{bK}{s(a+b) + Ka} \quad (8-20)$$

Observando que en las condiciones de operación normales tenemos  $|Ka/[s(a + b)]| \gg 1$ , entonces la Ec. (8-20) puede simplificarse a

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{a} = K_p$$

La función de transferencia entre  $y$  y  $x$  se hace una constante. Así, el controlador hidráulico mostrado en la Fig. 8-24(a) actúa como un controlador proporcional, cuya ganancia es  $K_p$ . Esta ganancia puede ajustarse efectivamente mediante el cambio de la relación de la palanca  $b/a$ . (El mecanismo de ajuste no se muestra en el diagrama.)

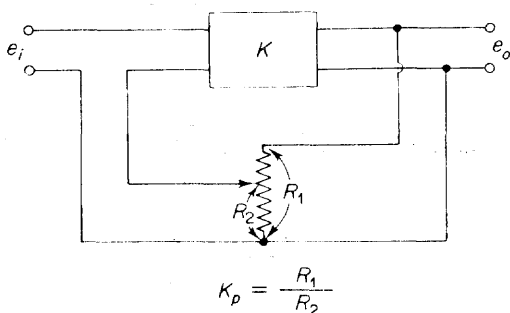
**Controladores proporcionales electrónicos.** Un controlador proporcional electrónico es un amplificador que recibe una señal de voltaje pequeña y produce una salida de voltaje a un nivel de potencia más alto. En la Fig. 8-25 se muestra un diagrama esquemático de tal controlador. Para este controlador.

$$e_o = K(e_i - e_o \frac{R_2}{R_1})$$

donde  $R_2 > 0$  y  $KR_2/R_1 \gg 1$ . En consecuencia,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{R_2} = K_p$$

donde  $K_p$  es la ganancia del amplificador o controlador proporcional. La ganancia  $K_p$  puede ajustarse cambiando la relación de las resistencias (el valor de  $R_1/R_2$ ) en el circuito realimentado.



**Fig. 8-25.** Controlador proporcional electrónico.

**Obtención de acciones de control derivativas e integrales en controladores electrónicos.** En la siguiente exposición se describe el principio involucrado al obtener acciones de control derivativas e integrales en controladores electrónicos. Esencialmente, insertaremos un circuito apropiado en la trayectoria de realimentación con el objeto de proporcionar la acción de control proporcional derivativo, la acción de control proporcional integral,

o la acción de control proporcional integral derivativa. Para el controlador mostrado en la Fig. 8-26,

$$\frac{E_f(s)}{E_o(s)} = \frac{1}{R_d C_d s + 1}$$

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_o(s)$$

Así que para  $|K/(R_d C_d s + 1)| \gg 1$ , como es usualmente el caso,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K(R_d C_d s + 1)}{R_d C_d s + 1 + K} \doteq R_d C_d s + 1 = T_d s + 1$$

donde  $T_d = R_d C_d$ . Así, el controlador mostrado en la Fig. 8-26 es un controlador proporcional derivativo.

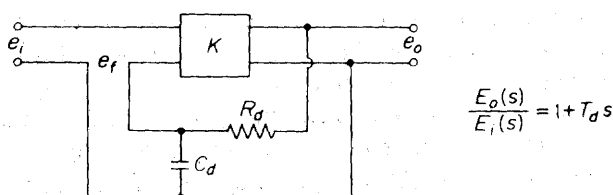


Fig. 8-26. Controlador electrónico proporcional derivativo.

En forma similar, para el controlador mostrado en la Fig. 8-27,

$$\frac{E_f(s)}{E_o(s)} = \frac{R_i C_i s}{R_i C_i s + 1}$$

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_o(s)$$

Y de ese modo para  $|KR_i C_i s/(R_i C_i s + 1)| \gg 1$ , como es usual,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K(R_i C_i s + 1)}{KR_i C_i s + R_i C_i s + 1} \doteq \frac{R_i C_i s + 1}{R_i C_i s} = 1 + \frac{1}{T_i s}$$

donde  $T_i = R_i C_i$ . En consecuencia, el controlador mostrado en la Fig. 8-27 es un controlador proporcional integral.

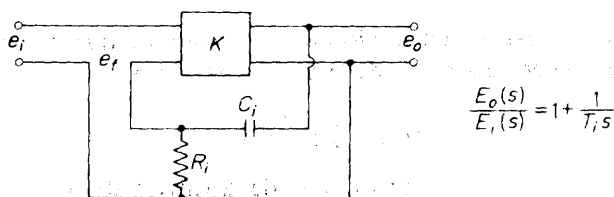


Fig. 8-27. Controlador electrónico proporcional integral.

## 8-4 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

En esta sección estamos interesados en el análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de control y en los efectos de las acciones de control integral y derivativa sobre el comportamiento de la respuesta transitoria. Comenzamos con un análisis del control proporcional de un sistema de primer orden, seguido de una descripción de los efectos de las acciones de control integral y derivativo sobre el comportamiento transitorio. Luego presentamos el control proporcional de un sistema con una carga de inercia e ilustramos el hecho de que agregando control derivativo se mejora notablemente el comportamiento transitorio.

**Control proporcional de un sistema de primer orden.** Supóngase que el controlador en el sistema de control de nivel de líquido de la Fig. 8-28 es proporcional. Supóngase también que la entrada de referencia al sistema es  $\bar{X}$ . En  $t = 0$  se cambia la entrada de referencia de  $\bar{X}$  a  $\bar{X} + x$ . Supóngase que todas las variables mostradas en el diagrama ( $x$ ,  $q_i$ ,  $h$  y  $q_o$ ) se miden desde sus respectivos valores en estado estable  $\bar{X}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{H}$  y  $\bar{Q}$ . Supongamos también que las magnitudes de las variables  $x$ ,  $q_i$ ,  $h$  y  $q_o$  son suficientemente pequeñas, lo cual significa que el sistema puede representarse aproximadamente mediante un modelo matemático lineal.

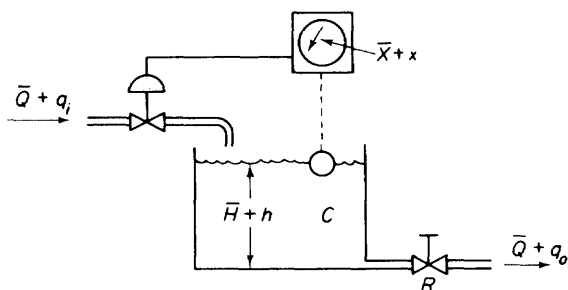


Fig. 8-28. Sistema de control de nivel de líquido.

En relación con la Sec. 4-5, la ecuación del sistema de nivel de líquido puede obtenerse como

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (8-21)$$

[Consúltese la Ec. (4-17).] De modo que la función de transferencia entre  $H(s)$  y  $Q_i(s)$  se encuentra a partir de la Ec. (8-21) como

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Supongamos aquí que la ganancia  $K_v$  de la válvula de control es constante en la proximidad de la condición de operación en estado estable. Entonces, puesto que el controlador es proporcional, el cambio en la razón de

flujo de entrada  $q_i$  es proporcional al error del actuador  $e$ , o sea

$$q_i = K_p K_v e \quad (8-22)$$

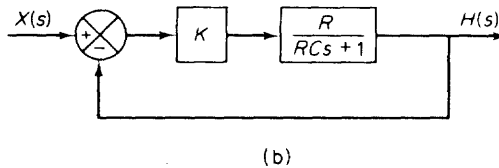
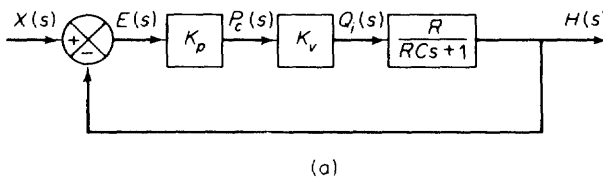
donde  $K_p$  es la ganancia del controlador proporcional. En términos de cantidades de la transformada de Laplace, la Ec. (8-22) se hace

$$Q_i(s) = K_p K_v E(s)$$

En la Fig. 8-29(a) aparece un diagrama de bloques de este sistema. Para simplificar nuestro análisis, supongamos que  $x$  y  $h$  son señales de la misma clase con las mismas unidades y, por lo tanto, pueden compararse directamente. (De otro modo deberíamos insertar una función de transferencia de realimentación  $K_b$  en la trayectoria de la realimentación.) Se da un diagrama de bloques simplificado en la Fig. 8-29(b), donde  $K = K_p K_v$ .

En el siguiente material investigaremos la respuesta  $h(t)$  a un cambio en la entrada de referencia. Supondremos un cambio escalón unitario en  $x(t)$ . La función de transferencia de malla cerrada entre  $H(s)$  y  $X(s)$  está dada por

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs + 1 + KR} \quad (8-23)$$



**Fig. 8-29.** (a) Diagrama de bloques del sistema de control de nivel de líquido mostrado en la Fig. 8-28; (b) diagrama de bloques simplificado.

Puesto que la transformada de Laplace de la función escalón unitario es  $1/s$ , sustituyendo  $X(s) = 1/s$  en la Ec. (8-23) da

$$H(s) = \frac{KR}{RCs + 1 + KR} \frac{1}{s}$$

Entonces, la expansión de  $H(s)$  en fracciones parciales resulta en

$$H(s) = \frac{KR}{1 + KR} \frac{1}{s} - \frac{KR}{1 + KR} \frac{1}{s + [(1 + KR)/RC]} \quad (8-24)$$



A continuación, al tomar la transformada inversa de Laplace de ambos lados de la Ec. (8-24), obtenemos la solución en el tiempo  $h(t)$ .

$$h(t) = \frac{KR}{1 + KR} (1 - e^{-t/T_1}) \quad \text{para } t \geq 0 \quad (8-25)$$

donde

$$T_1 = \frac{RC}{1 + KR}$$

Nótese que la constante de tiempo  $T_1$  del sistema de malla cerrada es diferente de la constante de tiempo  $RC$  del sistema de nivel sólo de líquido.

La curva de la respuesta  $h(t)$  está graficada en la Fig. 8-30. De la Ec. (8-25) vemos que cuando  $t$  tiende al infinito, el valor de  $h(t)$  tiende a  $KR/(1 + KR)$  o

$$h(\infty) = \frac{KR}{1 + KR}$$

Puesto que  $x(\infty) = 1$ , hay un error en estado estable de magnitud  $1/(1 + KR)$ . Tal error se llama *descompensación*. El valor de la descompensación se hace menor a medida que la ganancia  $K$  se hace mayor.

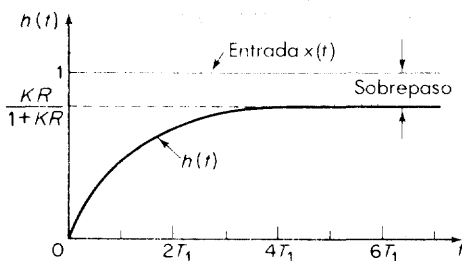


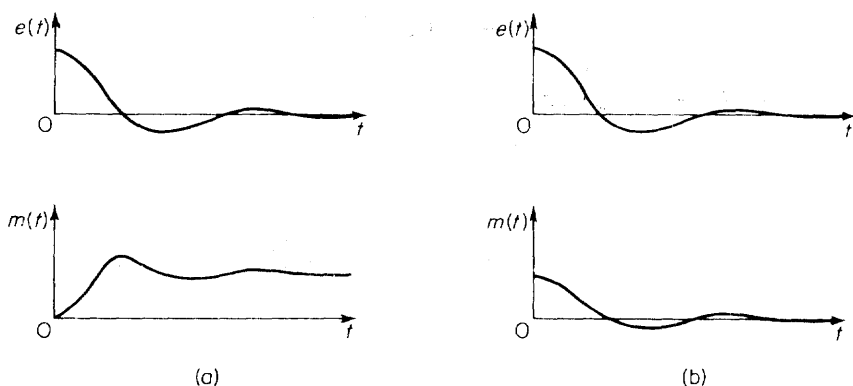
Fig. 8-30. Curva de respuesta escalón unitario del sistema mostrado en la Fig. 8-29(b).

**Eliminación de la descompensación mediante el uso del control integral.** En el control proporcional de una planta cuya función de transferencia no posea un integrador  $1/s$  (de modo que la función de transferencia prealimentada no incluya integrador o integradores), hay un error en estado estable o descompensación en la respuesta escalón unitario. Esa descompensación puede eliminarse si se incluye en el controlador una acción de control integral.

Bajo la acción de control integral la señal de control (la señal de salida del controlador) en cualquier instante es el área bajo la curva de la señal de error del actuador hasta ese instante. La señal de control  $m(t)$  puede tener un valor diferente de cero cuando la señal de error del actuador  $e(t)$  es cero, como lo muestra la Fig. 8-31(a). Esta situación es imposible en el caso del controlador proporcional, puesto que una señal de control diferente de cero requiere una señal de error del actuador diferente de cero. (Una señal de

error del actuador diferente de cero en estado estable significa que hay una descompensación.) La figura 8-31(b) muestra la curva  $e(t)$  contra  $t$  y la curva correspondiente  $m(t)$  contra  $t$  cuando el controlador es del tipo proporcional.

Nótese que la acción de control integral mejora la exactitud del estado estable mediante la eliminación de la descompensación o del error en estado estable. Incluso puede llevar a una respuesta oscilatoria de amplitud lentamente decreciente, o aun de amplitud creciente, siendo cualesquiera de las dos indeseables.



**Fig. 8-31.** (a) Curva de error y curva de señal de control del sistema que usa un controlador integral; (b) curva de error y curva de señal de control del sistema que usa un controlador proporcional.

**Control integral de un sistema de nivel de líquido.** La figura 8-32(a) muestra un sistema de control de nivel de líquido. Supongamos aquí que el controlador es integral. Supongamos también que las variables  $x$ ,  $q_i$ ,  $h$  y  $q_o$ , las cuales se miden desde sus respectivos valores en estado estable  $X$ ,  $Q$ ,  $H$  y  $Q$ , son cantidades pequeñas; por lo tanto, el sistema puede considerarse lineal. En estas suposiciones, el diagrama de bloques del sistema puede obtenerse como se muestra en la Fig. 8-32(b). De este diagrama, la función de transferencia de malla cerrada entre  $H(s)$  y  $X(s)$  es

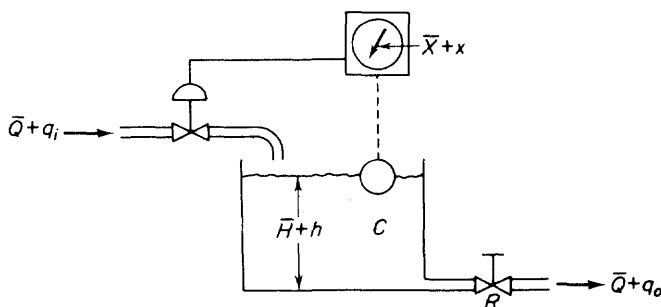
$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$

Se sigue que

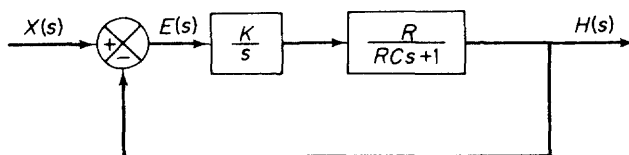
$$\frac{F(s)}{X(s)} = \frac{X(s) - H(s)}{X(s)} = \frac{RCs^2 + s}{RCs^2 + s + KR}$$

Puesto que el sistema es estable, el error  $e_{ss}$  en estado estable de la respuesta escalón unitario se encuentra aplicando el teorema del valor final.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(RCs^2 + s)}{RCs^2 + s + KR} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$



(a)



(b)

**Fig. 8-32.** (a) Sistema de control de nivel de líquido; (b) diagrama de bloques.

Un control integral del sistema de nivel de líquido elimina así el error en estado estable de la respuesta escalón, mejorando, por lo tanto, la exactitud en el estado estable. Ésta es una mejora importante sobre el control proporcional, el cual produce descompensación.

Debe notarse que la acción de control proporcional integral proporciona justamente una exactitud en el estado estable tan buena como la acción de control integral sola. De hecho, el uso del control proporcional integral permitirá que la respuesta transitoria disminuya más aprisa.

**Acción de control derivativa.** La acción de control derivativa, cuando se agrega a un controlador proporcional, proporciona un medio para obte-

ner un controlador con mayor sensibilidad. Una ventaja de usar la acción derivativa es que responde a la razón de cambio del error del actuador y puede producir una corrección importante antes que la magnitud del error del actuador se haga demasiado grande. Así el control derivativo se anticipa al error del actuador, inicia una acción correctiva pronta y tiende a incrementar la estabilidad del sistema.

Aunque el control derivativo no afecta el error en estado estable directamente, agrega amortiguamiento al sistema, y, por lo tanto, permite el uso de un valor mayor en la ganancia del sistema, factor que lleva a mejorar la exactitud del estado estable.

Nótese cómo a causa de que el control derivativo opera sobre la razón de cambio del error del actuador y no sobre el propio error del actuador, este nunca se usa solo. Se usa siempre en combinación con una acción de control proporcional o proporcional integral.

**Control proporcional de un sistema con carga inercial.** Antes de considerar el efecto de la acción de control derivativo sobre el funcionamiento del sistema, expliquemos el control proporcional de una carga inercial.

En el sistema de control de posición de la Fig. 8-33(a), la caja con la función de transferencia  $K_p$  representa un controlador proporcional. Su salida es una señal del par  $T$ , la cual se aplica a un elemento de inercia  $J$ . La salida del sistema es el desplazamiento angular  $\theta_o$  del elemento inercial. Para el elemento inercial, tenemos

$$J\ddot{\theta}_o = T$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo cero las condiciones iniciales, se hace

$$Js^2\Theta_o(s) = T(s)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Theta_o(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

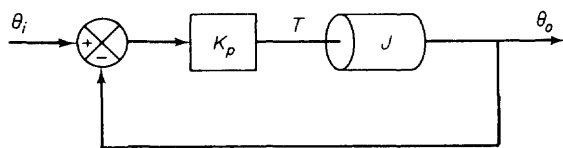
El diagrama de la Fig. 8-33(a) puede redibujarse como en la Fig. 8-33(b). De este diagrama la función de transferencia de malla cerrada puede obtenerse como

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

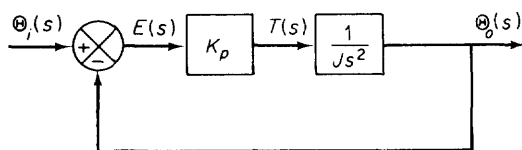
Puesto que las raíces de la ecuación característica

$$Js^2 + K_p = 0$$

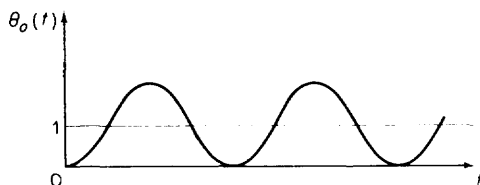
son imaginarias, la respuesta a la entrada escalón unitario continúa oscilando indefinidamente como se muestra en la Fig. 8-33(c).



(a)



(b)



(c)

**Fig. 8-33.** (a) Sistema de control de posición; (b) diagrama de bloques; (c) curva de respuesta escalón unitario.

Los sistemas de control que presentan tales oscilaciones sostenidas no son aceptables. Veremos que la adición de control derivativo estabiliza el sistema.

**Control proporcional derivativo de un sistema con carga inercial.** Modifiquemos el controlador proporcional para hacerlo un controlador proporcional derivativo cuya función de transferencia sea  $K_p(1 + T_d s)$ . El par desarrollado por el controlador es proporcional a  $K_p(e + T_d \dot{e})$ , donde  $e$  es la señal de error del actuador. La acción de control derivativo es esencialmente anticipadora; mide la velocidad del error instantáneo y predice con gran anticipación en el tiempo las desviaciones con el objeto de producir una acción compensadora apropiada antes que ocurra la desviación.

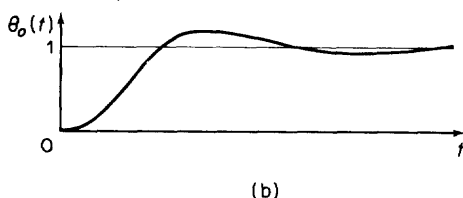
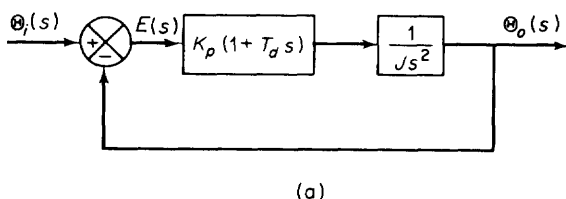
En el sistema mostrado en la Fig. 8-34(a), la función de transferencia de malla cerrada está dada por

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{Js^2 + K_p T_d s + K_p}$$

### La ecuación característica

$$Js^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

tiene ahora dos raíces con parte real negativa, para valores positivos de  $J$ ,  $K_p$ , y  $T_d$ . Así, la acción de control derivativo introduce un efecto amortiguador. Una curva típica de la respuesta  $\theta_o(t)$  a la entrada escalón unitario se da en la Fig. 8-34(b). Claramente, la curva de respuesta muestra una notable mejoría sobre la curva de respuesta original, mostrada en la Fig. 8-33(c).



**Fig. 8-34.** (a) Diagrama de bloques de un sistema de control de posición que usa un controlador proporcional derivativo; (b) curva de respuesta escalón unitario.

## 8-5 ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

Una razón de que los sistemas con almacenamiento de energía no pueden responder instantáneamente, presentarán una respuesta transitoria al someterlos a entrada o perturbaciones. En consecuencia, las características de la respuesta transitoria constituyen uno de los factores más importantes en el diseño de sistemas.

En muchos casos prácticos, las características de comportamiento deseadas en un sistema de control pueden darse en términos de las especificaciones de la respuesta transitoria. Con frecuencia, tales características de comportamiento se especifican en términos de la respuesta transitoria a la entrada escalón unitario, puesto que éste es fácil de generar y es suficientemente eficaz. (Si la respuesta de un sistema lineal a una entrada de escalón se conoce, es posible calcular matemáticamente la respuesta a cualquier entrada.)

La respuesta transitoria de un sistema a una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia al comparar las respuestas transitorias de diferentes sistemas, es una práctica común utilizar

una condición inicial estándar: El sistema está inicialmente en reposo con la salida y todas las derivadas respecto al tiempo en cero, naturalmente. Por tanto, las características de la respuesta pueden compararse fácilmente.

**Especificaciones de la respuesta transitoria.** La respuesta transitoria de un sistema de control práctico a menudo muestra oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control a una entrada escalón unitario, es conveniente designar lo siguiente.

1. Tiempo de retardo,  $t_d$
2. Tiempo de subida,  $t_r$
3. Tiempo pico,  $t_p$
4. Sobrepeaso máximo,  $M_p$
5. Tiempo de asentamiento,  $t_s$

Estas especificaciones se definen adelante y se muestran gráficamente en la Fig. 8-35.

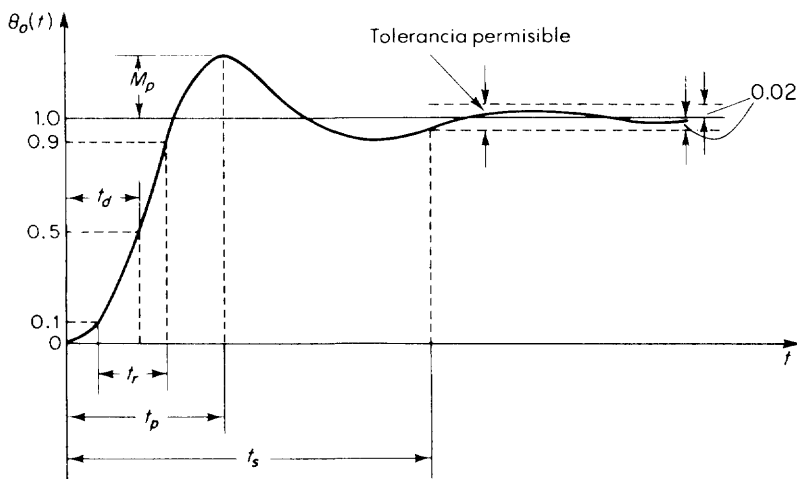


Fig. 8-35. Diagrama que muestra especificaciones de la respuesta transitoria.

**Tiempo de retardo.** El tiempo de retardo  $t_d$  es el tiempo necesario para que la respuesta llegue a la mitad del valor final la primera vez.

**Tiempo de subida.** El tiempo de subida  $t_r$  es el tiempo requerido para que la respuesta se eleve de 10 a 90%, o de 5 a 95%, o de 0 a 100% de su valor final. En sistemas subamortiguados de segundo orden, normalmente se

usa el tiempo de subida de 0 a 100%. En sistemas sobreamortiguados, es común el tiempo de subida de 10 a 90%.

**Tiempo pico.** El tiempo del pico  $t_p$  es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso.

**Sobrepaso máximo (porcentual).** El sobrepaso máximo  $M_p$  es el valor del pico máximo de la curva de respuesta  $\theta_o(t)$  contra  $t$  medida desde la cota unitaria. Si el valor en estado estable final de la respuesta difiere de la unidad, entonces es una práctica común usar el porcentaje de sobrepaso. Este se define mediante

$$\text{Máximo sobrepaso porcentual} = \frac{\theta_o(t_p) - \theta_o(\infty)}{\theta_o(\infty)} \times 100\%$$

La cantidad de sobrepaso máxima (porcentual) indica directamente la estabilidad relativa del sistema.

**Tiempo de asentamiento.** El tiempo de asentamiento  $t_s$  es el tiempo requerido para que la curva de respuesta alcance el 2% del valor final y se mantenga en él. (Nótese que en algunos casos se usa el 5% en lugar del 2% como porcentaje del valor final.) El tiempo de asentamiento está relacionado con la mayor constante de tiempo del sistema.

**Comentarios.** Nótese que si especificamos los valores  $t_d$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_s$  y  $M_p$ , la forma de la curva de respuesta queda virtualmente determinada. Este hecho puede verse claramente en la Fig. 8-36.

Además, nótese que no todas estas especificaciones se aplican necesariamente a cualquier caso dado. Por ejemplo, en un sistema sobreamortiguado, no se aplican los términos tiempo de pico y sobrepaso máximo.

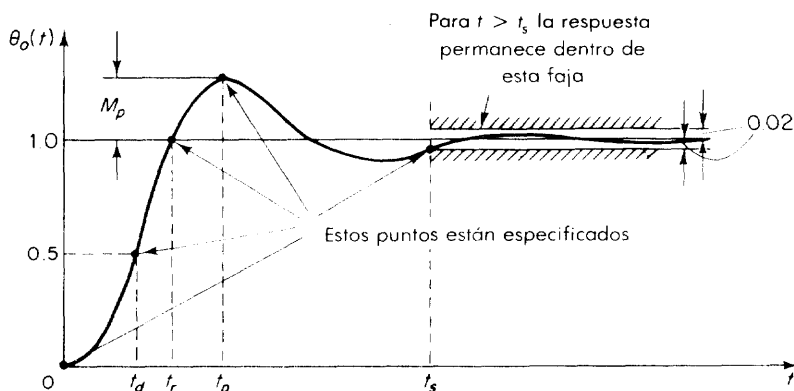


Fig. 8-36. Especificaciones de la curva de respuesta transitoria.



**Sistema de control de posición.** El sistema de control de posición (servomecanismo) mostrado en la Fig. 8-37(a) consta de un controlador proporcional y elementos de carga (elementos inerciales y fricción viscosa). Supóngase que deseamos controlar la posición de salida  $\theta_o$  de acuerdo con la posición de entrada  $\theta_i$ .

La ecuación para los elementos de carga es

$$J\ddot{\theta}_o + b\dot{\theta}_o = T$$

donde  $T$  es el par producido por el controlador cuya constante de ganancia es  $K$ . Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de esta última ecuación, suponiendo cero las condiciones iniciales, encontramos

$$Js^2\Theta_o(s) + bs\Theta_o(s) = T(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia entre  $\Theta_o(s)$  y  $T(s)$  es

$$\frac{\Theta_o(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + b)}$$

Al usar la función de transferencia, la Fig. 8-37(a) puede redibujarse como en la Fig. 8-37(b). La función de transferencia de malla cerrada se obtiene entonces como

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K}{Js^2 + bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + (b/J)s + (K/J)}$$

o bien

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8-26)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} = \text{frecuencia natural no amortiguada}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{KJ}} = \text{relación de amortiguamiento}$$

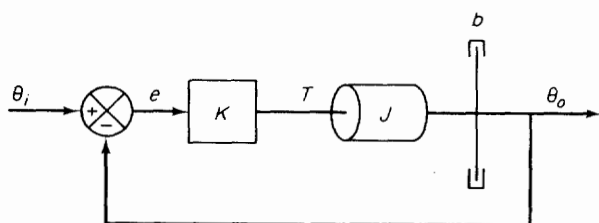
En términos de  $\zeta$  y  $\omega_n$ , el diagrama de bloques de la Fig. 8-37(b) puede redibujarse como en la Fig. 8-37(c).

A continuación, consideremos la respuesta escalón unitario de este sistema cuando  $0 < \zeta < 1$ . Para una entrada escalón unitario, tenemos  $\Theta_i(s) = 1/s$ . Entonces

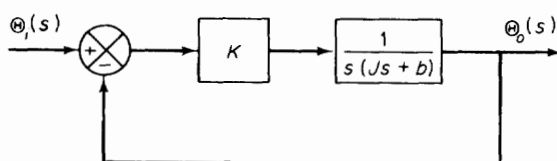
$$\begin{aligned} \Theta_o(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned} \quad (8-27)$$

donde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . La transformada inversa de Laplace de la Ec. (8-27) da

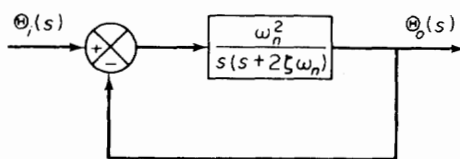
$$\begin{aligned}\theta_o(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right)\end{aligned}\quad (8-28)$$



(a)



(b)



(c)

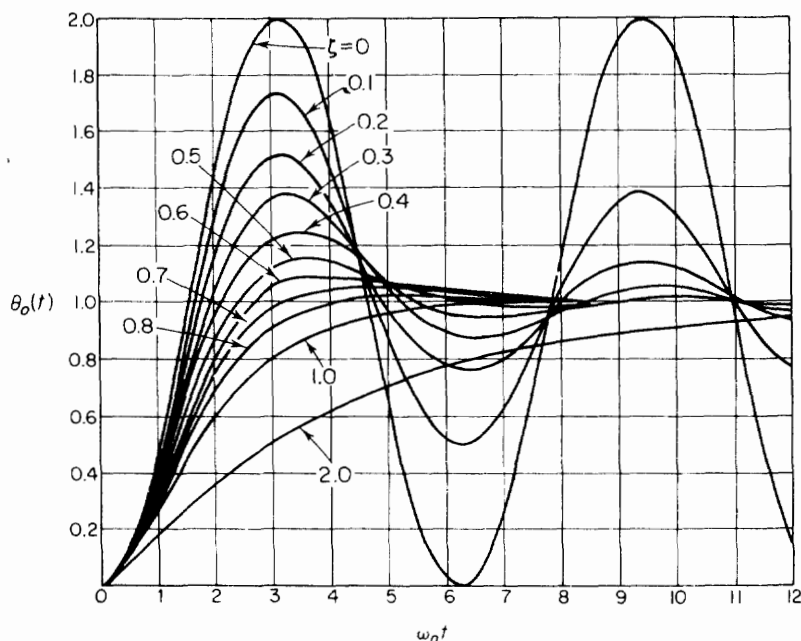
**Fig. 8-37.** (a) Sistema de control de posición; (b) diagrama de bloques; (diagrama de bloques del sistema de segundo orden en forma estándar.

o bien

$$\theta_o(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (8-29)$$

Se muestra en la Fig. 8-38 una familia de curvas  $\theta_o(t)$  con diferentes valores de  $\zeta$ , donde la abscisa es la variable sin dimensión  $\omega_n t$ . Las curvas son funciones solamente de  $\zeta$ .

**Comentario sobre las especificaciones de la respuesta transitoria.** Excepto en ciertas instalaciones donde no se pueden tolerar oscilaciones, es preferible que la respuesta transitoria sea suficientemente rápida así como razonablemente amortiguada. Así, con el objeto de obtener la respuesta transitoria deseable en un sistema de segundo orden, el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  debe escogerse entre 0.4 y 0.8. Los valores pequeños



**Fig. 8-38.** Curvas de respuesta escalón unitario del sistema mostrado en la Fig. 8-37(c).

de  $\zeta$  ( $\zeta < 0.4$ ) producen sobrepaso excesivo en la respuesta transitoria y un sistema con un valor grande de  $\zeta$  ( $\zeta > 0.8$ ) responde lentamente.

Más adelante veremos que el sobrepaso máximo y el tiempo de subida entran en conflicto entre sí. En otras palabras, el máximo sobrepaso y el tiempo de subida no pueden simultáneamente hacer menores. Si uno se hace menor, el otro necesariamente se hace mayor y viceversa.

**Sistemas de segundo orden y especificaciones de la respuesta transitoria.** En las páginas siguientes obtendremos el tiempo de subida, el tiempo pico, el sobrepaso máximo y el tiempo de asentamiento del sistema de segundo orden dado por la Ec. (8-26). Estos valores se obtendrán en términos de  $\zeta$  y  $\omega_n$ . El sistema se supone subamortiguado.

**Tiempo de subida  $t_r$ .** En relación con la Ec. (8-28), encontramos el tiempo de subida  $t_r$  tomando  $\theta_0(t_r) = 1$  o

$$\theta_0(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) \quad (8-30)$$

Puesto que  $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$ , podemos obtener de la Ec. (8-30) la siguiente ecuación

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

o bien

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Así, el tiempo de subida  $t_r$  es

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (8-31)$$

donde  $\beta$  está definida en la Fig. 8-39. Nótese que el valor de  $\tan^{-1}(-\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$  cae entre  $\frac{1}{2}\pi$  y  $\pi$ . Si  $\zeta = 0+$ , entonces  $\tan^{-1}(-\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta) = \frac{1}{2}\pi+$ ; si  $\zeta = 1-$ , entonces  $\tan^{-1}(-\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta) = \pi-$ . Claramente con el objeto de obtener un valor pequeño de  $t_r$ , debemos tener una gran  $\omega_d$ .

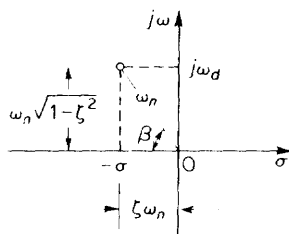


Fig. 8-39. Definición del ángulo  $\beta$ .

**Tiempo pico  $t_p$ .** En relación con la Ec. (8-28), podemos obtener el tiempo pico diferenciando  $\theta_0(t)$  con respecto al tiempo  $t$  y haciendo esta derivada igual a cero o

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t = 0$$

Se sigue que

$$\sin \omega_d t = 0$$

o bien

$$\omega_d t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Puesto que el tiempo pico corresponde al primer pico de sobrepaso, tenemos  $\omega_d t_p = \pi$ . Entonces,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (8-32)$$

El tiempo pico  $t_p$  corresponde a medio ciclo de la frecuencia de oscilación amortiguada.

**Sobrepaso máximo  $M_p$ .** El sobrepaso máximo ocurre en el tiempo pico o en  $t = t_p = \pi/\omega_d$ . Así, de la Ec. (8-28)  $M_p$  se obtiene como

$$\begin{aligned} M_p &= \theta_o(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)} \left( \cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \pi \right) \\ &= e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned} \quad (8-33)$$

El sobrepaso máximo porcentual es  $e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$ .

**Tiempo de asentamiento  $t_s$ .** En un sistema de segundo orden subamortiguado, la respuesta transitoria a la entrada escalón unitario está dada por la Ec. (8-29). Nótese que la curva de respuesta  $\theta_o(t)$  permanece siempre dentro de un par de curvas envolventes como se muestra en la Fig. 8-40. [Las curvas  $1 \pm (e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2})$  son las curvas envolventes de la respuesta transitoria a una entrada escalón unitario.] La constante de tiempo de estas curvas envolventes es  $1/\zeta\omega_n$ . El tiempo de asentamiento  $t_s$  es cuatro veces la constante de tiempo, es decir,

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (8-34)$$

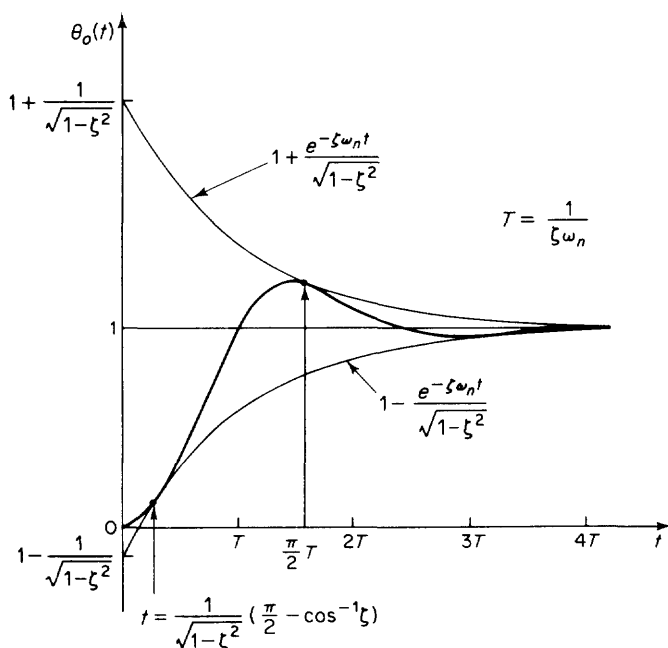


Fig. 8-40. Curva de respuesta escalón unitario y sus curvas envolventes.

Nótese que el tiempo de asentamiento es inversamente proporcional a la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Puesto que el valor de  $\zeta$  está determinado usualmente por el requisito del sobrepaso máximo permisible, el tiempo de asentamiento se determina principalmente por la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . En otras palabras, la duración del periodo transitorio puede variarse sin cambiar el sobrepaso máximo, al ajustar la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ .

Del análisis precedente está claro que  $\omega_d$  debe ser grande si vamos a tener una respuesta rápida. Con el objeto de limitar el sobrepaso máximo  $M_p$  y disminuir el tiempo de asentamiento, el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  no debe ser muy pequeña. La relación entre el sobrepaso porcentual máximo  $M_p\%$  y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  se muestra en la Fig. 8-41. Nótese que si el factor de amortiguamiento relativo está entre 0.4 y 0.8, entonces el sobrepaso porcentual máximo de una respuesta escalón está entre 25 y 2.5%.

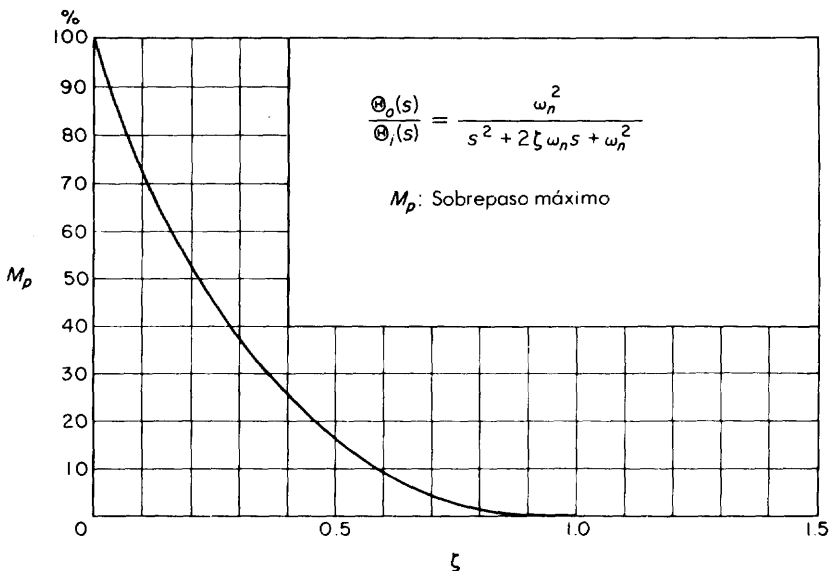


Fig. 8-41. Curva que relaciona el sobrepaso porcentual máximo  $M_p$  y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$ .

**Ejemplo 8-3.** Determinése el tiempo de subida, el tiempo pico, el sobrepaso o máximo y el tiempo de asentamiento cuando el sistema de la Fig. 8-42 está sometido a una entrada escalón unitario.

Nótese que  $\omega_n = 1$  rad/s y  $\zeta = 0.5$  para este sistema. Por lo tanto,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{1 - 0.5^2} = 0.866$$

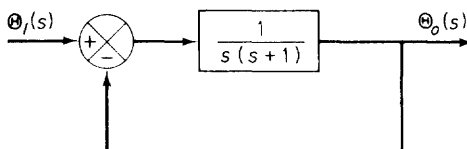


Fig. 8-42. Sistema de control.

Tiempo de subida  $t_r$ . En relación con la Ec. (8-13) el tiempo de subida  $t_r$  es

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

donde  $\beta = \sin^{-1} 0.866 = 1.05$  rad. Por lo tanto,

$$t_r = \frac{3.14 - 1.05}{0.866} = 2.41 \text{ s}$$

Tiempo pico  $t_p$ . El tiempo pico  $t_p$  está dado por la Ec. (8-32).

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{0.866} = 3.63 \text{ s}$$

Sobrepaso máximo  $M_p$ . En relación con la Ec. (8-33) el sobrepaso máximo  $M_p$  es

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-0.5 \times 3.14/0.866} = e^{-1.81} = 0.163$$

Tiempo de asentamiento  $t_s$ . El tiempo de asentamiento  $t_s$  está definido por la Ec. (8-34) y es

$$t_s = \frac{4}{0.5 \times 1} = 8 \text{ s}$$

## 8-6 MEJORAMIENTO EN LAS CARACTERÍSTICAS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

En la Sec. 8-5 consideramos la respuesta escalón de sistemas de control de posición. Se mostró que un factor de amortiguamiento relativo pequeño haría el sobrepaso máximo en la respuesta escalón grande, así como en un tiempo de asentamiento grande. Tales características son generalmente indeseables. Esta sección comienza con un método para mejorar las características de amortiguamiento de un sistema de segundo orden a través de realimentación de la velocidad (realimentación tacómetro). Luego se considerará la respuesta de los sistemas de segundo orden a entradas rampa. Aquí presentamos un método para mejorar el comportamiento en estado estable de la respuesta rampa por medio de una acción de control proporcional derivativo. Finalmente se describe otro método para mejorar tal comportamiento en estado estable a través de un prefiltro del tipo proporcional derivativo.

**Tacómetros.** Un tacómetro de cd es un generador que produce un voltaje proporcional a su velocidad de rotación. Se usa como transductor, convirtiendo la velocidad de la flecha rotatoria en un voltaje de cd propor-

cional. Si la entrada al tacómetro es la posición  $\theta$  de la flecha y la salida es el voltaje  $e$ , entonces la función de transferencia del tacómetro de cd es

$$\frac{E(s)}{\Theta(s)} = K_h s$$

donde  $E(s) = \mathcal{L}[e]$ ,  $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta]$ , y  $K_h$  es una constante. La inclusión de semejante tacómetro en la trayectoria de la realimentación del sistema de control de posición mejorará las características de amortiguamiento del sistema. El uso del tacómetro para obtener una señal de realimentación de velocidad se conoce como *realimentación de velocidad* o *realimentación por tacómetro*.

**Sistemas de control de posición con realimentación de velocidad.** Los sistemas con un factor de amortiguamiento relativo pequeño muestran un gran sobrepaso máximo y una larga oscilación sostenida en la respuesta escalón. Para incrementar el amortiguamiento efectivo del sistema y así mejorar las características de la respuesta transitoria, se emplea frecuentemente la realimentación de velocidad.

Considérese el sistema de control de posición con realimentación de velocidad mostrado en la Fig. 8-43(a). Supongamos que el coeficiente de fricción viscosa  $b$  es pequeño de modo que el factor de amortiguamiento relativo en ausencia del tacómetro es bastante pequeña. En el presente sistema, la señal de velocidad, junto la señal de posición, se realimenta a la entrada para producir la señal de error del actuador. (Nótese que al obtener la señal de velocidad, es preferible usar un tacómetro en vez de diferenciar físicamente la señal de posición de la salida porque la diferencia siempre acentúa las señales de ruido.)

El diagrama de bloques de la Fig. 8-43(a) puede simplificarse como en la Fig. 8-43(b), lo que da

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K}{Js^2 + (b + KK_h)s + K}$$

El factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  de este sistema es

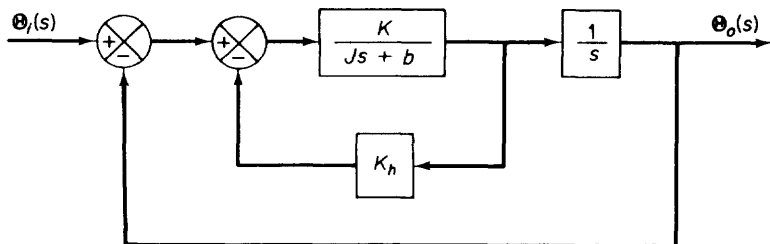
$$\zeta = \frac{b + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \quad (8-35)$$

y la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es

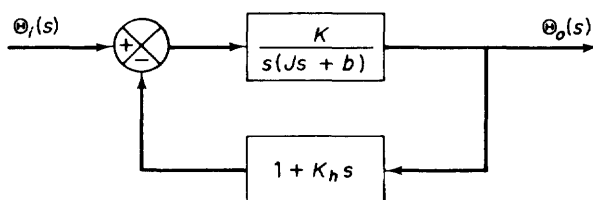
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

Nótese que la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  no está afectada por la realimentación de velocidad. Dados los valores de  $J$  y  $b$ , el valor de  $K$  se determina de lo requerido en la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . La realimentación de velocidad (realimentación por tacómetro) tiene el efecto de incrementar el factor de amortiguamiento relativo sin afectar la frecuencia natural no amortiguada del sistema de segundo orden.





(a)



(b)

Fig. 8-43. (a) Diagrama de bloques de un sistema de control de posición con realimentación de velocidad; (b) diagrama de bloques simplificado.

**Ejemplo 8-4.** Supóngase, en el sistema mostrado en la Fig. 8-43(b), que los valores numéricos de  $J$  y  $b$  son

$$J = 1 \text{ kg-m}^2$$

$$b = 1 \text{ N-m-s}$$

Deseamos determinar los valores de la ganancia  $K$  y la constante de realimentación de velocidad  $K_h$  de modo que el sobrepaso máximo sea 0.2 y el tiempo poco sea 1 s.

El sobrepaso máximo  $M_p$  está dada por la Ec. (8-33) como

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Este valor debe ser 0.2. Por lo tanto,

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.2$$

la cual da

$$\zeta = 0.456$$

El tiempo pico  $t_p$  está especificado como 1 s. Por lo tanto, de la Ec. (8-32)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

o bien

$$\omega_d = 3.14$$

Puesto que  $\zeta$  es 0.456,  $\omega_n$  es

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 3.53$$

La frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es igual a  $\sqrt{K/J} = \sqrt{K/1} = \sqrt{K}$ , y así

$$K = \omega_n^2 = 12.5 \text{ N-m}$$

Entonces  $K_h$  se obtiene de la Ec. (8-35) como

$$K_h = \frac{2\sqrt{K}\zeta - 1}{K} = 0.178 \text{ s}$$

**Errores en estado estable de la respuesta rampa.** Los sistemas de control de posición deben estar sometidos a entradas cambiantes que pueden ser aproximadamente fragmentos de entradas rampa. En tal respuesta rampa, el error en estado estable al seguir las entradas debe ser pequeño.

Considérese el sistema mostrado en la Fig. 8-44. La respuesta transitoria de este sistema cuando está sometido a una entrada rampa puede encontrarse por un método directo. En el presente análisis, examinaremos el error en estado estable cuando el sistema está sometido a una entrada como la expresada.

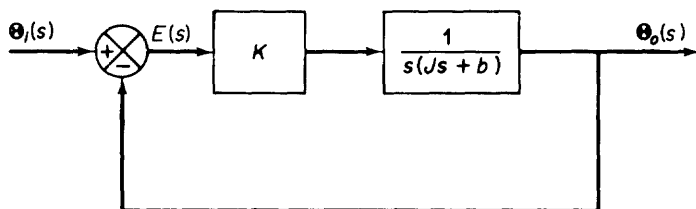


Fig. 8-44. Diagrama de bloques de un sistema de control de posición con un controlador proporcional.

Del diagrama de bloques, tenemos

$$\frac{E(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{\Theta_i(s) - \Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = 1 - \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{Js^2 + bs}{Js^2 + bs + K}$$

El error en estado estable de la respuesta a la rampa unitaria puede obtenerse como sigue. Para una entrada rampa unitaria  $\theta_i(t) = t$ , tenemos  $\Theta_i(s) = 1/s^2$ . El error en estado estable  $e_{ss}$  se obtiene entonces como

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Js^2 + bs}{Js^2 + bs + K} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(Js + b)}{s^2(Js^2 + bs + K)} = \frac{b}{K} \end{aligned}$$

Con el objeto de asegurar un error en estado estable pequeño al seguir una entrada rampa, el valor de  $K$  debe ser grande y valor de  $b$  pequeño. Sin embargo, un gran valor de  $K$  y un pequeño valor de  $b$  pueden hacer el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  pequeño y, en general, resultará en características de la respuesta transitoria indeseables. En consecuencia, es necesario disponer de algunos medios para mejorar el comportamiento en estado estable al seguir entradas rampa sin afectar adversamente el comportamiento de la respuesta transitoria. A continuación se exponen dos de esos medios.

**Control proporcional derivativo de sistemas de segundo orden.** Debe alcanzarse un equilibrio entre un comportamiento de la respuesta transitoria aceptable y un comportamiento aceptable en estado estable a través de una acción de control proporcional derivativo.

En el sistema de la Fig. 8-45, la función de transferencia de malla cerrada es

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K_p + K_d s}{Js^2 + (b + K_d)s + K_p} \quad (8-36)$$

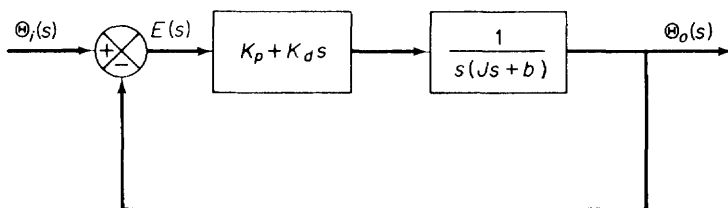


Fig. 8-45. Diagrama de bloques de un sistema de control de posición con un controlador proporcional derivativo.

Por lo tanto,

$$\frac{E(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{\Theta_i(s) - \Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{Js^2 + bs}{Js^2 + (b + K_d)s + K_p}$$

Para una entrada rampa unitaria,  $\Theta_i(s)$  es  $1/s^2$ . Luego se sigue

$$E(s) = \frac{Js^2 + bs}{Js^2 + (b + K_d)s + K_p} \frac{1}{s^2}$$

El error en estado estable de una respuesta rampa unitaria es

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Js^2 + bs}{Js^2 + (b + K_d)s + K_p} \frac{1}{s^2} = \frac{b}{K_p}$$

La ecuación característica es

$$Js^2 + (b + K_d)s + K_p = 0$$

El amortiguamiento efectivo de este sistema es entonces  $b + K_d$  en lugar de  $b$ . Puesto que el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  del sistema es

$$\zeta = \frac{b + K_d}{2\sqrt{K_p J}}$$

es posible tener tanto un error en estado estable pequeño  $e_{ss}$  como un factor de amortiguamiento relativo razonable al hacer  $b$  pequeño,  $K_p$  grande, y escoger  $K_d$  suficientemente grande de modo que  $\zeta$  esté entre 0.4 y 0.8.

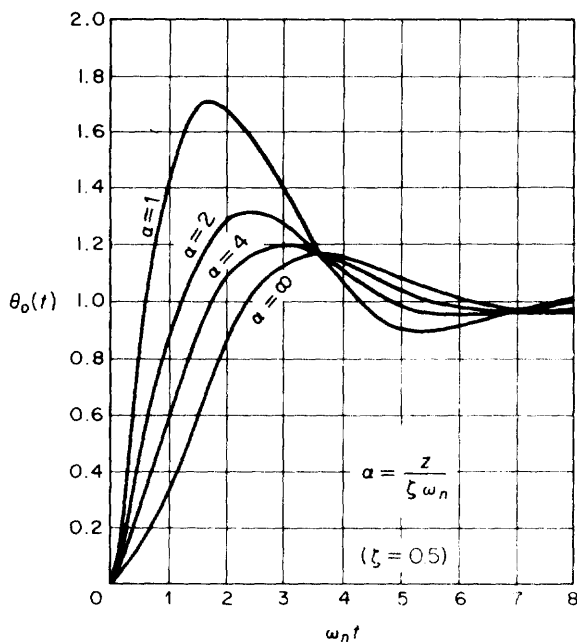
Examinemos la respuesta escalón unitario de este sistema. Definamos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{J}}, \quad z = \frac{K_p}{K_d}$$

En términos de  $\omega_n$ ,  $\zeta$  y  $z$ , la Ec. (8-36) puede escribirse

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \left(1 + \frac{s}{z}\right) \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Adviértase que si un cero,  $s = -z$ , se localiza próximo a los polos de malla cerrada, el comportamiento de la respuesta transitoria difiere considerablemente de aquél de un sistema de segundo orden sin ceros. En la Fig. 8-46 se muestra un conjunto típico de curvas de respuesta de este sistema con  $\zeta = 0.5$  y diferentes valores de  $z/\zeta\omega_n$ . En estas curvas vemos que la acción de control proporcional derivativo hará al tiempo de subida menor y un sobrepaso máximo mayor.



**Fig. 8-46.** Curvas de respuesta escalón unitario del sistema mostrado en la Fig. 8-45 con un factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  igual a 0.5.

**Sistemas de segundo orden con prefiltro tipo proporcional derivativo.** El error en estado estable al seguir una entrada rampa puede eliminarse si la entrada se introduce al sistema a través de un prefiltro tipo proporcional derivativo, como el mostrado en la Fig. 8-47, y si el valor de  $k$  se establece apropiadamente.

La función de transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$  para este sistema es

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{(1 + ks)K}{Js^2 + bs + K}$$

Por lo tanto, la diferencia entre  $\Theta_i(s)$  y  $\Theta_o(s)$  es

$$\begin{aligned} E(s) &= \Theta_i(s) - \Theta_o(s) = \left[ 1 - \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} \right] \Theta_i(s) \\ &= \frac{Js^2 + (b - Kk)s}{Js^2 + bs + K} \Theta_i(s) \end{aligned}$$

El error en estado estable de la respuesta rampa es

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Js^2 + (b - Kk)s}{Js^2 + bs + K} \frac{1}{s^2} = \frac{b - Kk}{K}$$

Así que si  $k$  se escoge como

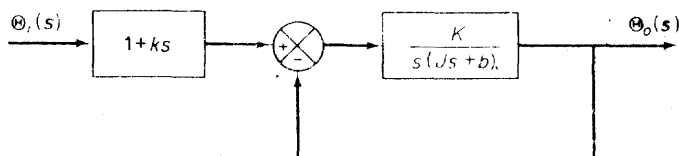
$$k = \frac{b}{K}$$

el error en estado estable al seguir una entrada rampa puede hacerse igual a cero.

Dado los valores de  $J$  y  $b$ , el valor de  $K$  se determina normalmente de lo requerido por  $\omega_n = \sqrt{K/J}$ . Una vez que el valor de  $K$  se ha determinado,  $b/K$  es una constante y el valor de  $k = b/K$  se hace constante. El uso de semejante prefiltro elimina el error en estado estable en la respuesta rampa.

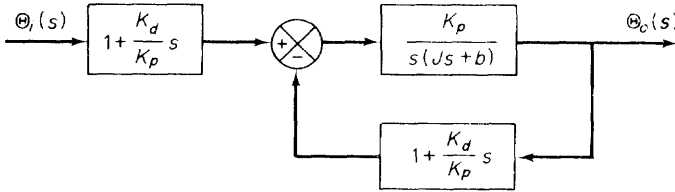
Debe notarse que la respuesta transitoria de este sistema a una entrada escalón unitario ofrecerá un menor tiempo de subida y un mayor sobrepaso máximo que el sistema correspondiente sin el prefiltro.

Vale la pena señalar que el diagrama de bloques del sistema con un controlador proporcional derivativo mostrado en la Fig. 8-45 puede redibujarse como en la 8-48. En este diagrama puede verse que el controlador proporcional derivativo, de hecho, es una combinación de prefiltro y la realimentación de velocidad en la cual los valores de  $k$  como de  $K_h$  se escogen para ser  $K_d/K_p$ .



**Fig. 8-47.** Diagrama de bloques de un sistema de control de posición con prefiltro del tipo proporcional derivativo.

Si el prefiltro y la realimentación de velocidad se proporcionan por separado, los valores de  $k$  y  $K_h$  pueden escogerse independientemente uno del otro. Una selección apropiada de estos valores puede facilitar al ingeniero que equilibre el error en estado estable aceptable al seguir una entrada rampa y un aceptable comportamiento de la respuesta transitoria a la entrada escalón.

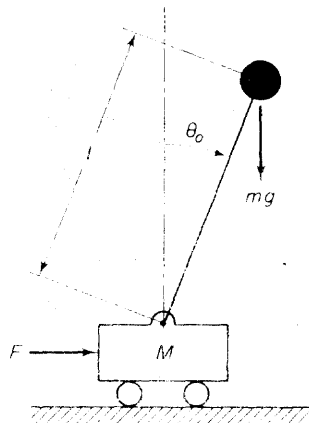


**Fig. 8-48.** Diagrama de bloques modificado del sistema mostrado en la Fig. 8-45.

## 8-7 UN PROBLEMA DE DISEÑO

Al concluir este capítulo, volvamos al problema de diseñar un sistema de control.

Un péndulo invertido montado sobre una carreta impulsada por motor se muestra en la Fig. 8-49. Este es un modelo del control de posición de un impulsor espacial de despegue. La solución del problema del control de posición es mantener al impulsor espacial en posición vertical. El impulsor vertical real (o el péndulo invertido en este problema) es inestable y puede caer en cualquier momento y en cualquier dirección a menos que se le aplique una fuerza de control adecuada. Aquí consideramos un problema en sólo dos dimensiones de modo que el péndulo de la Fig. 8-49 se mueve solamente en el plano de la página.



**Fig. 8-49.** Péndulo invertido montado en una carreta impulsada por motor

Definamos el ángulo de la barra con respecto a la línea vertical como  $\theta_o$ . La dirección positiva de  $\theta_o$  se muestra en el diagrama. La dirección positiva de la fuerza  $F$  aplicada a la carreta necesaria para controlar la posición del péndulo aparece también en el diagrama. Nótese que si el ángulo  $\theta_o$  es positivo, entonces con el objeto de reducir el ángulo  $\theta_o$  y mantener al péndulo invertido vertical, debemos aplicar una fuerza  $F$  en la dirección positiva.

Suponiendo los valores numéricos

$$M = 1000 \text{ kg}$$

$$m = 200 \text{ kg}$$

$$l = 10 \text{ m}$$

diséñese un controlador adecuado tal que el sistema tenga un factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  de 0.7 y una frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  de 0.5 rad/s. Supóngase también que el peso de la barra es despreciable, las fuerzas externas tales como las ráfagas de viento son despreciables, y que no hay fricción en la articulación ni deslizamiento de las ruedas de la carreta.

Puesto que el péndulo invertido es una planta inestable, debe incluirse una acción de control derivativa en el controlador. (Nótese que la acción de control derivativa responde a la razón de cambio del error del actuador y puede iniciar una pronta acción correctiva con el objeto de incrementar la estabilidad del sistema.) Puesto que la acción de control derivativa no puede usarse sola, usemos un controlador proporcional derivativo en el presente problema.

La figura 8-50 muestra un diagrama de bloques posible para este sistema de control. Nótese que el hecho de que la entrada de referencia  $\theta_i$  sea cero significa que queremos mantener el péndulo invertido vertical. El controlador proporcional derivativo tiene la función de transferencia  $K_p(1 + K_d s)$ . Este controlador produce una fuerza  $-F$  donde

$$F = K_p(\theta_o + K_d \dot{\theta}_o) \quad (8-37)$$

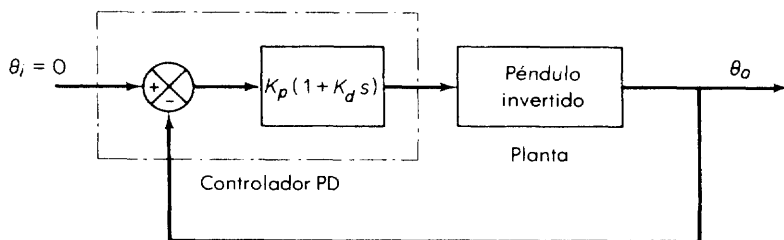


Fig. 8-50. Diagrama de bloques del sistema de control en el cual la planta es el sistema de péndulo invertido mostrado en la Fig. 8-49.

Definamos el sistema coordinado  $x - y$  como se muestra en la Fig. 8-51 y obtengamos las ecuaciones de movimiento de este sistema. La posición hori-

zontal de la carreta es  $x$ . Las posiciones horizontal y vertical de la masa del péndulo son  $x + l \sin \theta_o$  y  $l \cos \theta_o$ , respectivamente.

Aplicando la segunda ley de Newton a la dirección  $x$  del movimiento da

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta_o) = F \quad (8-38)$$

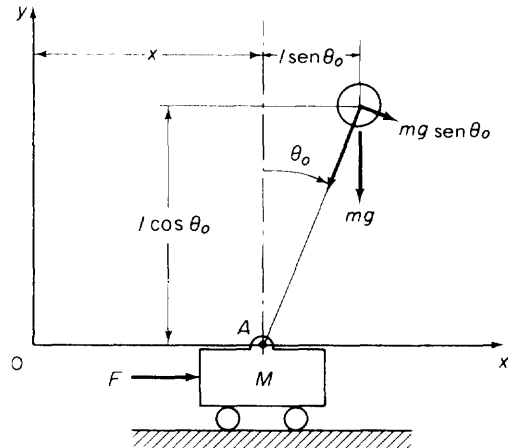


Fig. 8-51. Sistema de péndulo invertido con el sistema de coordenadas  $x$ - $y$ .

Observando que

$$\frac{d}{dt} \sin \theta_o = (\cos \theta_o) \dot{\theta}_o$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \theta_o = (-\sin \theta_o) \dot{\theta}_o^2 + (\cos \theta_o) \ddot{\theta}_o$$

$$\frac{d}{dt} \cos \theta_o = (-\sin \theta_o) \dot{\theta}_o$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \theta_o = (-\cos \theta_o) \dot{\theta}_o^2 - (\sin \theta_o) \ddot{\theta}_o$$

donde un punto denota derivación con respecto al tiempo, la Ec. (8-38) puede reescribirse así:

$$(M + m) \ddot{x} - ml(\sin \theta_o) \dot{\theta}_o^2 + ml(\cos \theta_o) \ddot{\theta}_o = F \quad (8-39)$$

A continuación, considérese el movimiento rotatorio del péndulo invertido con respecto al punto de  $A$  en la Fig. 8-51. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento rotatorio, tenemos

$$\left[ m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta_o) \right] l \cos \theta_o - \left[ m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta_o) \right] l \sin \theta_o = mgl \sin \theta_o$$



Esta última ecuación puede simplificarse como sigue

$$m[\ddot{x} - l(\sin\theta_o)\dot{\theta}_o^2 + l(\cos\theta_o)\ddot{\theta}_o]l\cos\theta_o \\ - m[-l(\cos\theta_o)\dot{\theta}_o^2 - l(\sin\theta_o)\ddot{\theta}_o]l\sin\theta_o = mgl\sin\theta_o$$

y posteriormente simplificarse a

$$m\ddot{x}\cos\theta_o + ml\ddot{\theta}_o = mgl\sin\theta_o \quad (8-40)$$

Las ecuaciones (8-39) y (8-40) son ecuaciones diferenciales no lineales. Puesto que en este problema debemos conservar el péndulo invertido vertical, podemos suponer que  $\theta_o(t)$  y  $\dot{\theta}_o(t)$  son pequeñas. Bajo esta suposición, las Ecs. (8-39) y (8-40) pueden linealizarse. Al sustituir  $\sin\theta_o \doteq \theta_o$  y  $\cos\theta_o \doteq 1$  en las Ecs. (8-39) y (8-40) y despreciando el término que involucra  $\theta_o\dot{\theta}_o^2$ , podemos obtener las ecuaciones linealizadas de movimiento del sistema.

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}_o = F \quad (8-41)$$

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}_o = mg\theta_o \quad (8-42)$$

Estas ecuaciones linealizadas son válidas en tanto que  $\theta_o$  y  $\dot{\theta}_o$  sean pequeñas. Restando la Ec. (8-42) de la Ec. (8-41) da

$$M\ddot{x} = F - mg\theta_o$$

o bien

$$\ddot{x} = -\frac{mg}{M}\theta_o + \frac{F}{M} \quad (8-43)$$

Al sustituir la Ec. (8-43) en la Ec. (8-42) y rearmar, encontramos

$$Ml\ddot{\theta}_o - (M + m)g\theta_o = -F \quad (8-44)$$

En relación con la Ec. (8-44), la función entre  $\Theta_o(s)$  y  $-F(s)$  es

$$\frac{\Theta_o(s)}{-F(s)} = \frac{1}{Ml s^2 - (M + m)g}$$

Al usar esta función de transferencia, el diagrama de bloques de la Fig. 8-50 puede modificarse para dar la Fig. 8-52.

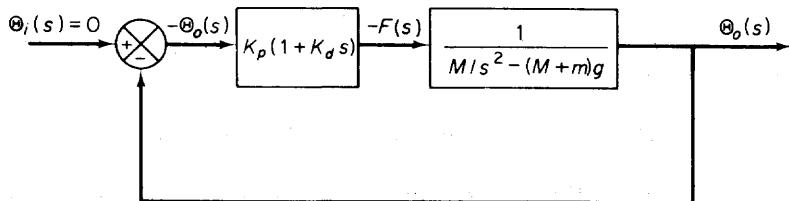


Fig. 8-52. Diagrama de bloques del sistema de control de péndulo invertido.

La sustitución de la Ec. (8-37) en la Ec. (8-44) da

$$Ml\ddot{\theta}_o - (M + m)g\theta_o = -K_p(\theta_o + K_d\dot{\theta}_o)$$

Simplificando, obtenemos

$$\ddot{\theta}_o + \frac{K_p K_d}{Ml} \dot{\theta}_o + \left[ \frac{K_p}{Ml} - \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{g}{l} \right] \theta_o = 0$$

de la cual

$$\omega_n^2 = \frac{K_p}{Ml} - \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{g}{l}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{K_p K_d}{Ml}$$

Por lo tanto,

$$K_p = \omega_n^2 Ml + (M + m)g$$

$$K_d = \frac{2\zeta\omega_n Ml}{K_p}$$

Para determinar los valores numéricos de  $K_p$  y  $K_d$ , sustituimos  $M = 1000$  kg,  $m = 200$  kg,  $\omega_n = 0.5$  rad/s,  $\zeta = 0.7$  y  $l = 10$  m en las ecuaciones para  $K_p$  y  $K_d$ , obteniendo

$$K_p = 0.5^2 \times 1000 \times 10 + (1000 + 200) \times 9.81 = 14.27 \times 10^3 \text{ N/rad}$$

$$K_d = \frac{2 \times 0.7 \times 0.5 \times 1000 \times 10}{14.27 \times 10^3} = 0.491 \text{ s}$$

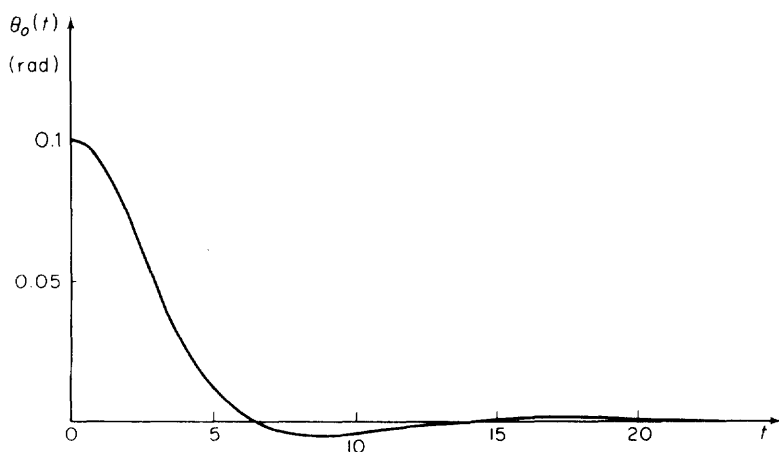
El controlador aquí es proporcional derivativo y tiene la función de transferencia  $G_c(s)$ , donde

$$G_c(s) = K_p(1 + K_d s) = 14.27 \times 10^3(1 + 0.491s)$$

y en la Fig. 8-52 es el diagrama de bloques del sistema diseñado. Nótese que si  $K_p$  y  $K_d$  adoptan los valores así diseñados, cualquier inclinación ligera puede recuperarse sin que el péndulo caiga. Si una perturbación desconocida da un pequeño cambio en forma de escalón en el ángulo  $\theta_o$  (por ejemplo, un cambio en forma de escalón de 0.1 rad), entonces el controlador diseñado producirá la fuerza correctiva requerida para traer el péndulo invertido a una posición vertical y la respuesta resultante  $\theta_o(t)$  mostrará una curva como la de la Fig. 8-53. Adviértase que el tiempo de asentamiento para esta respuesta es  $t_s = 4/(\zeta\omega_n) = 4/(0.7 \times 0.5) = 11.4$  segundos, cualquier pequeño disturbio de escalón puede corregirse en aproximadamente 11 segundos. Esto completa nuestro problema de diseño.

## BIBLIOGRAFÍA

- 8-1 HEALEY, M., *Principles of Automatic Control*, Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Company, Inc., 1967.
- 8-2 HIGDON, D. T., AND R. H. CANNON, JR., "On the Control of Unstable Multiple-Output Mechanical Systems," *ASME Paper No. 63-WA-148*, 1963.

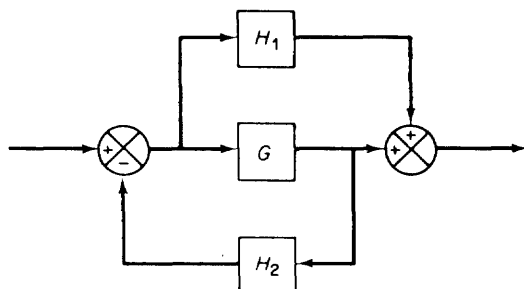


**Fig. 8-53.** Curva de respuesta escalón del sistema de control del péndulo invertido.

- 8-3 LAJOY, M. H., *Industrial Automatic Controls*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1954.
- 8-4 MERRITT, H. E., *Hydraulic Control Systems*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- 8-5 OGATA, K., *Modern Control Engineering*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.

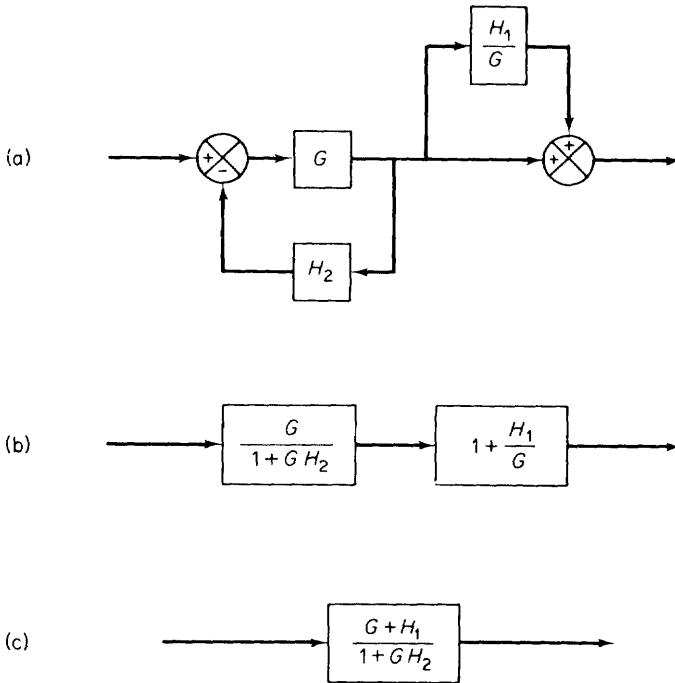
## EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

**PROBLEMA A-8-1.** Simplifíquese el diagrama de bloques mostrado en la Fig. 8-54.



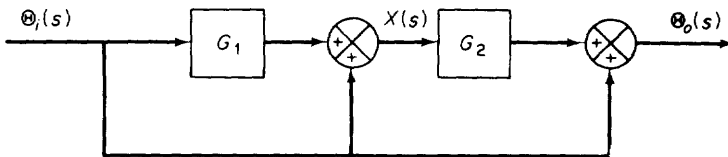
**Fig. 8-54.** Diagrama de bloques de un sistema.

**Solución.** Primero muévase el punto de bifurcación de la trayectoria que incluye a  $H_1$  por fuera de la trayectoria que incluye a  $H_2$  como se muestra en la Fig. 8-55(a). Luego elimínense las dos trayectorias y resulta la Fig. 8-55(b). La combinación de dos bloques en uno da la Fig. 8-55(c).



**Fig. 8-55.** Diagrama de bloques simplificado del sistema mostrado en la Fig. 8-54.

**PROBLEMA A-8-2.** Del diagrama de bloques mostrado en la Fig. 8-56, obtenga la función de transferencia que relaciona  $\Theta_o(s)$  y  $\Theta_i(s)$ .



**Fig. 8-56.** Diagrama de bloques de un sistema.

**Solución.** La señal  $X(s)$  es la suma de las dos señales  $G_1\Theta_i(s)$  y  $\Theta_i(s)$ . Por lo tanto,

$$X(s) = G_1\Theta_i(s) + \Theta_i(s)$$

La señal de salida  $\Theta_o(s)$  es la suma de  $G_2X(s)$  y  $\Theta_i(s)$ . De donde

$$\Theta_o(s) = G_2X(s) + \Theta_i(s) = G_2[G_1\Theta_i(s) + \Theta_i(s)] + \Theta_i(s)$$

Y, por lo tanto, tenemos

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

**PROBLEMA A-8-3.** En el sistema de presión neumática de la Fig. 8-57(a), supóngase que, para  $t < 0$ , el sistema está en estado estable y que la presión del sistema entero es  $\bar{P}$ . También, supóngase que los dos fuelles son idénticos. En  $t = 0$  la presión de entrada cambia de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_1$ . Entonces la presión en los fuelles cambiará de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_1$  y de  $\bar{P}$  a  $\bar{P} + p_2$ , respectivamente. La capacidad (volumen) de cada fuelle es de  $5 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , y la diferencia de presión de operación  $\Delta p$  (diferencia entre  $p_1$  y  $p_2$  o diferencia de  $p_1$  y  $p_2$ ) está entre  $-0.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  y  $0.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ . Las correspondientes razones de flujo de masa (kg/s) a través de las válvulas se muestran en la Fig. 8-57(b). Supóngase que los fuelles se expanden o contraen linealmente con la presión de aire que se les aplica, que la constante del resorte equivalente del sistema de fuelles es  $k = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ , y que cada fuelle tiene un área  $A = 15 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Definiendo como  $x$  el desplazamiento del punto medio de la barra que conecta los dos fuelles, encuéntrase la función de transferencia  $X(s)/P_i(s)$ . Supóngase que el proceso de expansión es isotérmico y que la temperatura del sistema entero permanece a  $30^\circ\text{C}$ .

**Solución.** En relación con la sección 8-3, la función de transferencia  $P_1(s)/P_i(s)$  puede obtenerse como

$$\frac{P_1(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{R_1Cs + 1} \quad (8-45)$$

En forma similar, la función de transferencia  $P_2(s)/P_i(s)$  es

$$\frac{P_2(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{R_2Cs + 1} \quad (8-46)$$

La fuerza que actúa sobre el fuelle 1 en la dirección  $x$  es  $A(\bar{P} + p_1)$  y la fuerza que actúa sobre el fuelle 2 en la dirección  $x$  negativa es  $A(\bar{P} + p_2)$ . La fuerza resultante se equilibra con  $kx$ , la fuerza del resorte equivalente de los lados corrugados de los fuelles.

$$A(p_1 - p_2) = kx$$

o bien

$$A[P_1(s) - P_2(s)] = kX(s) \quad (8-47)$$

En relación con las Ecs. (8-45) y (8-46), vemos que

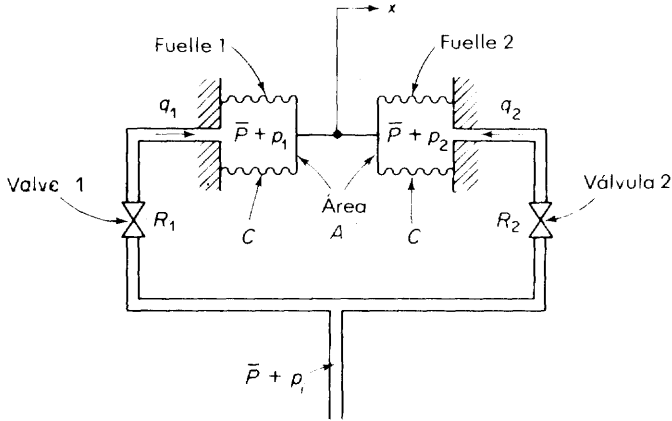
$$\begin{aligned} P_1(s) - P_2(s) &= \left( \frac{1}{R_1Cs + 1} - \frac{1}{R_2Cs + 1} \right) P_i(s) \\ &= \frac{R_2Cs - R_1Cs}{(R_1Cs + 1)(R_2Cs + 1)} P_i(s) \end{aligned}$$

Al sustituir esta última ecuación en la Ec. (8-47) y reescribirla, la función de transferencia  $X(s)/P(s)$  se obtiene como

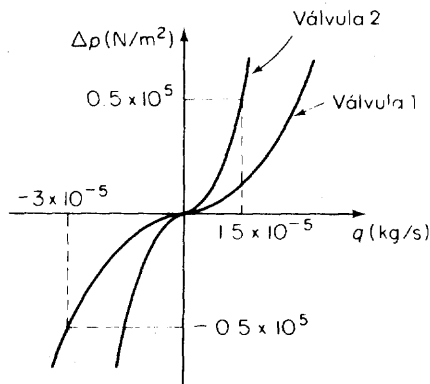
$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{A}{k} \frac{(R_2C - R_1C)s}{(R_1Cs + 1)(R_2Cs + 1)} \quad (8-48)$$

Los valores numéricos de las resistencias promedio  $R_1$  y  $R_2$  son

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{d\Delta p}{dq_1} = \frac{0.5 \times 10^5}{3 \times 10^{-5}} = 0.167 \times 10^{10} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}} \\ R_2 &= \frac{d\Delta p}{dq_2} = \frac{0.5 \times 10^5}{1.5 \times 10^{-5}} = 0.333 \times 10^{10} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}} \end{aligned}$$



(a)



(b)

**Fig. 8-57.** (a) Sistema de presión neumática; (b) curvas de diferencia de presión contra razón de flujo de masa.

El valor numérico de la capacitancia  $C$  de cada fuelle es

$$C = \frac{V}{nR_{\text{aire}}T} = \frac{5 \times 10^{-4}}{1 \times 287 \times (273 + 30)} = 5.75 \times 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2}$$

En consecuencia,

$$R_1 C = 0.167 \times 10^{10} \times 5.75 \times 10^{-9} = 9.60 \text{ s}$$

$$R_2 C = 0.333 \times 10^{10} \times 5.75 \times 10^{-9} = 19.2 \text{ s}$$

Al sustituir los valores numéricos de  $A$ ,  $k$ ,  $R_1C$ , y  $R_2C$  en la Ec. (8-48), tenemos

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{1.44 \times 10^{-7}s}{(9.6s + 1)(19.2s + 1)}$$

**PROBLEMA A-8-4.** La figura 8-58 es un diagrama esquemático de una válvula de diafragma neumática. En estado estable la presión de control de un controlador es  $\bar{P}_c$ , la presión en la válvula es también  $\bar{P}_c$  y el desplazamiento del vástago de la válvula es  $\bar{X}$ . Supóngase que en  $t = 0$  la presión de control cambia de  $\bar{P}_c$  a  $\bar{P}_c + p_c$ . Enton-

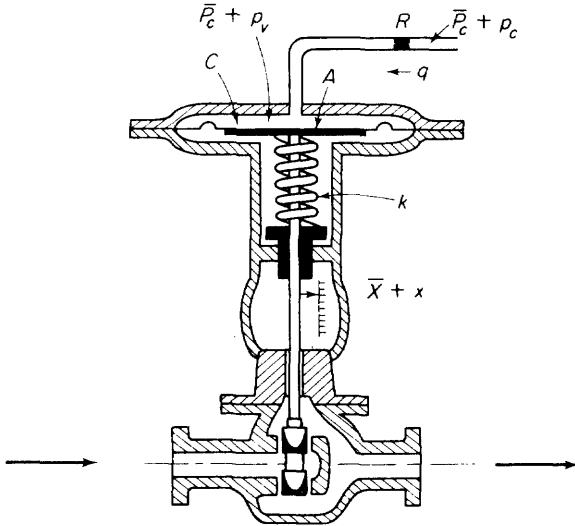


Fig. 8-58. Válvula de diafragma neumática.

ces la presión de la válvula cambiará de  $\bar{P}_c$  a  $\bar{P}_c + p_v$ . El cambio  $p_v$  en la presión de la válvula causará que el desplazamiento del vástago cambie de  $\bar{X}$  a  $\bar{X} + x$ . Encuéntrese la función de transferencia entre el cambio en el desplazamiento del vástago de la válvula  $x$  y el cambio en la presión de control  $p_c$ .

**Solución.** Definamos la razón de flujo de aire a la válvula de diafragma a través de la resistencia  $R$  como  $q$ . Entonces,

$$q = \frac{p_c - p_v}{R}$$

Para la cámara de aire en la válvula de diafragma, tenemos

$$C dp_v = q dt$$

En consecuencia,

$$C \frac{dp_v}{dt} = q = \frac{p_c - p_v}{R}$$

de la cual

$$RC \frac{dp_v}{dt} + p_v = p_c$$

Observando que

$$Ap_v = kx$$

tenemos

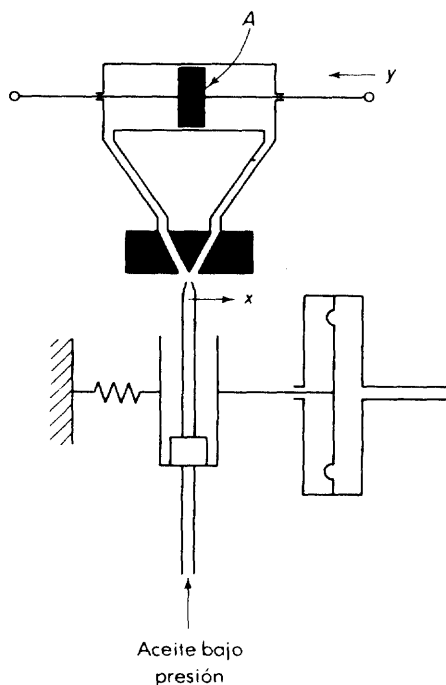
$$\frac{k}{A} \left( RC \frac{dx}{dt} + x \right) = p_c$$

La función de transferencia entre  $x$  y  $p_c$  es

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A/k}{RCs + 1}$$

**PROBLEMA A-8-5.** Supóngase que, en el controlador hidráulico de tubo de inyección mostrado en la Fig. 8-59, el pistón de potencia está conectado a una carga ligera de modo que la fuerza de inercia del elemento de carga es despreciable comparada con la fuerza hidráulica desarrollada por el pistón de potencia. ¿Qué tipo de acción de control produce este controlador?

**Solución.** Definase el desplazamiento de la tobera de inyección desde su posición neutral como  $x$  y el desplazamiento del pistón de potencia como  $y$ . Si la tobera de inyección se mueve a la derecha un pequeño desplazamiento  $x$ , el aceite fluye al lado derecho del pistón de potencia y el aceite del lado izquierdo del pistón de potencia se regresa por el drenaje. El aceite que fluye al cilindro de potencia está a alta presión; el aceite que fluye del cilindro de potencia al drenaje está a baja presión. La diferencia de presión resultante causa que el pistón se mueva hacia la izquierda.



**Fig. 8-59.** Controlador hidráulico de tubo de inyección.



Para un pequeño desplazamiento  $x$  de la tobera de inyección, la razón de flujo  $q$  del cilindro de potencia es proporcional a  $x$ , es decir,

$$q = K_1 x$$

Para el cilindro de potencia,

$$A \rho \, dy = q \, dt$$

donde  $A$  es el área del pistón de potencia y  $\rho$  es la densidad del aceite. De aquí,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{A \rho} = \frac{K_1}{A \rho} x = K x$$

donde  $K = K_1/(A \rho) = \text{constante}$ . Así, la función de transferencia  $Y(s)/X(s)$  es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

El controlador produce la acción de control integral.

**PROBLEMA A-8-6.** En la Fig. 8-60 tenemos un diagrama esquemático de un controlador hidráulico. Dibújese un diagrama de bloques del controlador y determínese la función de transferencia  $Y(s)/E(s)$ .

**Solución.** Considérese primero el amortiguador  $b$  y el resorte  $k$ . La ecuación de esta parte del controlador es

$$b(\dot{y} - \dot{z}) = k z$$

o bien

$$b \dot{y} = b \dot{z} + k z$$

Por lo tanto, la función de transferencia  $Z(s)/Y(s)$  se hace

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{bs}{bs + k}$$

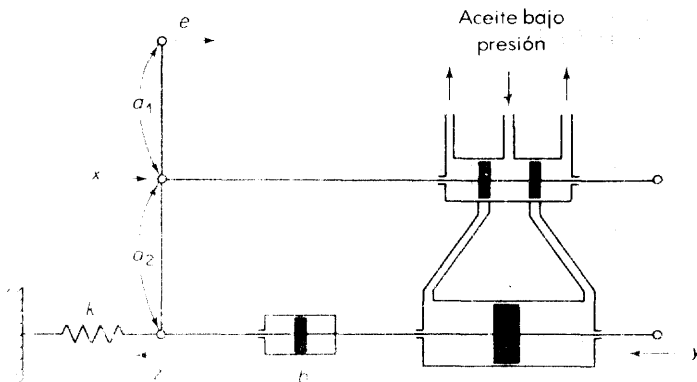


Fig. 8-60. Controlador hidráulico.

Esta función de transferencia está en la malla de realimentación del controlador. El diagrama de bloques del controlador se muestra en la Fig. 8-61. La función de transferencia  $Y(s)/E(s)$  puede obtenerse del diagrama de bloques como

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{K}{s}}{1 + \frac{Ka_1}{a_1 + a_2} \frac{b}{bs + k}}$$

En semejante controlador la ganancia  $|Ka_1b/[(a_1 + a_2)(bs + k)]|$  es usualmente muy grande comparada con la unidad, de modo que la función de transferencia  $Y(s)/E(s)$  puede simplificarse a

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a_2}{a_1} \left(1 + \frac{k}{bs}\right) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

donde  $K_p = a_2/a_1$  y  $T_i = b/k$ . Así, el controlador mostrado en la Fig. 8-60 es un controlador proporcional integral.

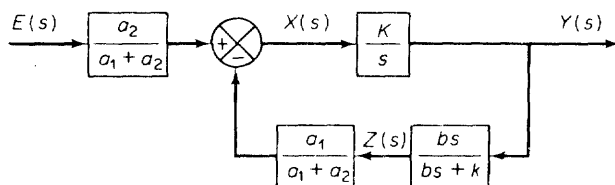


Fig. 8-61. Diagrama de bloques del controlador hidráulico mostrado en la Fig. 8-60.

**PROBLEMA A-8-7.** Trácese un diagrama de bloques para el controlador hidráulico mostrado en la Fig. 8-62. ¿Qué tipo de acción de control produce este controlador?

**Solución.** Supóngase que, para  $t < 0$ , las presiones en los fuelles 1 y 2 es la misma y es igual a  $P$ . En  $t = 0$  se da la entrada  $e$  en la dirección positiva mostrada en el diagrama. Entonces la válvula piloto 1 se mueve  $x$  a la derecha. El desplazamiento  $x$  causará en los fuelles 1 y 2 los cambios en las presiones de  $P$  a  $P + p_0$  y  $P + p_1$ , respectivamente. Supóngase que el cambio de presión  $p_1$  es proporcional al desplazamiento  $x$  de la válvula piloto. Supóngase también que los desplazamientos  $u$  y  $w$  de los fuelles 1 y 2 son proporcionales a los cambios de presión  $p_0$  y  $p_1$ , respectivamente, y que todos los cambios en las variables son relativamente pequeños.

Para el fuelle 1, tenemos

$$A_1 p_0 = -k_1 u$$

donde  $A_1$  es el área de los fuelles y  $k_1$  es la constante del resorte de los fuelles. Entonces,

$$\frac{U(s)}{P_0(s)} = -\frac{A_1}{k_1}$$

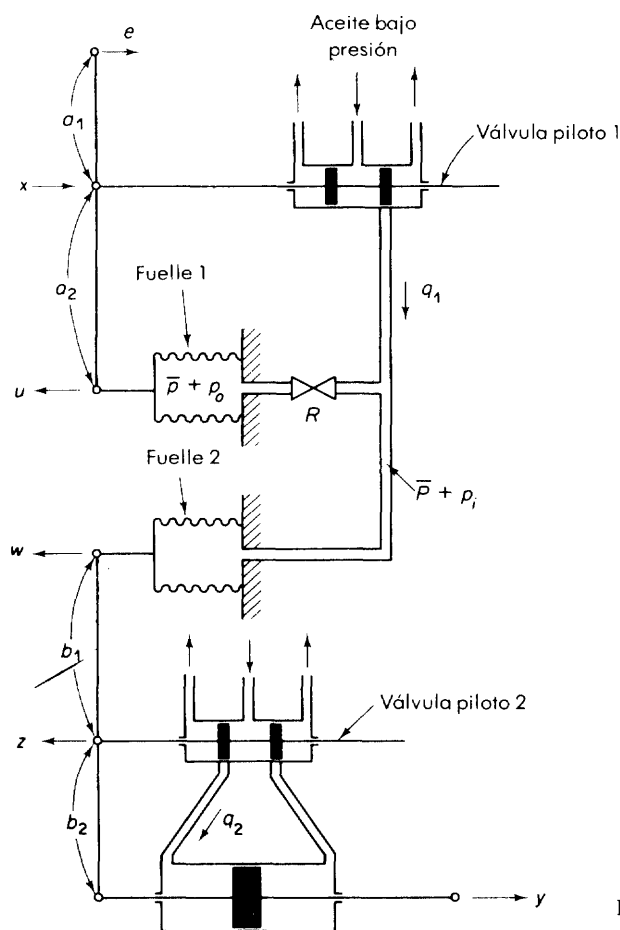


Fig. 8-62. Controlador hidráulico.

Las presiones  $p_o$  y  $p_i$  están relacionadas por

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

donde  $R$  es la resistencia de la válvula y  $C$  es la capacitancia del fuelle 1. Para el fuelle 2,

$$A_2 p_i = k_2 w$$

donde  $A_2$  es el área de los fuelles y  $k_2$  es la constante del resorte de los fuelles. De ahí

$$\frac{W(s)}{P_i(s)} = \frac{A_2}{k_2}$$

Entonces el diagrama de bloques del controlador puede dibujarse como se muestra en la Fig. 8-63(a).

Nótese que los diagramas de bloques de los amplificadores de la primera y segunda etapas pueden simplificarse, suponiendo  $|K_1 a_1 A_1 / [(a_1 + a_2) k_1 (RCs + 1)]| \gg 1$  y  $|K_2 b_1 / [s(b_1 + b_2)]| \gg 1$ , como se muestra en la Fig. 8-63(b). Este diagrama puede simplificarse posteriormente como se muestra en la Fig. 8-63(c). Así, la función de transferencia entre  $Y(s)$  y  $E(s)$  es

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a_2 b_2 k_1 A_2}{a_1 b_1 A_1 k_2} (RCs + 1) = K_p (1 + T_d s)$$

donde

$$K_p = \frac{a_2 b_2 k_1 A_2}{a_1 b_1 A_1 k_2}, \quad T_d = RC$$

Por lo tanto, el controlador mostrado en la Fig. 8-62 es un controlador proporcional derivativo.

**PROBLEMA A-8-8.** En el sistema de la Fig. 8-64,  $x(t)$  es el desplazamiento de salida y  $\theta(t)$  es el desplazamiento angular de salida. Supóngase que las masas involucradas son despreciables por su pequeñez y que todos los movimientos tienen la restricción de ser pequeños; por lo tanto, el sistema puede considerarse lineal. Las condiciones iniciales para  $x$  y  $\theta$  son ceros, es decir,  $x(0^-) = 0$  y  $\theta(0^-) = 0$ . Muéstrase que este sistema es un elemento diferenciador. Después obténgase la respuesta  $\theta(t)$  cuando  $x(t)$  es una entrada escalón unitario.

**Solución.** La ecuación del sistema es

$$b(\dot{x} - l\dot{\theta}) = kl\theta$$

o bien

$$l\dot{\theta} + \frac{k}{b}l\theta = \dot{x}$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación, usando condiciones iniciales cero, da

$$\left(ls + \frac{k}{b}l\right)\Theta(s) = sX(s)$$

Y así

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{1}{l} \frac{s}{s + (k/b)}$$

Así el sistema es un sistema diferenciador.

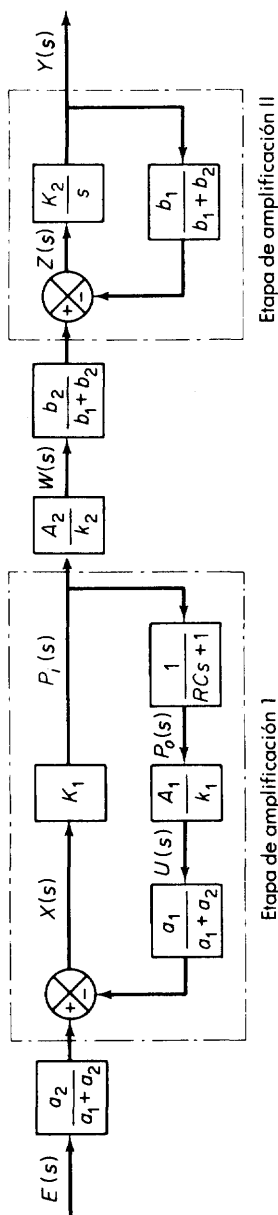
Para la entrada escalón unitario  $X(s) = 1/s$ , la salida  $\Theta(s)$  se hace

$$\Theta(s) = \frac{1}{l} \frac{1}{s + (k/b)}$$

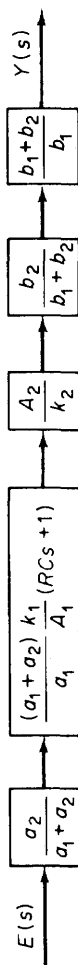
La transformada inversa de Laplace de  $\Theta(s)$  da

$$\theta(t) = \frac{1}{l} e^{-(k/b)t}$$

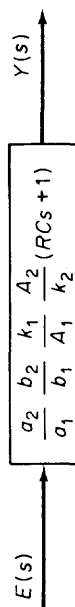
Nótese que si el valor de  $k/b$  es grande, la respuesta  $\theta(t)$  tiende a una señal de pulso como se muestra en la Fig. 8-65.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8-63. (a) Diagrama de bloques del controlador hidráulico mostrado en la Fig. 8-62; (b), (c) diagramas de bloques simplificados.

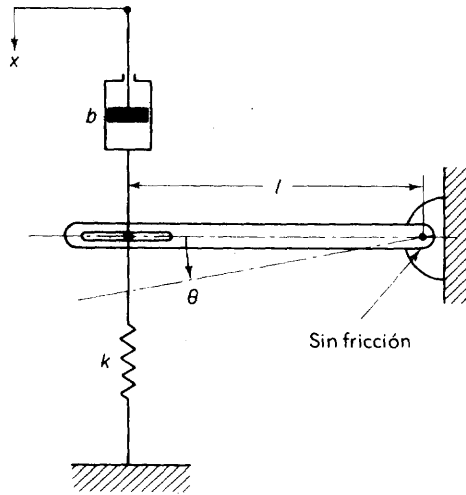


Fig. 8-64. Sistema mecánico.

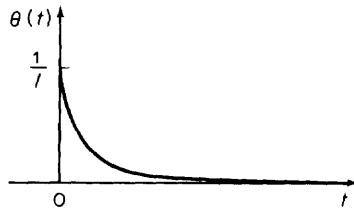
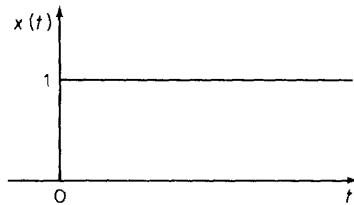
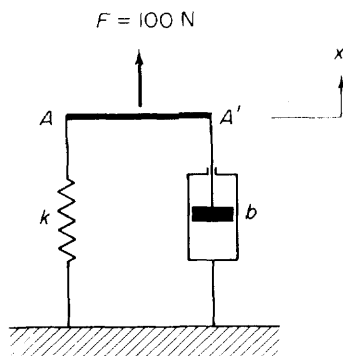


Fig. 8-65. Entrada escalón unitario y la respuesta del sistema mecánico mostrado en la Fig. 8-64.

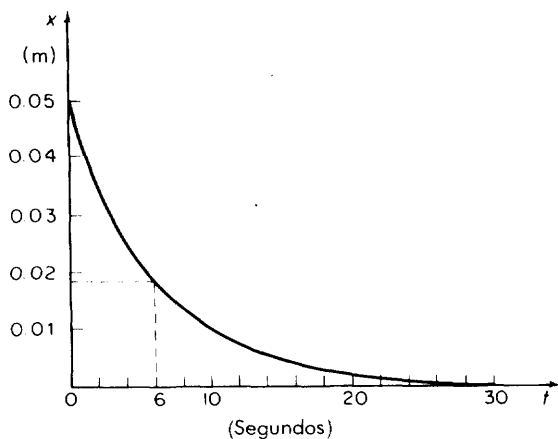
**PROBLEMA A-8-9.** Considérese el sistema mostrado en la Fig. 8-66(a). La barra sin masa  $AA'$  se desplaza 0.05 m mediante una fuerza constante de 100 N. Supóngase que el sistema está en reposo antes de que la fuerza sea abruptamente liberada. La curva de respuesta en el tiempo, cuando la fuerza es abruptamente liberada en  $t = 0$ , se muestra en la Fig. 8-66(b). Determínese los valores numéricos de  $b$  y  $k$ .

**Solución.** Puesto que el sistema está en reposo antes que la fuerza sea abruptamente liberada, la ecuación de movimiento es

$$kx = F \quad (t \leq 0)$$



(a)



(b)

Fig. 8-66. (a) Sistema mecánico; (b) curva de respuesta.

Nótese que el efecto de la fuerza  $F$  consiste en dar la condición inicial  $x(0)$  o

$$x(0) = \frac{F}{k}$$

Puesto que  $x(0) = 0.05$  m, tenemos

$$k = \frac{F}{x(0)} = \frac{100}{0.05} = 2000 \text{ N/m}$$

En  $t = 0$  la fuerza  $F$  es abruptamente liberada, y por tanto, para  $t > 0$ , la ecuación de movimiento se hace

$$b\dot{x} + kx = 0 \quad (t > 0)$$

La solución de esta última ecuación es

$$x(t) = x(0)e^{-(k/b)t} = 0.05e^{-(2000/b)t}$$

Puesto que la solución es una función exponencial, en  $t = \text{constante de tiempo} = b/2000$  la respuesta  $x$  se hace

$$x\left(\frac{b}{2000}\right) = 0.05 \times 0.368 = 0.0184 \text{ m}$$

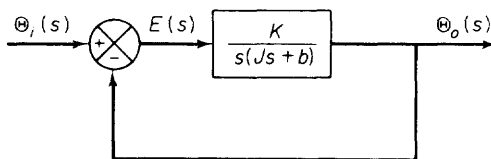
De la Fig. 8-66(b),  $x = 0.0184 \text{ m}$  ocurre en  $t = 6 \text{ s}$ . De ahí

$$\frac{b}{2000} = 6$$

de la cual

$$b = 12\,000 \text{ N-s/m}$$

**PROBLEMA A-8-10.** En el sistema mostrado en la Fig. 8-67, explíquense los efectos que la variación de los valores de  $K$  y  $b$  tienen sobre el error estado estable en una respuesta rampa unitaria. Esbócese curvas de respuesta rampa unitaria típicas para un valor pequeño, un valor mediano y un valor grande de  $K$ .



**Fig. 8-67.** Sistema de malla cerrada.

**Solución.** La función de transferencia de malla cerrada es

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K}{Js^2 + bs + K}$$

Por lo tanto,

$$\frac{E(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{\Theta_i(s) - \Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{Js^2 + bs}{Js^2 + bs + K}$$

Para una entrada rampa unitaria,  $\Theta_i(s) = 1/s^2$ . Así,

$$E(s) = \frac{Js^2 + bs}{Js^2 + bs + K} \frac{1}{s^2}$$

El error en estado estable es

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{b}{K}$$

Vemos que podemos reducir el error en estado estable  $e_{ss}$  incrementando la ganancia  $K$  o disminuyendo el coeficiente de fricción viscosa  $b$ . Sin embargo, incrementar la ganancia o disminuir el coeficiente de fricción viscosa causa que el factor de amortiguamiento relativo disminuya con el resultado de que la respuesta transitoria del sistema se haga más oscilatoria. Duplicando  $K$  disminuye  $e_{ss}$  a la mitad de su valor original, en tanto que  $\zeta$  decrece a 0.707 de su valor original, ya que  $\zeta$  es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de  $K$ . Por otra parte, disminuyendo  $b$  a la mitad de su valor



original decrecen tanto  $e_{ss}$  como  $\zeta$  a la mitad de sus valores originales. Por lo tanto, es aconsejable incrementar el valor de  $K$  en vez de disminuir el valor de  $b$ .

Después que la respuesta transitoria se ha desvanecido y se ha alcanzado el estado estable, la velocidad de salida se hace igual a la velocidad de entrada. Pero hay un error de posición en estado estable entre la entrada y la salida. En la Fig. 8-68 se ilustran ejemplos de la respuesta rampa unitaria del sistema para tres valores diferentes de  $K$ .

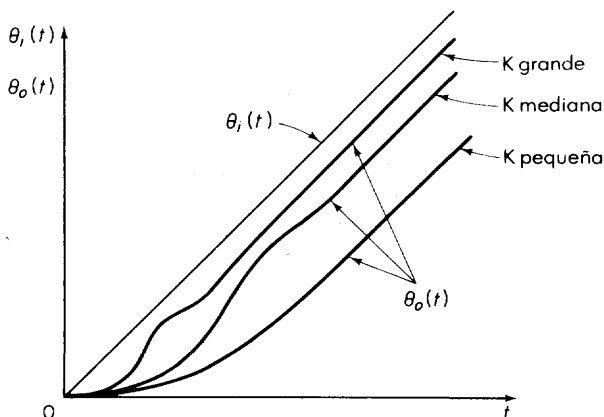


Fig. 8-68. Curvas de respuesta rampa unitaria del sistema mostrado en la Fig. 8-67.

**PROBLEMA A-8-11.** ¿Cuál es la respuesta escalón unitario del sistema mostrado en la Fig. 8-69?

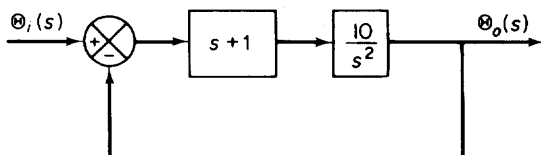


Fig. 8-69. Sistema de malla cerrada.

**Solución.** La función de transferencia de malla cerrada es

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{10s + 10}{s^2 + 10s + 10}$$

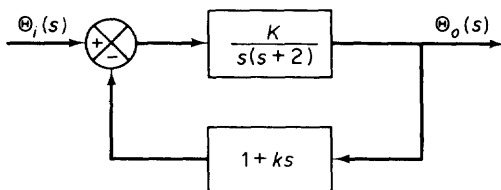
Así que para la entrada escalón unitario  $[\Theta_i(s) = 1/s]$ , tenemos

$$\begin{aligned} \Theta_o(s) &= \frac{10s + 10}{s^2 + 10s + 10} \frac{1}{s} \\ &= \frac{10s + 10}{(s + 5 + \sqrt{15})(s + 5 - \sqrt{15})s} \\ &= \frac{-4 - \sqrt{15}}{-4 - \sqrt{15}} \frac{1}{s} + \frac{-4 + \sqrt{15}}{-4 + \sqrt{15}} \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de  $\Theta_o(s)$  da

$$\begin{aligned}\theta_o(t) &= -\frac{4 + \sqrt{15}}{3 + \sqrt{15}} e^{-(5+\sqrt{15})t} + \frac{4 - \sqrt{15}}{-3 + \sqrt{15}} e^{-(5-\sqrt{15})t} + 1 \\ &= -1.15e^{-8.87t} + 0.145e^{-1.13t} + 1\end{aligned}$$

**PROBLEMA A-8-12.** En relación al sistema de la Fig. 8-70, determinense los valores de  $K$  y  $k$  tales que el sistema tenga un factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  de 0.7 y una frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  de 4 rad/s.



**Fig. 8-70.** Sistema de malla cerrada.

**Solución.** La función de transferencia de malla cerrada es

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K}{s^2 + (2 + Kk)s + K}$$

Observando que

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad 2\zeta\omega_n = 2 + Kk$$

obtenemos

$$K = \omega_n^2 = 4^2 = 16$$

y

$$2 + Kk = 2\zeta\omega_n = 2 \times 0.7 \times 4 = 5.6$$

Así,

$$Kk = 3.6$$

o bien

$$k = \frac{3.6}{16} = 0.225$$

**PROBLEMA A-8-13.** Determinense los valores de  $K$  y  $k$  del sistema de malla cerrada mostrado en la Fig. 8-71 de modo que el sobrepaso máximo en la respuesta escalón unitario sea de 25% y el tiempo pico sea de 2. Supóngase que  $J = 1 \text{ kg-m}^2$ .

**Solución.** La función de transferencia de malla cerrada es

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K}{Js^2 + Kks + K}$$

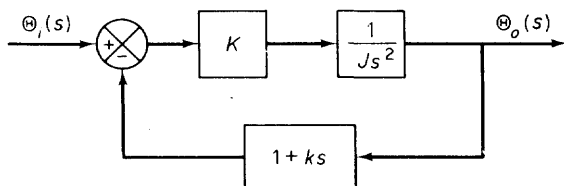


Fig. 8-71. Sistema de malla cerrada.

Al sustituir  $J = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  en esta última ecuación, tenemos

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K}$$

Nótese que

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad 2\zeta\omega_n = Kk$$

El sobrepaso máximo  $M_p$  es

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

la cual está especificada como 25%. De ahí

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25$$

de la cual

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.386$$

o bien

$$\zeta = 0.404$$

El tiempo pico  $t_p$  está especificado como 2 s. Y así

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2$$

o bien

$$\omega_d = 1.57$$

Entonces, la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es

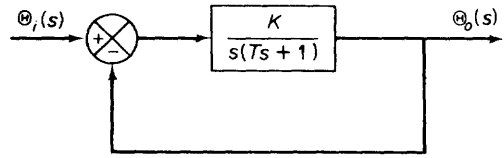
$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1.57}{\sqrt{1-0.404^2}} = 1.72$$

Por lo tanto, obtenemos

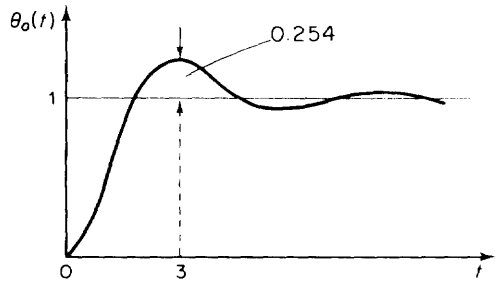
$$K = \omega_n^2 = 1.72^2 = 2.95 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = \frac{2 \times 0.404 \times 1.72}{2.95} = 0.471 \text{ s}$$

**PROBLEMA A-8-14.** Cuando el sistema mostrado en la Fig. 8-72(a) está sometido a una entrada escalón unitario, la salida del sistema responde como se muestra en la Fig. 8-72(b). Determinense los valores de  $K$  y  $T$  de la curva de respuesta.



(a)



(b)

**Fig. 8-72.** (a) Sistema de malla cerrada; (b) curva de respuesta escalón unitario.

**Solución.** El sobrepaso máximo de 25.4% corresponde a  $\zeta = 0.4$ . De la curva de respuesta tenemos

$$t_p = 3$$

En consecuencia,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - 0.4^2}} = 3$$

Se sigue que

$$\omega_n = 1.14$$

Del diagrama de bloques tenemos

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

de la cual

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$$

Por lo tanto, los valores de  $T$  y  $K$  se determinaron como

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0.4 \times 1.14} = 1.09$$

$$K = \omega_n^2 T = 1.14^2 \times 1.09 = 1.42$$

**PROBLEMA A-8-15.** La figura 8-73 muestra un gobernador controlado por resorte que consta de dos bolas, una manga con resorte de carga y eslabones de conexión. Supóngase que los brazos están verticales cuando la flecha está girando a una velocidad de referencia  $\bar{\Omega}$ , la masa de cada bola es  $m$ , la masa de la manga es  $M$ , la masa de las otras partes es despreciable, la constante del resorte es  $k$  y el coeficiente de fricción viscosa de la manga es  $b$ .

Encuéntrese la función de transferencia que relaciona a  $x$ , un pequeño cambio en el desplazamiento vertical de la manga y  $\omega$ , un pequeño cambio en la velocidad angular. Además, encuéntrese la condición de la constante del resorte  $k$  para la operación estable del gobernador. (Consúltase la Fig. 8-86 para ver un diagrama esquemático de un sistema de control de velocidad.)

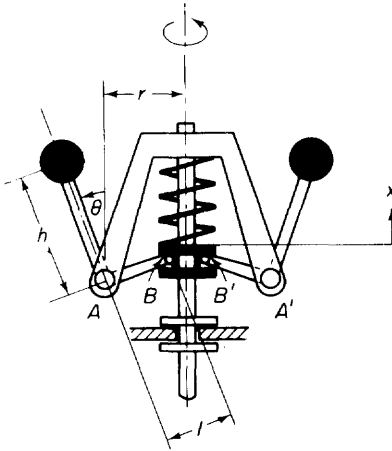


Fig. 8-73. Gobernador controlado por resorte.

**Solución.** Supóngase que cuando la flecha está girando a una velocidad de referencia  $\bar{\Omega}$ , el resorte ejerce hacia abajo una fuerza  $\frac{1}{2}F$  en el punto  $B$  y una fuerza similar  $\frac{1}{2}F$  en el punto  $B'$ , donde  $F = kx_0$  y  $x_0$  es el desplazamiento de la manga desde una posición de referencia. (Supóngase que el efecto de la fuerza gravitacional  $mg$  se toma en cuenta al escoger la posición de referencia para el desplazamiento de la manga.)

En la operación en estado estable a  $\bar{\Omega}$  los pares que actúan alrededor del punto  $A$  consisten en

$$\text{Par debido a la fuerza del resorte} = \frac{1}{2}Fl$$

$$\text{Par debido a la fuerza centrífuga} = m\bar{\Omega}^2rh$$

Así que la ecuación de equilibrio de los pares es

$$\frac{1}{2}Fl - m\bar{\Omega}^2rh = 0$$

o bien

$$\frac{1}{2}F = \frac{m\bar{\Omega}^2rh}{l} \quad (8-49)$$

La ecuación (8-49) da la fuerza del resorte que actúa en el punto  $B$ . Una fuerza similar actúa en el punto  $B'$ .

Supóngase que en  $t = 0$  la velocidad de la flecha se incrementa de  $\bar{\Omega}$  a  $\bar{\Omega} + \omega$ . Este paso causará que la manga se mueva hacia arriba en un pequeño desplazamiento  $x$ . Por tanto, la fuerza del resorte que actúa hacia abajo en el punto  $B$  se hace  $\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}kx$  y la del punto  $B'$  también se hace  $\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}kx$ . La mitad de la fuerza de inercia de la manga y la mitad de la fuerza de fricción viscosa actúan en el punto  $B$  y las otras mitades actúan en el punto  $B'$ . Cuando la manga se mueva  $x$  hacia arriba, el radio en el cual giran las bolas cambia de  $r$  a  $r + h \sin \theta$ . Los pares que actúan alrededor del punto  $A$  (o alrededor del punto  $A'$ ) son

$$\text{Par debido a la fuerza del resorte} = (\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}kx)l \cos \theta$$

$$\text{Par debido a la fuerza de inercia de la manga} = \frac{1}{2}M\ddot{x}l \cos \theta$$

$$\text{Par debido a la fuerza de fricción viscosa en la manga} = \frac{1}{2}b\dot{x}l \cos \theta$$

$$\text{Par debido a la fuerza centrífuga} = m(\bar{\Omega} + \omega)^2(r + h \sin \theta)h \cos \theta$$

$$\text{Par debido a la fuerza de inercia de la bola} = mh \cos \theta \frac{d^2}{dt^2} (h \sin \theta)$$

Para un pequeño cambio en la velocidad angular, el ángulo  $\theta$  es también pequeño. Al sustituir  $\sin \theta \doteq \theta = x/l$ ,  $\cos \theta \doteq 1$ ,  $\theta^2 \doteq 0$ ,  $\omega^2 \doteq 0$  y  $x\omega \doteq 0$  en las expresiones del par precedentes, tenemos

$$\text{Par debido a la fuerza del resorte} = \frac{1}{2}(F + kx)l$$

$$\text{Par debido a la fuerza de inercia de la manga} = \frac{1}{2}M\ddot{x}l$$

$$\text{Par debido a la fuerza de fricción viscosa en la manga} = \frac{1}{2}b\dot{x}l$$

$$\text{Par debido a la fuerza centrífuga} = m(\bar{\Omega}^2 r + 2\bar{\Omega}\omega r + \bar{\Omega}^2 \frac{h}{l}x)h$$

$$\text{Par debido a la fuerza de inercia de la bola} = mh^2\ddot{\theta} = \frac{mh^2}{l}\ddot{x}$$

Por tanto, la ecuación de equilibrio de los pares se hace

$$\frac{mh^2}{l}\ddot{x} + \frac{1}{2}M\ddot{x}l + \frac{1}{2}b\dot{x}l + \frac{1}{2}(F + kx)l - m(\bar{\Omega}^2 r + 2\bar{\Omega}\omega r + \bar{\Omega}^2 \frac{h}{l}x)h = 0$$

Al sustituir la Ec. (8-49) en esta última ecuación y simplificar, encontramos

$$\frac{mh^2}{l}\ddot{x} + \frac{1}{2}Ml\ddot{x} + \frac{1}{2}bl\dot{x} + \frac{1}{2}klx - m\bar{\Omega}^2 \frac{h^2}{l}x = 2m\bar{\Omega}\omega rh$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{\frac{1}{2}bl^2}{mh^2 + \frac{1}{2}Ml^2}\dot{x} + \frac{\frac{1}{2}kl^2 - m\bar{\Omega}^2 h^2}{mh^2 + \frac{1}{2}Ml^2}x = \frac{2m\bar{\Omega}rh}{mh^2 + \frac{1}{2}Ml^2}\omega \quad (8-50)$$

Por definición,

$$\omega_n^2 = \frac{\frac{1}{2}kl^2 - m\bar{\Omega}^2 h^2}{mh^2 + \frac{1}{2}Ml^2}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{\frac{1}{2}bl^2}{mh^2 + \frac{1}{2}Ml^2}$$

$$K = \frac{2m\bar{\Omega}rh}{mh^2 + \frac{1}{2}Ml^2}$$

La Ec. (8-50) puede escribirse

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = K\omega$$

Por lo tanto, la función de transferencia entre  $X(s)$  y  $\Omega(s)$ , donde  $X(s) = \mathcal{L}[x]$  y  $\Omega(s) = \mathcal{L}[\omega]$ , se hace

$$\frac{X(s)}{\Omega(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Nótese que para la operación estable del gobernador,  $\omega_n^2 > 0$ , o

$$\frac{kl^2}{2mh^2} > \bar{\Omega}^2$$

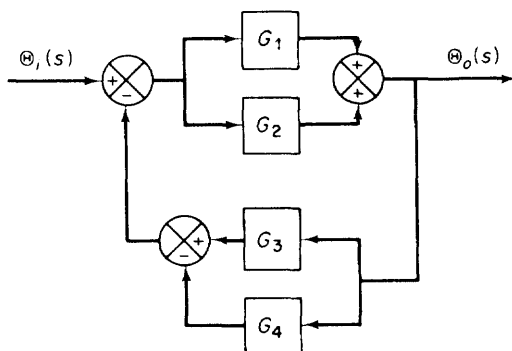
En consecuencia, la constante del resorte  $k$  debe satisfacer la desigualdad

$$k > \frac{2mh^2}{l^2} \bar{\Omega}^2$$

Si esta condición se satisface, una pequeña perturbación puede causar que la manga manifieste una oscilación amortiguada alrededor del punto de operación.

## PROBLEMAS

**PROBLEMA B-8-1.** Simplifique el diagrama de bloques mostrado en la Fig. 8-74 y obtenga la función de transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ .



**Fig. 8-74.** Diagrama de bloques de un sistema.

**PROBLEMA B-8-2.** Simplifique el diagrama de bloques mostrado en la Fig. 8-75 y obtenga la función de transferencia  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ .

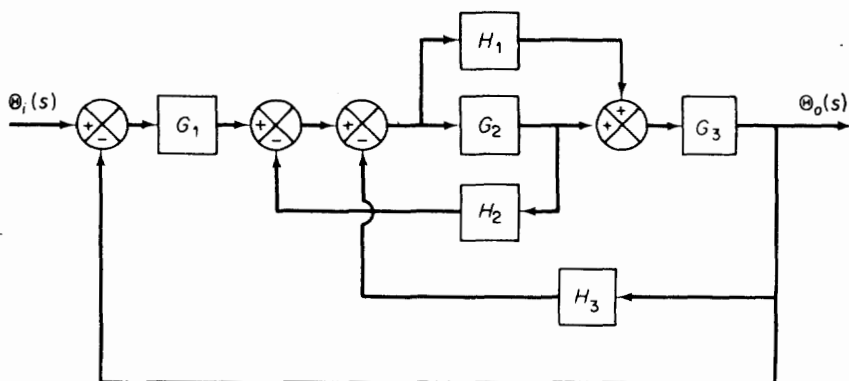


Fig. 8-75. Diagrama de bloques de un sistema.

**PROBLEMA B-8-3.** La Fig. 8-76 muestra un transductor electro-neumático. Muestre que el cambio en la presión de salida es proporcional al cambio en la corriente de entrada.

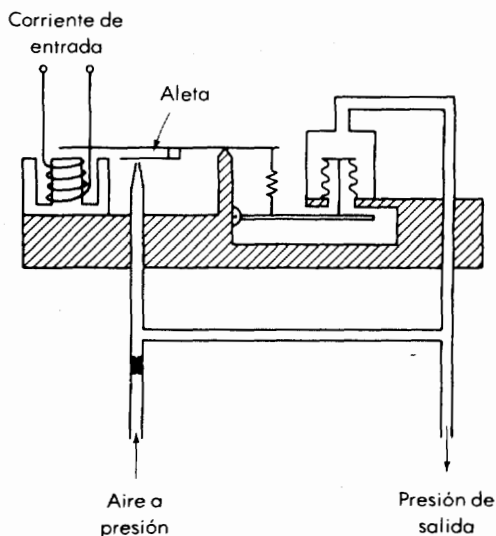


Fig. 8-76. Transductor electro-neumático.

**PROBLEMA B-8-4.** La figura 8-77 muestra un controlador neumático. ¿Qué tipo de acción de control produce este controlador?





**PROBLEMA B-8-6.** Considere unos controladores automáticos industriales cuyas acciones de control son proporcional, integral, proporcional integral, proporcional derivativo y proporcional integral derivativo. Las funciones de transferencia de estos controladores pueden darse, respectivamente, por

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

donde  $M(s)$  es la transformada de Laplace de  $m(t)$ , la salida del controlador y  $E(s)$  la transformada de Laplace de  $e(t)$ , la señal de error del actuador. Esboce las curvas  $m(t)$  contra  $t$  para cada uno de los cinco tipos de controladores cuando la señal de error del actuador es

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 1 | $e(t)$ = función de escalón unitario |
| 2 | $e(t)$ = función rampa unitaria      |

Al trazar las curvas, suponga que los valores numéricos de  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $T_i$  y  $T_d$  están dados como

$$K_p = \text{ganancia proporcional} = 4$$

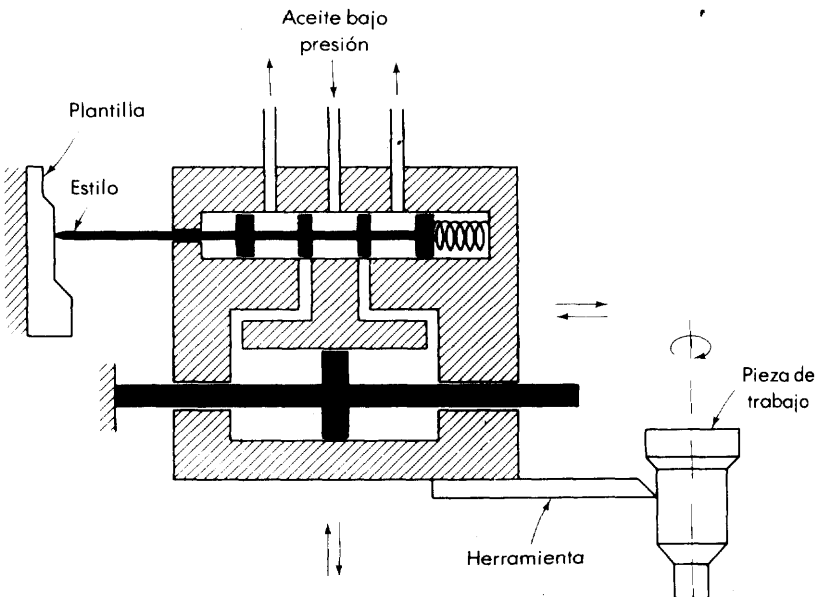
$$K_i = \text{ganancia integral} = 2$$

$$T_i = \text{tiempo integral} = 2 \text{ s}$$

$$T_d = \text{tiempo derivativo} = 0.8 \text{ s}$$

**PROBLEMA B-8-7.** Considérese el servo sistema hidráulico mostrado en la Fig. 8-79. Suponiendo que la señal  $e(t)$  es la entrada y el desplazamiento del pistón de potencia  $y(t)$  la salida, encuentre la función de transferencia  $Y(s)/E(s)$ .

**PROBLEMA B-8-8.** Muchas máquinas, tales como tornos, fresadoras y esmeriles, están provistos de trazadores para reproducir el contorno de plantillas. La figura 8-80 es un diagrama esquemático de un sistema de trazado hidráulico en el cual la herramienta duplica la forma de la plantilla sobre la pieza de trabajo. Explique la operación del sistema.



**Fig. 8-80.** Sistema de trazador hidráulico.

**PROBLEMA B-8-9.** Considérese un termómetro de mercurio de pared de vidrio. Si la capacitancia térmica del vidrio del termómetro es despreciable, entonces puede considerarse como un sistema de primer orden y su función de transferencia puede darse mediante

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_b(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

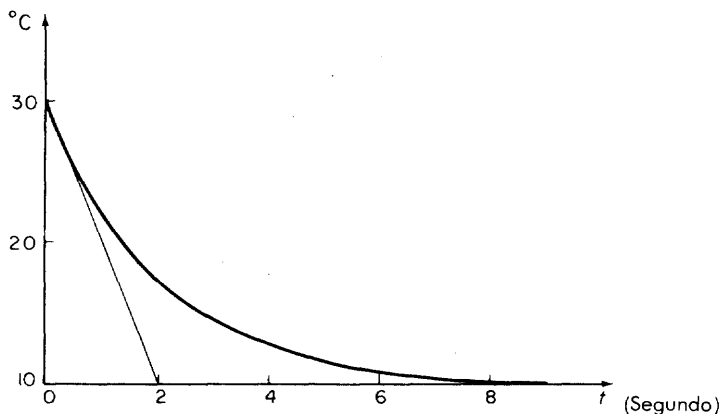
donde  $\Theta(s)$  es la transformada de Laplace de la temperatura del termómetro  $\theta$  y  $\Theta_b(s)$  es la transformada de Laplace de la temperatura del baño  $\theta_b$ , ambas temperaturas medidas a partir de la temperatura ambiente.

Suponga que el termómetro de mercurio de pared de vidrio se usa para medir la temperatura de un baño y que la capacitancia térmica del vidrio es despreciable. Suponga también que no se conoce la constante de tiempo del termómetro. Por lo tanto, ésta se determina experimentalmente sumergiendo al termómetro en una cubeta de agua mantenida a  $10^\circ\text{C}$ . La figura 8-81 muestra la respuesta de temperatura observada en la prueba. Encuentre la constante de tiempo. Si este termómetro se coloca en un baño, la temperatura del cual se incrementa linealmente a razón de  $10^\circ\text{C}/\text{min}$ , ¿cuánto error en estado estable mostrará el termómetro?

Si la capacitancia térmica del vidrio de un termómetro de mercurio no es despreciable, puede considerarse un sistema de segundo orden y la función de transferencia modificarse a

$$\frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son constantes de tiempo. Esboce una curva típica de respuesta de temperatura ( $\theta$  contra  $t$ ) cuando dicho termómetro con dos constantes de tiempo se coloque en un baño mantenido a la temperatura constante  $\theta_b$ , donde tanto la temperatura del termómetro  $\theta$  como la temperatura del baño  $\theta_b$  se miden a partir de la temperatura ambiente.



**Fig. 8-81.** Curva de respuesta de un sistema de termómetro.

**PROBLEMA B-8-10.** En relación con el sistema mostrado en la Fig. 8-82, encuentre la respuesta  $\theta_o(t)$  cuando la entrada  $\theta_i(t)$  es una rampa unitaria. También, encuentre el error en estado estable de una respuesta rampa. Suponga que el sistema está subamortiguado.

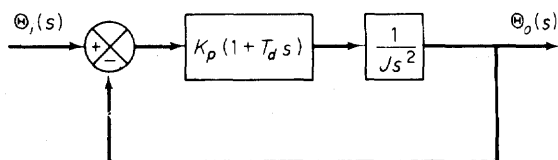


Fig. 8-82. Diagrama de bloques de un sistema.

**PROBLEMA B-8-11.** En la Fig. 8-83, un sistema masa-resorte-amortiguador está unido a una carreta. Para  $t < 0$ , la carreta permanece quieta y el sistema entero está en reposo. En  $t = 0$ , la carreta se mueve a velocidad constante,  $\dot{x}_i = r = \text{constante}$ . ¿Cuál es el movimiento  $x_o(t)$  relativo al suelo? Suponga que el sistema masa-resorte-amortiguador está subamortiguado.

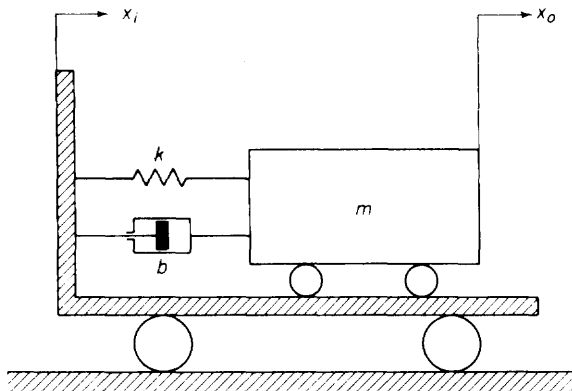


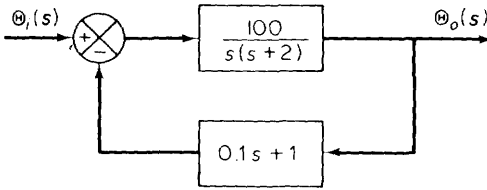
Fig. 8-83. Sistema mecánico.

**PROBLEMA B-8-12.** Considere un sistema definido por

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

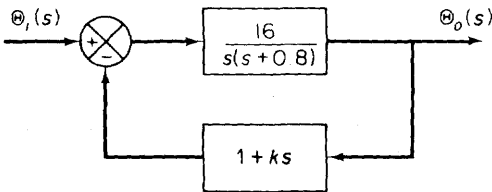
Determine los valores de  $\zeta$  y  $\omega_n$  de modo que el sistema responda a una entrada escalón con 5% aproximadamente de sobrepaso y con un tiempo de asentamiento de 2 segundos.

**PROBLEMA B-8-13.** La figura 8-84 muestra un sistema de control de posición con realimentación de velocidad. ¿Cuál es la respuesta  $\theta_o(t)$  a la entrada escalón unitario?



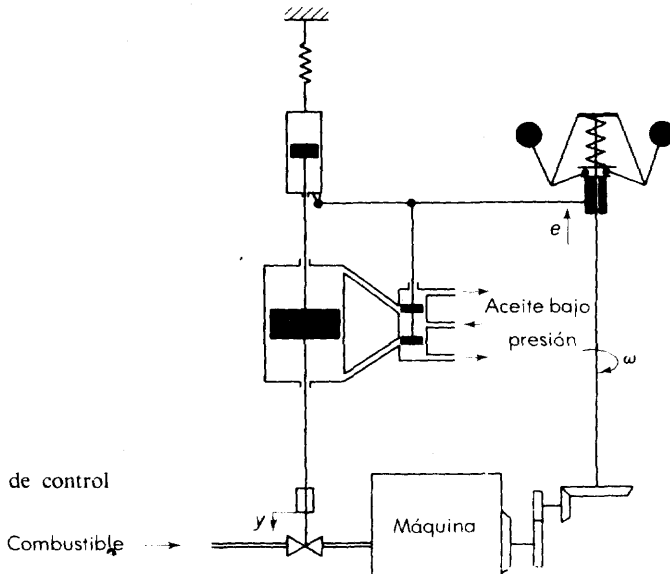
**Fig. 8-84.** Diagrama de bloques de un sistema de control de posición con realimentación de velocidad.

**PROBLEMA B-8-14.** Considere el sistema mostrado en la Fig. 8-85. Determine el valor de  $k$  tal que el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  sea de 0.5. Después obtenga el tiempo de subida  $t_r$ , el tiempo pico  $t_p$ , el sobrepaso máximo  $M_p$  y el tiempo de asentamiento  $t_s$  en la respuesta escalón unitario.



**Fig. 8-85.** Diagrama de bloques de un sistema.

**PROBLEMA B-8-15.** Explique la operación del sistema de control de velocidad mostrada en la Fig. 8-86.



**Fig. 8-86.** Sistema de control de velocidad.

## APÉNDICE

# A

## SISTEMAS DE UNIDADES

En las páginas siguientes se revisarán primero los sistemas de unidades acostumbrados (el sistema de unidades cgs, el sistema de unidades mks, etc.) y a continuación se presentará el Sistema Internacional de unidades (SI).

**Unidades.** Una cantidad física puede medirse solamente mediante la comparación con una cantidad semejante. Una porción bien diferenciada de una cantidad física se denomina *unidad*. (Para que sea de utilidad, la unidad debe ser de un tamaño práctico conveniente.) Cualquier cantidad física de la misma clase puede compararse con ella y su valor puede establecerse en términos de una relación numérica y de la unidad que se utilice.

**Unidades básicas y unidades derivadas.** La unidad general de una cantidad física se define como su dimensión. Puede desarrollarse un sistema de unidades escogiendo para cada dimensión básica del sistema, una unidad específica (por ejemplo, el metro para la longitud, el kilogramo para la masa y el segundo para el tiempo). A una unidad como esas se le denomina *unidad básica*. Todas aquellas unidades que no son básicas se denominan *unidades derivadas*.

**Unidades sistemáticas.** Las *unidades sistemáticas* son las unidades que se derivan sistemáticamente en un sistema de unidades. Pueden obtenerse reemplazando las unidades generales (dimensiones) por las unidades básicas del sistema.

Si se definen las dimensiones de longitud, masa y tiempo  $[L]$ ,  $[M]$  y  $[T]$ , respectivamente, entonces las cantidades físicas pueden expresarse como  $[L]^x[M]^y[T]^z$ . Por ejemplo, la dimensión de la aceleración es  $[L][T]^{-2}$  y la de la fuerza es  $[L][M][T]^{-2}$ . En el sistema mks de unidades, la unidad sistemática de la aceleración es, por lo tanto,  $1 \text{ m/s}^2$  y la fuerza es  $1 \text{ kg-m/s}^2$ .

**Sistemas absolutos de unidades y sistemas gravitacionales de unidades.**

Los sistemas de unidades en los cuales se toma a la masa como unidad básica se denominan *sistemas absolutos de unidades*, en tanto que aquellos en los que se toma a la fuerza y no a la masa como unidad básica, se denominan *sistemas gravitacionales de unidades*.

**El sistemas cgs de unidades.** El *sistemas cgs de unidades* es un sistema absoluto de unidades y se basa en el centímetro, el gramo masa y el segundo como unidades básicas. Este sistema se ha usado extensamente en la ciencia. Entre sus desventajas se incluye el hecho de que las unidades derivadas para la fuerza y la energía son demasiado pequeñas para propósitos prácticos y que el sistema no se combina con las unidades eléctricas prácticas para formar un sistema de unidades completo.

**El sistemas mks de unidades.** El *sistema mks de unidades* es un sistema absoluto de unidades y se basa en el metro, el kilogramo masa y el segundo como unidades básicas. En este sistema las unidades derivadas para la fuerza y la energía son de tamaño conveniente en el sentido de la ingeniería, y todas las unidades prácticas eléctricas encajan en el sistema como unidades naturales para formar un sistema de unidades completo.

**El sistema métrico de unidades de ingeniería.** El *sistema métrico de unidades de ingeniería* es un sistema gravitacional de unidades y se basa en el metro, el kilogramo fuerza y el segundo como unidades básicas. (Puesto que el estándar de fuerza se define como el peso de la masa estándar prototipo del kilogramo, la unidad básica de fuerza es variable, pero este factor no representa una desventaja seria.)

**El sistema inglés de unidades de ingeniería.** El *sistema inglés de unidades de ingeniería* es un sistema gravitacional de unidades y se basa en el pie, la libra fuerza y el segundo como unidades básicas. Este es el único sistema que se ha usado durante largo tiempo en Estados Unidos. La unidad derivada para la masa es la  $\text{lb}_f\text{-s}^2/\text{ft}$  se denomina slug ( $1 \text{ slug} = \text{lb}_f\text{-s}^2/\text{ft}$ ).

**El Sistema Internacional de unidades (SI).** El *Sistema Internacional de unidades* (abreviado SI) es el sistema de unidades acordado internacionalmente para expresar los valores de las cantidades físicas. (Véase la tabla A-1.) En este sistema se agregan cuatro unidades básicas a las tres unidades bási-



**Tabla A-1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)**

	Cantidad	Unidad	Símbolo	Dimensión
Unidades básicas	Longitud	metro	m	
	Masa	kilogramo	kg	
	Tiempo	segundo	s	
	Corriente eléctrica	ampere	A	
	Temperatura	kelvin	K	
	Intensidad luminosa	candela	cd	
	Cantidad de sustancia	mole	mol	
Unidades auxiliares	Ángulo plano	radián	rad	
	Ángulo sólido	esterradián	sr	
Unidades derivadas	Aceleración	metros por segundo al cuadrado	m/s <sup>2</sup>	
	Actividad (de una fuente radiactiva)	1 por segundo	s <sup>-1</sup>	
	Aceleración angular	radianes por segundo al cuadrado	rad/s <sup>2</sup>	
	Velocidad angular	radianes por segundo	rad/s	
	Área	metro cuadrado	m <sup>2</sup>	
	Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m <sup>3</sup>	
	Viscosidad dinámica	newton segundo por metro cuadrado	N-s/m <sup>2</sup>	m <sup>-1</sup> kg s <sup>-1</sup>
	Capacitancia eléctrica	farad	F	m <sup>-2</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>4</sup> A <sup>2</sup>
	Carga eléctrica	coulomb	C	A s
	Intensidad del campo eléctrico	volt por metro	V/m	m kg s <sup>-3</sup> A <sup>-1</sup>
	Resistencia eléctrica	ohm	Ω	m <sup>2</sup> kg s <sup>-3</sup> A <sup>-2</sup>
	Entropía	joule por kelvin	J/K	m <sup>2</sup> kg s <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>

**Tabla A-1. (CONTINUACIÓN)**

	Cantidad	Unidad	Símbolo	Dimensión
Unidades derivadas (cont.)	Fuerza	newton	N	$\text{m kg s}^{-2}$
	Frecuencia	hertz	Hz	$\text{s}^{-1}$
	Iluminación	lux	lx	$\text{m}^{-2} \text{cd sr}$
	Inductancia	henry	H	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$
	Viscosidad cinemática	metros cuadrados por segundo	$\text{m}^2/\text{s}$	
	Luminancia	candelas por metro cuadrado	$\text{cd}/\text{m}^2$	
	Flujo luminoso	lumen	lm	$\text{cd sr}$
	Fuerza magnetomotriz	ampere vuelta	A	A
	Intensidad del campo magnético	ampere por metro	A/m	
	Flujo magnético	weber	Wb	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
	Densidad del flujo magnético	tesla	T	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
	Potencia	watt	W	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3}$
	Presión	pascal (newton por metro cuadrado)	Pa ( $\text{N}/\text{m}^2$ )	$\text{m}^{-1} \text{kg s}^{-2}$
	Intensidad radiante	watt por esterradián	W/sr	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{sr}^{-1}$
	Calor específico	joule por kilogramo kelvin	J/kg-K	$\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$
	Conductividad térmica	watt por metro kelvin	W/m-K	$\text{m kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$
	Velocidad	metros por segundo	m/s	
	Volumen	metro cúbico	$\text{m}^3$	
	Voltaje	volt	V	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$
	Número de onda	1 por metro	$\text{m}^{-1}$	
	Trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$

cas de costumbre (metro, kilogramo y segundo) del sistema absoluto mks de unidades. Las cuatro unidades básicas añadidas son el ampere como unidad de corriente eléctrica, el kelvin como unidad de temperatura termodinámica, la candela como unidad de intensidad luminosa y el mole como unidad de cantidad de sustancia. Así pues, en las unidades SI el metro, el kilogramo, el segundo, el ampere, el kelvin, la candela y el mole constituyen las siete unidades básicas. Hay dos unidades auxiliares en las unidades SI (el radián, que es la unidad de ángulo plano y el esterradián, que es la unidad de ángulo sólido). La tabla A-1 lista 7 unidades básicas, 2 unidades auxiliares y algunas de las unidades derivadas del Sistema Internacional de unidades (SI). [Los múltiplos y los submúltiplos de las unidades se indican mediante una serie de dieciséis prefijos para las diferentes potencias de 10. (Véase la página 10.)]

En las unidades del SI las siete unidades básicas se definen de la siguiente manera.

**Metro:** El metro es la longitud igual a 1 650 763.73 longitudes de onda de radiación en el vacío correspondiente a la transición no perturbada entre los niveles  $2P_{10}$  y  $5d_5$  del átomo de criptón, línea anaranjada del espectro luminoso del criptón.

**Kilogramo:** El kilogramo es la masa de un cilindro particular (de 39 mm de diámetro y 39 mm de altura) de aleación de platino-iridio, denominado el kilogramo Prototipo Internacional, el cual se conserva en una bóveda en Sévres, Francia, por la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

**Segundo:** El segundo es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

**Ampere:** El ampere es una corriente constante que fluye a través de dos conductores paralelos rectos, de longitud infinita, de sección transversal circular despreciable, y que mantienen una separación entre ellos de 1 metro en el vacío, que produce entre estos conductores una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  newton por metro de longitud.

**Kelvin:** El kelvin es la fracción  $1/273.16$  de la temperatura termodinámica del punto triple del agua. (Nótese que el punto triple del agua es  $0.01^\circ\text{C}$ .)

**Candela:** La candela es la intensidad luminosa, en la dirección de la normal, de una superficie de cuerpo negro con un área de  $1/600\,000$  metros cuadrados, a la temperatura de solidificación del platino bajo una presión de 101 325 newtons por metro cuadrado.

**Mole:** El mole es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0.012 kilogramos de carbono 12.

Las dos unidades auxiliares del SI (el radián y el esterradián) se definen como sigue:

**Radián:** El radián es una unidad de medición angular plana igual al ángulo en el centro de un círculo subtendido por un arco cuya longitud es igual al radio. (La dimensión del radián es cero, puesto que es la relación entre cantidades de la misma dimensión.)

**Esterradián:** El esterradián es una unidad de medida de ángulos sólidos que se expresa como el ángulo sólido subtendido en el centro de la esfera por una porción de la superficie cuya área es igual al cuadrado del radio de la esfera. (La dimensión del esterradián también es cero, puesto que es una relación entre cantidades de la misma dimensión.)

## APÉNDICE

**B****TABLAS DE CONVERSIÓN**

Las tablas de conversión para la masa, la longitud, el volumen, la presión, la energía y la temperatura se presentan en las tablas de la B-1 a la B-9.

**Tabla B-1.** TABLA DE CONVERSIÓN DE MASA

g	kg	lb	oz	grano	slug
1	$10^{-3}$	$2.205 \times 10^{-3}$	$3.527 \times 10^{-2}$	15.432	$6.852 \times 10^{-5}$
$10^3$	1	2.205	35.27	$15.432 \times 10^3$	$6.852 \times 10^{-2}$
453.6	0.4536	1	16	7000	$3.108 \times 10^{-2}$
28.35	$2.835 \times 10^{-2}$	0.0625	1	437.5	$1.943 \times 10^{-3}$
$6.480 \times 10^{-2}$	$6.480 \times 10^{-5}$	$1.429 \times 10^{-4}$	$2.286 \times 10^{-3}$	1	$4.440 \times 10^{-6}$
$1.459 \times 10^4$	14.59	32.17	514.78	$2.252 \times 10^5$	1

**Tabla B-2. TABLA DE CONVERSIÓN DE LONGITUD**

cm	m	in.	ft	yd
1	0.01	0.3937	0.03281	0.01094
100	1	39.37	3.281	1.0936
2.54	0.0254	1	0.08333	0.02778
30.48	0.3048	12	1	0.3333
91.44	0.9144	36	3	1

km	miles	milla náutica	ft
1	0.6214	0.5400	3280.84
1.6093	1	0.8690	5280
1.852	1.151	1	6076

**Tabla B-3. TABLA DE CONVERSIÓN DE LONGITUD (DE in A mm)**

in.	mm	in.	mm	in.	mm	in.	mm
1/32	0.794	9/32	7.144	17/32	13.494	25/32	19.844
1/16	1.587	5/16	7.937	9/16	14.287	13/16	20.638
3/32	2.381	11/32	8.731	19/32	15.081	27/32	21.431
1/8	3.175	3/8	9.525	5/8	15.875	7/8	22.225
5/32	3.969	13/32	10.319	21/32	16.669	29/32	23.019
3/16	4.762	7/16	11.112	11/16	17.462	15/16	23.812
7/32	5.556	15/32	11.906	23/32	18.256	31/32	24.606
1/4	6.350	1/2	12.700	3/4	19.050	1	25.400

**Tabla B-4.** TABLA DE CONVERSIÓN DE ÁREA

cm <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	in. <sup>2</sup>	ft <sup>2</sup>	yd <sup>2</sup>
1	10 <sup>-4</sup>	0.155	1.0764 × 10 <sup>-3</sup>	1.196 × 10 <sup>-4</sup>
10 <sup>4</sup>	1	1550	10.764	1.196
6.452	6.452 × 10 <sup>-4</sup>	1	6.944 × 10 <sup>-3</sup>	7.716 × 10 <sup>-4</sup>
929.0	0.09290	144	1	0.1111
8361	0.8361	1296	9	1

km <sup>2</sup>	milla <sup>2</sup>
1	0.3861
2.590	1

**Tabla B-5.** TABLAS DE CONVERSIÓN DE VOLUMEN

mm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	in. <sup>3</sup>
1	10 <sup>-3</sup>	6.102 × 10 <sup>-5</sup>
10 <sup>3</sup>	1	6.102 × 10 <sup>-2</sup>
1.639 × 10 <sup>4</sup>	16.39	1

m <sup>3</sup>	ft <sup>3</sup>	yd <sup>3</sup>
1	35.315	1.308
2.832 × 10 <sup>-2</sup>	1	3.704 × 10 <sup>-2</sup>
0.7646	27	1

Galón norte- americano	litro	barril
1	3.785	2.381 × 10 <sup>-2</sup>
0.2642	1	0.6290 × 10 <sup>-2</sup>
42	159	1

**Tabla B-6.** TABLA DE CONVERSIÓN DE PRESIÓN

Pa o N/m <sup>2</sup>	bar (10 <sup>5</sup> N/m <sup>2</sup> )	kg <sub>f</sub> /cm <sup>2</sup>	lb <sub>f</sub> /in. <sup>2</sup>	atm (presión atmosférica estándar)	mm Hg	in. Hg	m H <sub>2</sub> O
1	$1 \times 10^{-5}$	$1.0197 \times 10^{-5}$	$1.450 \times 10^{-4}$	$9.869 \times 10^{-6}$	$7.501 \times 10^{-3}$	$2.953 \times 10^{-4}$	$1.0197 \times 10^{-4}$
$1 \times 10^5$	1	1.0197	14.50	0.9869	750.1	29.53	10.197
$9.807 \times 10^4$	0.9807	1	14.22	0.9678	735.6	28.96	10.000
$6.895 \times 10^3$	0.06895	0.07031	1	0.06805	51.71	2.036	0.7031
$1.0133 \times 10^5$	1.0133	1.0332	14.70	1	760	29.92	10.33
$1.3332 \times 10^2$	$1.3332 \times 10^{-3}$	$1.3595 \times 10^{-3}$	$19.34 \times 10^{-3}$	$1.3158 \times 10^{-3}$	1	$3.937 \times 10^{-2}$	$1.360 \times 10^{-2}$
$3.386 \times 10^3$	0.03386	0.03453	0.4912	0.03342	25.4	1	0.3453
$9.807 \times 10^3$	0.09807	0.10000	1.422	0.09678	73.55	2.896	1



**Tabla B-7. TABLA DE CONVERSIÓN DE ENERGÍA**

J	kg <sub>f</sub> -m	ft-lb <sub>f</sub>	kWh	kcal	Btu
1	0.10197	0.7376	$2.778 \times 10^{-7}$	$2.389 \times 10^{-4}$	$9.480 \times 10^{-4}$
9.807	1	7.233	$2.724 \times 10^{-6}$	$2.343 \times 10^{-3}$	$9.297 \times 10^{-3}$
1.356	0.1383	1	$3.766 \times 10^{-7}$	$3.239 \times 10^{-4}$	$1.285 \times 10^{-3}$
$3.600 \times 10^6$	$3.671 \times 10^5$	$2.655 \times 10^6$	1	860	3413
4186	426.9	3087	$1.163 \times 10^{-3}$	1	3.968
1055	107.6	778	$2.930 \times 10^{-4}$	0.2520	1

**Tabla B-8. TABLA DE CONVERSIÓN DE POTENCIA**

kW	kg <sub>f</sub> -m/s	ft-lb <sub>f</sub> /s	caballo de fuerza inglés hp	kcal/s	Btu/s
1	101.97	737.6	1.341	0.2389	0.9480
$9.807 \times 10^{-3}$	1	7.233	$1.315 \times 10^{-2}$	$2.343 \times 10^{-3}$	$9.297 \times 10^{-3}$
$1.356 \times 10^{-3}$	0.1383	1	$1.818 \times 10^{-3}$	$3.239 \times 10^{-4}$	$1.285 \times 10^{-3}$
0.7457	76.04	550	1	0.1782	0.7069
4.186	426.9	3087	5.613	1	3.968
1.055	107.6	778.0	1.414	0.2520	1

**Tabla B-9. TABLA DE CONVERSIÓN DE TEMPERATURA**

°C	°F	°C	°F	°C	°F
-50	-58	16	60.8	44	111.2
-40	-40	18	64.4	46	114.8
-30	-22	20	68.0	48	118.4
-20	-4	22	71.6	50	122.0
-10	14	24	75.2	55	131.0
-5	23	26	78.8	60	140.0
0	32	28	82.4	65	149.0
2	35.6	30	86.0	70	158.0
4	39.2	32	89.6	75	167.0
6	42.8	34	93.2	80	176.0
8	46.4	36	96.8	85	185.0
10	50.0	38	100.4	90	194.0
12	53.6	40	104.0	95	203.0
14	57.2	42	107.6	100	212.0

Para convertir grados Fahrenheit en Celsius, reste 32 y multiplique por 5/9.

$$t_C = \frac{5}{9} (t_F - 32)$$

Para convertir grados Celsius a Fahrenheit, multiplique por 9/5 y sume 32.

$$t_F = \frac{9}{5} t_C + 32$$

La temperatura del cero absoluto ocurre en  $-273.5^\circ$  en escala Celsius y en  $-459.67^\circ$  en la escala Fahrenheit. Las temperaturas absolutas en las dos escalas son  $t_C + 273.15$  y  $t_F + 459.67$ . Nótese que en la mayoría de los cálculos las constantes utilizadas son 273 y 460. Nótese también que

$$t_C \text{ grados Celsius} = (t_C + 273.15) \text{ kelvin}$$

## APÉNDICE

# C

## ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE LAGRANGE

Los modelos matemáticos de los sistemas físicos (mecánicos, eléctricos, etc.) pueden derivarse de consideraciones de energía sin aplicarles las leyes de Newton o de Kirchhoff. En la Sec. 2-5 presentamos un método simple para derivar las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos, del conocimiento de las energías potencial y cinética del sistema. En este apéndice se presenta un método de energía más versátil, debido a Lagrange, para derivar modelos matemáticos.

Al derivar las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico complicado, conviene hacerlo aplicando dos métodos diferentes (uno basado en la segunda ley de Newton y el otro en consideraciones de energía) para asegurarse de que sean correctos. En este aspecto, el método de Lagrange es un recurso adecuado para derivar las ecuaciones del sistema.

Para derivar las ecuaciones de movimiento de Lagrange, es necesario definir las coordenadas generalizadas y el Lagrangiano, para establecer el principio de Hamilton.

**Coordenadas generalizadas.** Las coordenadas generalizadas de un sistema son un conjunto de coordenadas independientes que se necesita para describir completamente el movimiento del sistema. El número de coordenadas generalizadas necesario para describir el movimiento del sistema es igual al número de grados de libertad.

Si un sistema requiere  $n$  coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ne-

cesitamos considerar  $n$  coordenadas generalizadas como coordenadas de un sistema coordinado  $n$ -dimensional en un espacio  $n$ -dimensional. Entonces, en cualquier instante el sistema se caracteriza mediante un punto en este espacio  $n$ -dimensional. Al transcurrir el tiempo, el punto del sistema en el espacio  $n$ -dimensional se mueve y describe una curva en el espacio. (La curva representa el movimiento del punto del sistema.)

**Lagrangiano.** El Lagrangiano  $L$  de un sistema se define por

$$L = T - U \quad (\text{C-1})$$

donde  $T$  es la energía cinética y  $U$  es la energía potencial del sistema. El Lagrangiano  $L$  en forma general es una función de  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y del tiempo  $t$ , o bien

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

**Principio de Hamilton.** El principio de Hamilton establece que el movimiento del punto del sistema en el espacio  $n$ -dimensional de  $t = t_1$  a  $t = t_2$  es tal que la integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{C-2})$$

es un extremo (máximo o mínimo) de la trayectoria del movimiento.

**Ecuaciones de movimiento de Lagrange para sistemas conservativos.** Si no se disipa energía en un sistema, se le llama *sistema conservativo*. Un sistema mecánico conservativo es aquel en el cual la energía aparece solamente como energía cinética y energía potencial.

Considérese el caso donde el Lagrangiano  $L$  es función de una coordenada generalizada  $q$ , de su derivada con respecto al tiempo  $\dot{q}$  y del tiempo  $t$ , o sea que  $L = L(q, \dot{q}, t)$ . Entonces la Ec. (C-2) queda

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (\text{C-3})$$

Sea  $q$  la función para la cual  $I$  es un extremo. Supóngase que  $\delta q$  es una función arbitraria que es continua en  $t_1 \leq t \leq t_2$ , que tiene una derivada continua  $\delta \dot{q}$  en  $t_1 \leq t \leq t_2$  y desaparece en  $t = t_1$  y  $t = t_2$ , o que  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Dénse pequeñas variaciones en  $q$  y  $\dot{q}$  y evalúese la diferencia  $\Delta I$  entre dos integrales de Lagrange; esto es,

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt \end{aligned}$$

Al expandir el integrando del segundo miembro de la última ecuación en se-

ries de Taylor alrededor del punto  $(q, \dot{q})$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta I = & \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} (\delta q)^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \delta q \delta \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} (\delta \dot{q})^2 \right] dt + \dots \end{aligned}$$

El primer término del segundo miembro en la ecuación se denomina la *primera variación de I*.

Por la teoría de variaciones se sabe que la condición necesaria para que  $I$  sea un extremo es que la primera variación de  $I$  o  $\delta I$  sea cero.

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d \delta q}{dt} dt = 0$$

Puesto que esta última ecuación puede escribirse

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

se tiene

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_2} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

Nótese que  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , los primeros dos términos en esta última ecuación son iguales a cero y por lo tanto, se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

Esta última ecuación puede conservar su validez para cualquier  $\delta q$  que satisfaga la condición de ser continua y desaparezca en  $t = t_1$  y  $t = t_2$ . Por lo tanto, de acuerdo con la teoría de variaciones, el integrando debe ser idénticamente cero o bien

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (\text{C-4})$$

La ecuación (C-4) se conoce como *ecuación de Euler-Lagrange*. Como se verá posteriormente, la Ec. (C-4) se reduce a la ecuación de movimiento del sistema que pudiera obtenerse al usar la segunda ley de Newton (o las leyes de Kirchhoff, etc.). Por consiguiente, también se le conoce como *ecuación de movimiento de Lagrange* para el sistema conservativo.

Si el Lagrangiano  $L$  es función de  $n$  coordenadas generalizadas,  $n$  velocidades generalizadas y el tiempo  $t$ , entonces

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$$

y las ecuaciones correspondientes de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{C-5})$$

La  $n$  ecuaciones dadas por la Ec. (C-5) son las ecuaciones de Lagrange del movimiento para el sistema conservativo.

**Ejemplo C-1. Péndulo simple.** Considérese el péndulo simple que se muestra en la Fig. C-1. Este es un sistema de un grado de libertad y el ángulo  $\theta$  es la única coordenada generalizada.

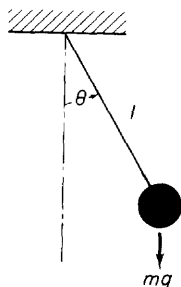


Fig. C-1. Péndulo simple.

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2$$

Suponiendo que la posición de la masa cuando  $\theta = 0$  es el eje de referencia, la energía potencial  $U$  se puede escribir

$$U = mgl(1 - \cos \theta)$$

El Lagrangiano  $L$  es

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

Por lo tanto, la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

se vuelve

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

la cual es la ecuación de movimiento para el sistema.

**Ejemplo C-2. Péndulo con resorte.** Considérese el péndulo con resorte que se muestra en la Fig. C-2 y supóngase que la fuerza del resorte es cero cuando el péndulo

lo está vertical o sea que  $\theta = 0$ . Este también es un sistema de un grado de libertad y el ángulo  $\theta$  es la única coordenada generalizada.

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

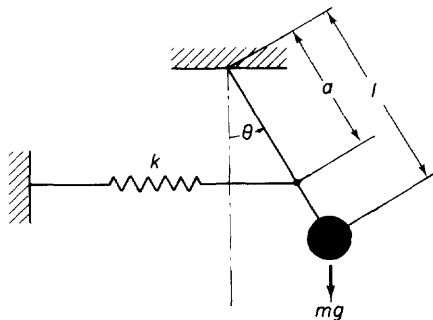


Fig. C-2. Péndulo con resorte.

y la energía potencial del sistema es

$$U = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}k(a \sin \theta)^2$$

El Lagrangiano  $L$  es

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}ka^2 \sin^2 \theta$$

Por lo tanto, la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

viene a ser

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl \sin \theta + ka^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{ka^2}{ml^2} \sin \theta \cos \theta = 0$$

Esta es la ecuación de movimiento para el sistema. Para valores pequeños de  $\theta$ , la última ecuación puede simplificarse como

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2} \right) \theta = 0$$

(Consúltese el Problema A-7-4, el cual da la forma de derivar esta ecuación usando la segunda ley de Newton.)

**Ejemplo C-3. Péndulo doble.** Considérese el péndulo doble que se muestra en la Fig. C-3. Este es un sistema de dos grados de libertad. Los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las coordenadas generalizadas del sistema,

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades absolutas de las masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Nótese que

$$v_1 = l_1 \dot{\theta}_1$$

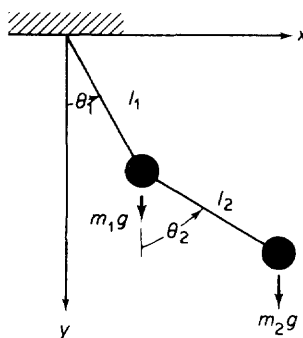


Fig. C-3. Péndulo doble.

La velocidad absoluta  $v_2$  no se ve obvia en el diagrama y por lo tanto, será derivada de lo que sigue. Puesto que es más fácil obtener la velocidad absoluta  $v_2$  en el sistema de coordenadas rectangulares  $x$ - $y$ , escribiremos primero las coordenadas  $x$  y  $y$  de la masa  $m_2$  y después diferenciaremos para obtener  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$ .

$$x = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$y = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

Las velocidades  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  son

$$\dot{x} = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\dot{y} = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2$$

Nótese que

$$v_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

se obtiene

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + (-l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 \\ &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética  $T$  es

$$T = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

La energía potencial  $U$  del sistema es

$$U = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)]$$

donde la energía potencial del sistema cuando  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = 0$  se toma como cero. El Lagrangiano  $L$  del sistema es

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] \\ &\quad - m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) - m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)] \end{aligned}$$



Las ecuaciones de Lagrange para este sistema son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

Nótese que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - (m_1 + m_2)g l_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

Las ecuaciones de Lagrange serán

$$(m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0$$

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] + g \sin \theta_2 = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta}_1 + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \left( \frac{l_2}{l_1} \right) [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{g}{l_1} \sin \theta_1 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \left( \frac{l_1}{l_2} \right) [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 = 0$$

Las dos últimas ecuaciones son las ecuaciones de movimiento del sistema de doble péndulo.

**Ejemplo C-4. Péndulo móvil.** Considérese el péndulo móvil que se muestra en la Fig. C-4. Este es un sistema con dos grados de libertad. Las coordenadas generalizadas son  $x$  y  $\theta$ .

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

donde  $v_1 = \dot{x}$  y  $v_2$  es la velocidad absoluta de la masa  $m$ . En forma similar al caso del sistema de doble péndulo, el cuadrado de la velocidad  $v_2$  de la masa  $m$  puede obtenerse mediante

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta})^2 + (l \sin \theta \dot{\theta})^2 \\ &= \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta})$$

La energía potencial del sistema es

$$U = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} kx^2$$

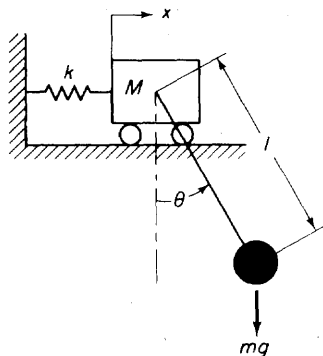


Fig. C-4. Péndulo móvil.

donde la energía potencial cuando  $x = 0$  y  $\theta = 0$  se toma como cero.

El Lagrangiano  $L$  es

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\cos\theta\dot{\theta}) - mgl(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

se hacen

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x} + m\dot{x} + ml\cos\theta\dot{\theta}) + kx = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta} + m\dot{x}l\cos\theta) + m\dot{x}l\sin\theta\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{m}{M+m}l\cos\theta\ddot{\theta} - \frac{m}{M+m}l\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{k}{M+m}x = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{l}\ddot{x}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Las dos últimas ecuaciones son las ecuaciones de movimiento para el sistema.

**Función de disipación de Rayleigh.** En los sistemas no conservativos (sistemas amortiguados) la energía se disipa. Rayleigh desarrolló una función de disipación  $D$  de la que puede derivarse la fuerza del amortiguamiento. Suponiendo que el sistema involucra  $r$  amortiguadores viscosos, la función de disipación de Rayleigh se define mediante

$$D = \frac{1}{2}(b_1\dot{\delta}_1^2 + b_2\dot{\delta}_2^2 + \dots + b_r\dot{\delta}_r^2)$$

donde  $b_i$  es el coeficiente del  $i$ -ésimo amortiguador viscoso y  $\delta_i$  es la diferencia de velocidad a través del  $i$ -ésimo amortiguador viscoso. (Así pues,  $\delta_i$  puede expresarse como función de las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ .)

Mediante el uso de la función de disipación de Rayleigh, las ecuaciones de Lagrange para los sistemas no conservativos se convierten en

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{C-6})$$

**Ejemplo C-5. Sistema masa-resorte-amortiguador.** En el sistema masa-resorte-amortiguador que se muestra en la Fig. C-5, la única coordenada generalizada es el desplazamiento  $x$ , el cual se mide a partir de su posición de equilibrio;

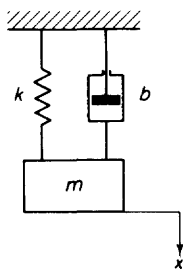


Fig. C-5. Sistema masa-resorte-amortiguador.

La energía cinética  $T$  del sistema es

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

La energía potencial  $U$  es

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

donde la energía potencial en la posición de equilibrio se toma como cero. (Nótese que aunque la energía potencial instantánea es la potencial instantánea del peso de la masa más la energía elástica instantánea almacenada en el resorte, el incremento en la energía potencial total del sistema se debe al incremento en la energía del resorte a causa de su deformación con respecto a la posición de equilibrio. Véase la Sec. 2-5).

El Lagrangiano  $L$  del sistema es

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

La función  $D$  de disipación de Rayleigh es

$$D = \frac{1}{2} b \dot{x}^2$$

Así es que al sustituir en la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

se obtiene

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

la cual es la ecuación de movimiento para el sistema.

**Ejemplo C-6. Sistemas RLC.** En el sistema RLC que se muestra en la Fig. C-6 el capacitor  $C$  está cargado inicialmente con  $q_0$  y el interruptor  $S$  se cierra en el tiempo  $t = 0$ . Para este sistema, la carga  $q$  es la única coordenada generalizada.

La energía cinética  $T$  del sistema es

$$T = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

La energía potencial  $U$  es

$$U = \frac{1}{2}Ce^2 = \frac{1}{2C}q^2$$

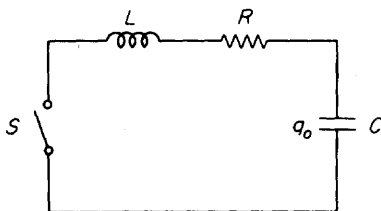


Fig. C-6. Sistema RLC.

La función  $D$  de disipación de Rayleigh para el sistema es

$$D = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$$

El Lagrangiano  $L$  del sistema es

$$L = T - U = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2$$

Al sustituir  $L$  y  $D$  en la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$$

se tiene

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q + R\dot{q} = 0$$

o bien

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

donde las condiciones iniciales son  $q(0) = q_0$  y  $\dot{q}(0) = 0$ .

**Ecuaciones de Lagrange para sistemas con fuerzas de entrada.** Si el sistema se somete a una fuerza de entrada (fuerza generalizada), entonces las ecuaciones de Lagrange se hacen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (C-7)$$

donde  $Q_i$  es la fuerza de entrada correspondiente a la  $i$ -ésima coordenada generalizada.

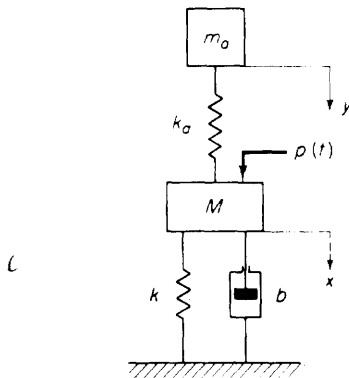
**Ejemplo C-7. Absorción de vibración dinámica.** El sistema vibratorio mecánico con absorción de vibración dinámica que se muestra en la Fig. C-7, donde  $p(t)$  es la fuerza de entrada, es un sistema con dos grados de libertad. Las coordenadas generalizadas son los desplazamientos  $x$  y  $y$ , los que se miden desde sus posiciones de equilibrio respectivos cuando está ausente la fuerza de entrada  $p(t)$ .

La energía cinética  $T$  del sistema es

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_a\dot{y}^2$$

La energía potencial  $U$  del sistema es

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_a(y - x)^2$$



**Fig. C-7.** Sistema mecánico vibratorio con absorción de vibración dinámica.

donde la energía potencial cuando  $x = 0$  y  $y = 0$  se toma como cero. La función  $D$  de disipación de Rayleigh es

$$D = \frac{1}{2}b\dot{x}^2$$

La fuerza generalizada correspondiente a la coordenada  $x$  es  $p(t)$ .

El Lagrangiano  $L$  del sistema es

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_a\dot{y}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k_a(y - x)^2$$

Las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} &= Q_1 = p(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} &= Q_2 = 0 \end{aligned}$$

quedan como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M\dot{x}) + kx - k_a(y - x) + b\dot{x} &= p(t) \\ \frac{d}{dt}(m_a\dot{y}) + k_a(y - x) &= 0 \end{aligned}$$

o bien

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k_a(x - y) = p(t)$$

$$m_a\ddot{y} + k_a(y - x) = 0$$

Las dos últimas ecuaciones son las ecuaciones de movimiento del sistema.

---

**Conclusiones.** Como se vio en los ejemplos precedentes, una vez que se han derivado las expresiones de energía del sistema, el método de Lagrange dará tantas ecuaciones como grados de libertad tenga el sistema. Esas ecuaciones son las ecuaciones de movimiento para el sistema y describen completamente la dinámica del sistema.

En sistemas complicados, con objeto de asegurarse del correcto planteamiento de las ecuaciones de movimiento, es preferible obtener esas ecuaciones en forma independiente mediante la utilización de (a) el método de Lagrange y (b) la segunda ley de Newton (o las leyes de Kirchhoff, etc.). Los dos enfoques deben conducir al mismo resultado.

# ÍNDICE

## A

- Abscisa de convergencia, 327
- Absorción de vibraciones dinámicas, 422-426, 439-440, 473-475, 490, 606-607
- Acción de control derivativa, 532
- Acción de control integral, 531
- Acción de control proporcional-derivativo, 510-511
- Acción de control proporcional-integral, 510-512
- Acción de control proporcional-integral-derivativo, 510-512
- Aceite:
  - comprensibilidad del, 228
  - filtración del, 228
  - martilleo del, 179-180
  - viscosidad dinámica del, 211
- Aceleración, 18
- Aceleración angular, 18
  - absoluta, 18
  - relativa, 18
- Aceleración gravitacional, constante de, 12
- Acelerómetro, 421-422, 471-472
- Actuador, 173-175, 508
  - lineal, 173-174
  - rotatorio, 173-175
- Actuadores hidráulicos, 173
- Actuadores neumáticos, 241-245
- Actuadores rotatorios, 173-175
- Acumulador, 173, 230
- Agua:
  - depósito de, 230
  - martillero del, 179-180
  - viscosidad cinemática del, 184
  - viscosidad dinámica del, 185
- Aire:
  - bomba de, 235-237
  - colchón de, 235-237
  - peso específico del, 253
  - propiedades del, 253-254
  - unidad de control de presión del, 240
  - volumen específico del, 253-255
- Aire seco, 253
- Álgebra booleana, 285
- Álgebra compleja, 322-325
- Amortiguador, 22, 31
  - ideal, 22
  - rotacional, 23
  - rotacional, 23
  - traslacional, 23
- Ampere, 106, 586, 588
- Ampérmetro (emperimetro), 148-149, 161
- Amplificador biestable fluidico, 278
- Amplificador de atracción de pared, 278
- Amplificador de interacción de inyección, 280-281
- Amplificador de turbulencia, 279-280
- Amplificador de vórtices, 281-282
- Amplificador digital, 278
- Amplificador digital fluidico, 278

Amplificador fluidico, 276  
 Amplificador neumático de tobera (aleta), 512-513  
 Amplificador proporcional, 280  
 Amplificadores de flujo controlado, 294-295  
 Amplificadores operacionales, 427  
 Andersem, B. W., 299  
 Análisis de la respuesta transitoria:  
   de sistemas de control, 526-535  
   de sistemas de primer orden, 365-370  
   de sistemas de segundo orden, 371-379  
 Analogía:  
   eléctrico-térmica, 367  
   fuerza-corriente, 135-136, 156-157  
   masa-capacitancia, 136  
   masa-inductancia, 135  
   mecánico-eléctrica, 134  
 Aproximación lineal, 223  
 Áreas, tablas de conversión para, 592  
 Aspas, bomba de, 169-171  
 Aspas balanceadas, bomba de, 171-172  
 Aspas desbalanceadas, bomba de, 171  
 Atracción pared, efecto de la, 277  
 Autoinductancia, 109, 127

## B

Balanceo, 211-212  
 Barna, P. S., 210  
 Bayley, F. J., 210  
 Bernoulli, ecuación de, 191-193  
 Bloque, 497  
   y polipasto, 63-64  
 Bloque funcional, 497  
 Bobinas mutuamente acopladas, 127  
 Bohn, E. V., 349  
 Bolsas de vapor, 181  
 Bombas:  
   de aspas, 169-171-173  
   de aspas balanceadas, 172  
   de aspas no balanceadas, 171  
   de desplazamiento no positivo, 168  
   de desplazamiento positivo, 169-172  
   de engranes, 169, 172-173  
   de pistón axial, 169-170  
   de pistón radial, 169-170  
   hidráulicas, 167-173  
 Btu, 133, 254, 594

## C

Cabeza, 197  
 Calibrador de presión, 165  
 Calor, 254  
   energía del, 256  
 Calor específico, 254, 256, 366  
   a presión constante, 257  
   a volumen constante, 257  
   razón de, 254

Cambio de estado:  
   adiabático, 258-259  
   adiabático reversible, 258-259  
   a presión constante, 257  
   a temperatura constante, 257  
   a volumen constante, 256-257  
   isentrópico, 258, 260, 302-303  
   isotérmico, 257  
   para un gas perfecto, 256-257  
   politrópico, 258  
 Camp, D. T., 299  
 Campo de fuerza, 12  
 Campo magnético, 109  
 Candela, 586-588  
 Cannon, R. H. Jr., 68, 555  
 Cantidad básica, 584  
 Cantidad de movimiento, 18, 384, 456  
 Cantidades análogas, 135  
 Capacidad, 199  
 Capacitancia, 108, 131, 198, 271-273  
 Capacitancia mecánica, 22  
 Capacitancia térmica, 366  
 Capacitor, 108, 109  
 Carga eléctrica, 106  
 Celsius, 595  
 Centipoise, 183  
 Centistoke, 183  
 Cero múltiple, 326  
 Ceros, 325  
 Chapman, W. P., 299  
 Churchill, R. V., 349  
 Cilindro de doble acción, 173  
 Cilindro diferencial, 173  
 Cilindro homogéneo, 14, 17, 44-50, 59-60  
   73, 89-90, 101  
   momento de inercia de un, 14  
 Cilindro neumático, 241-243  
   tipo émbolo buzo, 241  
   tipo fuelle, 241  
   tipo perno, 241  
   tipo pistón, 241-242  
 Cilindro no diferencial, 276  
 Circuito AND, 289-290  
   analogía eléctrica del, 287-289  
 Circuito de dos terminales, 392-379  
 Circuito de memoria, 316-317  
 Circuito en paralelo, 111  
 Circuito en serie, 111  
 Circuito inhibidor, 291  
 Circuito acoplado, 128  
 Circuito NAND, 291-292  
   analogía eléctrica del, 290-292  
 Circuito NOR, 291-292  
   analogía eléctrica del, 291  
 Circuito NOT, 289-290  
   analogía eléctrica del, 290  
 Circuito OR, 287-289  
   analogía eléctrica del, 287  
 Circuitos, 110-118  
   análisis de los, 118  
 Circuitos eléctricos, 110-130  
 Circuitos hidráulicos, 166-167



- Circuitos lógicos, 284, 293-294, 295-296
  - 308-313, 317-318
- Circuitos puente, 162
- Claro diferencial, 509-511
- Coefficientes de contracción, 193, 196, 259
- Coefficiente de descarga, 194, 196, 261
- Coefficiente de expansión cúbica, 182
- Coefficiente de filtración, 228
- Coefficiente de fricción viscosa, 23
  - torsional, 23-24
- Coefficientes de válvulas, 209
- Compensación del error, 530-531
- Complejo conjugado, 321, 325
- Complemento, 285
- Compliance, 22
- Componente, 1
- Comprensibilidad, 182
  - módulo de, 182
  - razón de flujo de, 228
- Compresor enfriador, 240
- Compresores, 238-239
  - axiales, 238-239
  - centrifugos, 238-239
  - de cuatro etapas, 239
  - de desplazamiento positivo, 238-239
  - de dos etapas, 239
  - reciprocantes, 238-239
  - rotatorios, 238-239
- Compuerta, 284
- Compuerta lógica fluidica, 284
- Computadoras analógicas, 426-427, 480, 491-492
- Computadoras electrónicas analógicas, 427-433
- Conductancia, 108
- Conservación de la masa, principio de, 181-189
- Constante de aceleración gravitacional, 12
- Constante de fricción viscosa, 23
  - torsional, 23-24
- Constante de los gases, 254, 255, 304-305
  - del acire, 253, 255
  - universal, 255, 304-305
- Constante equivalente del resorte, 73-74, 76, 97
- Constante torsional del resorte, 21
- Constante universal de los gases, 255, 304-305
  - en unidades BES, 305
  - en unidades SI, 305
- Constante del resorte, 21
  - equivalente de la, 73-74, 97
  - torsional, 23-24
- Constante del tiempo, 26, 203, 217, 398
- Contracción coeficiente de, 193, 196, 259
- Control:
  - de dos posiciones, 509-510
  - derivativa, 532
  - encendido-apagado, 509-510
  - proporcional, 510
  - proporcional-derivativo, 510-512
  - proporcional-integral, 510-512
  - proporcional-integral-derivativo, 510-512
  - Control de altitud del impulsor espacial, 551
  - Control de malla abierta, 496
  - Control de malla abierta, sistema de, 496
  - Control direccional, válvula de, 249
  - Control de posición, 551
  - Control de tráfico, 496
  - Control de volumen, 188
  - Control fluidico, 276
  - Control proporcional:
    - acción de, 511
    - de un sistema con carga inercial, 533-534
    - de un sistema de primer orden, 528-530
  - Control proporcional-derivativo:
    - de un sistema con carga inercial, 534-535
    - de un sistema de segundo orden, 548-550
  - Control realimentado, 494
  - Control realimentado, sistema de, 495
  - Controlador hidráulico de tubo de inyección, 561
  - Control proporcional-derivativo:
    - electrónico, 564-565
    - hidráulico, 564-565
    - neumático, 518-519
  - Controlador proporcional-integral:
    - electrónico, 526-527
    - hidráulico, 562
    - neumático, 520-521
  - Controlador proporcional-integral-derivativo, 520-522-523
  - Controladores, 508-527
  - Controladores automáticos industriales, 506-527
  - Controladores de dos posiciones, 509
    - neumáticos, 509, 517
  - Controladores electrónicos, 526-527
    - proporcional-derivativos, 526-527
    - proporcional-integrales, 526-527
    - proporcionales, 526
  - Controladores hidráulicos, 523-525, 561-564
    - tubo de inyección de los, 561
  - Controladores integrales hidráulicos, 523-524
  - Controladores neumáticos, 512-523
    - de dos posiciones, 509, 517
    - de encendido-apagado, 518
    - proporcional, 515-517
    - proporcional-derivativo, 518-520
    - proporcional-integral, 520-521
    - proporcional-integral-derivativo, 522, 523
  - Controladores proporcionales:
    - electrónicos, 526
    - hidráulicos, 524-525
    - neumáticos, 515-517
  - Coordenadas generalizadas, 576-577
  - Convulsión, 353-354
  - Corriente, 106
    - fuelle, 106
    - generador, 106
  - Corriente ciclica, 118
  - Coullomb, 106
    - fricción de, 41

Cuerpo rígido, 13  
 Curvas de respuesta al escalón unitario, 540, 542, 549  
 Curvas de respuesta exponencial, 368

## D

d'Alambert, 49-50  
 D'Azzo, J. J., 137  
 Decremento logarítmico, 377  
 Dedo mecánico, 235-236  
 De Morgan, ley de adición de, 291  
 De Morgan, ley de multiplicación de, 292  
 Den Hartog, J. P., 68  
 Densidad, 182  
   del aire, 253  
 Densidad de masa, 181  
 Descarga, coeficiente de, 194, 196, 261  
 Descarga, elemento de, 239  
 Desplazamiento, 18  
 Desplazamiento angular, 18  
 Desplazamiento no positivo, bombas de, 168  
 Desplazamiento positivo, bombas de, 168  
   172-173  
 Diagrama de bloques, 497, 506  
   álgebra de, 502, 503-504  
   reducción de, 502-506  
 Dimensión, 584  
 Dina, 13  
 Dinámica del numerador, 478  
 Disco homogéneo, 76, 80-84  
   momentos de inercia de un, 70-71  
 Dispositivo biestable, 278  
 Dispositivo biestable fluidico, 278  
 Dispositivo relevador de presión, 180  
 Dispositivos de fluidica digital, 284  
 Dispositivos fluidicos, 276, 307  
   desventajas de los, 284  
   ventajas de los, 283

## E

Ecuación característica, 26  
 Ecuación de Bernoulli, 191-193  
 Ecuación de energía para un flujo inestable, 192  
 Ecuación de Euler, 189-191, 260  
   de movimiento, 189-191  
 Ecuación de movimiento de Lagrange, 596-607  
 Ecuación de voltaje de malla, 155  
 Ecuación diferencial lineal, 2  
 Ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, 2  
 Ecuación diferencial lineal invariante con el tiempo, 2, 347-349  
 Ecuación diferencial lineal variante con el tiempo, 2  
 Ecuación diferencial no lineal, 2  
 Ecuación no lineal, 222-224, 234

Ecuaciones de continuidad, 188  
 Ecuaciones diferenciales:  
   lineales, 2  
   lineales de coeficientes constantes, 2  
   lineales e invariantes con el tiempo, 2  
   347-349  
   lineales y variantes con el tiempo, 2  
   no lineales, 2  
 Efecto de la atracción pared, 277  
 Eléctrico-térmica, analogía, 367  
 Elemento activo, 57  
 Elemento de descarga, 239  
 Elemento de medición, 508  
 Elemento pasivo, 57  
 Elementos de decisión, 284  
 Elementos NOR, 291, 294-297  
 Elementos resistivos:  
   eléctrica, 107  
   mecánica, 24  
 Energía, 50-60, 129-133  
   almacenada en capacitores, 131  
   almacenada en inductores, 131  
   cinética, 53, 54, 56-60  
   disipada, 54-56  
   potencial, 52-53, 56-60  
   tabla de conversiones para, 594  
 Energía para un flujo inestable, ecuación de, 192  
 Energía eléctrica, 133  
 Energía, ley de la conservación de la, 88-91  
 Energía térmica, 133  
 Engrane:  
   de bomba, 169, 172  
   de motor, 169, 174  
   tren de, 66-68, 95-96  
 Enlace por flujo magnético, 136  
 Entrada de impulso, 393, 456  
 Entrada determinística, 7  
 Entrada probabilística, 7  
 Equivalente mecánico del calor, 256  
 Equivalente térmico del calor, 256  
 Error, compensación del, 530-531  
 Error en estado estable, 370, 530  
   de respuesta de rampa, 547-550  
 Escalamiento del tiempo, 436  
 Especificaciones:  
   de ingeniería, 6  
   de respuesta transitoria, 535-544  
 Especificaciones de ingeniería, 6  
 Estabilidad, 496  
   absoluta, 496  
   relativa, 496  
 Estado, cambio adiabático de, 258  
 Estado isentrópico, cambio de, 258, 259,  
   302-303  
 Estado isotérmico, cambio de, 257  
 Estado politrópico, cambio de, 258  
 Estereorradiación, 586, 589  
 Euler, ecuación de, 189-190, 260  
   de movimiento, 189-190  
 Euler, fórmula de, 28  
 Euler, teorema de, 321

Euler-Lagrange, ecuación de, 598  
 Expansión cúbica, coeficiente de, 182  
 Expansión en fracciones parciales, 344-346  
 método de, 343-345  
 Exponente adiabático, 258  
 Exponente politrópico, 258, 272

## F

Factor de amortiguamiento relativo, 374  
 determinación experimental del, 376-378  
 Factor de calidad, 110  
 Factor de escalamiento en tiempo, 436-439  
 475  
 Factor de expansión, 264-266  
 Factores de escala de magnitud, 440-447,  
 476-477  
 Fahrenheit, 595  
 Fan-in (cabezal de entorno), 277, 280  
 Fan-out (cabezal de salida), 277, 280  
 Farad, 108  
 Fenómeno de la atracción de pared, 277-278  
 Filtración, coeficiente de, 228  
 Filtro magnético, 167  
 Filtro neumático, 240  
 Flecha elástica, 464-465  
 Flip-Flop, 278, 292-293  
 analogía eléctrica de un, 292-293  
 Fluidica, 276  
 Fluidica digital, 284  
 Flujo:  
 a través de un orificio, 265-269  
 en tubos, 186-187, 199-200  
 válvulas de control de, 249  
 Flujo aéreo:  
 a través de un orificio, 265-269  
 inercia, 273-274  
 Flujo estable, 187  
 ecuaciones de movimiento de Euler para  
 un, 190  
 Flujo gaseoso por un orificio, 259-269  
 Flujo inestable, 188  
 ecuación del, 197  
 Flujo, línea de, 187  
 Flujo laminar, 186  
 resistencia al, 197  
 Flujo líquido:  
 inercia, 199-200  
 resistencia, 197  
 Flujo, tubo de, 187-189  
 Flujo turbulento, 186  
 resistencia del, 198  
 Fórmula de Euler, 28  
 Fórmula de Hagen-Poiseuille, 197-198, 217  
 Frecuencia, 30, 374-375  
 natural, 30  
 natural amortiguada, 375  
 natural no amortiguada, 30, 374  
 Frecuencia natural, 30, 374-375  
 amortiguada, 375

no amortiguada, 30, 374  
 Freno, 72, 97  
 Freno de Prony, 88  
 Fricción:  
 cinética, 41-42  
 de Coulomb, 41  
 de deslizamiento, 41-42  
 de rodamiento, 44-45  
 en seco, 41  
 estática, 41-43  
 ley cuadrática de, 24  
 lineal, 24  
 no lineal, 24  
 Fricción cinética, 41-42  
 coeficiente de, 42  
 Fricción de deslizamiento, 41-42  
 coeficiente de, 42  
 Fricción de rodamiento, 44-45  
 coeficiente de la, 45  
 Fricción lineal, 24  
 Fricción estática, 39-42  
 coeficiente de la, 42  
 Fricción no lineal, 24-25  
 Fricción viscosa, coeficiente de, 23  
 torsional, 23  
 Fricción viscosa, constante de, 23  
 torsional, 23  
 Fuerza, 12-13  
 Fuerza, campo de, 12  
 Fuerza centrífuga, 410, 462  
 Fuerza centripeta, 410, 463  
 Fuerza-corriente, analogía, 135-136, 156-157  
 Fuerza generalizada, 605-606  
 Fuerza normal, 42  
 Fuerza-voltaje, analogía, 135, 153-154  
 Fuerzas de contacto, 12  
 Función compleja, 325  
 Función de disipación, 603  
 Función de disipación de Rayleigh, 603-606  
 Función delta de Dirac, 324  
 Función de transferencia, 389-398  
 de elementos en serie con carga, 395-396  
 de elementos en serie sin carga, 394-396  
 senoidal, 402  
 Función de transferencia de malla abierta,  
 499  
 Función de transferencia prealimentada,  
 499  
 Función de transferencia sinoidal, 402  
 Función escalón, transformada de Laplace  
 de la, 327  
 Función escalón unitario, transformada de  
 Laplace de la, 328  
 Función impulso, 334-335  
 transformada de Laplace de la, 330  
 Función impulso unitario, 334  
 Función lógica, 284  
 Función periódica, 354-355  
 Función pulso, transformada de Laplace de  
 la, 330  
 Función rampa, transformada de Laplace  
 de la, 328

Función trasladada, transformada de Laplace de la, 329

Funciones lógicas básicas, 285

## G

Ganancia proporcional, 511

Gas perfecto, 254-258  
cambios de estado para un 257-258  
ley del, 255

Gases, constante de los, 254, 255, 304-305  
del aire, 253, 255  
universal, 255, 304-305

Gases, constante de los, 255, 304-305  
en unidades BES, 305  
en unidades SI, 305

Gases, propiedades termodinámicas de los, 253-257

Goldman, S., 349

Grados de libertad, 35

Gravedad específica, 182

Guillemin, E. A., 137

## H

Hagen-Poiseuille, fórmula de, 197-198, 217

Hamilton, principio de, 597

Healy, M., 555

Henry, 110

Henke, R. W., 210, 299

Hertz, 30

Higdon, D. T., 555

Hohmann, C. J., 210

Houpis, C. J., 137

## I

Impedancia compleja, 392-393, 457, 459-460

Impedancia fluidica, 277

Inductancia, 109-110, 132, 194, 199

Inductores, 126, 131-132  
energía almacenada en los, 131-132

Inercia, 20, 194, 199

Inertancia, 194, 199-200, 273-274

del flujo del aire, 274

del flujo de un líquido, 199-200

Ingeniería, especificaciones de, 6

INHIBIDOR, 286

Integrador, 430-432

Integral de Laplace, 326

Inversor, 289

Inversor de signo, 427-429

## J

Jakolski, E. P., 299

Joule, 129, 133, 254

Junta de codillo, 314-315

Kaplan, W., 349  
Kcal, 133, 254, 594

Kelvin, 586, 588, 595

Kilocaloría, 254

Kilogramo, 586, 588

fuerza, 12

masa, 12

Kilopascal, 165

Kilowatt-hora, 133

Kirchhoff, ley de corriente de (ley de nodos), 114, 119

Kirchhoff, ley de voltajes de (ley de mallas), 114, 121

## L

Lagrange, ecuación de movimiento de, 576-586

Lagrangiano, 597

La Joy, M. H., 556

Laplace, integral de, 326

Laplace, transformación inversa de, 326, 342-347

Laplace, transformada de, 326-342

de la función escalón, 327

de la función exponencial, 237

de la función impulso, 334

de la función pulso, 330

de la función rampa, 328

de la función senoidal, 328

de la función trasladada, 329

de la onda cuadrada, 355

de una función escalón unitario, 328

existencia de la, 326

pares, 331-332

propiedades de la, 333

Le Page, W. R., 349

Ley asociativa, 286

Ley conmutativa, 286

Ley cuadrática de fricción, 24-25

Ley de adición de De Morgan, 291

Ley de conservación de la energía, 57, 90-92

Ley de conservación del momento, 383-385

Ley de conservación del momento angular, 384

Ley de corrientes de Kirchhoff (ley de nodos), 114, 109

Ley de multiplicación de De Morgan, 292

Ley de Newton, primera, 18

Ley de Newton, segunda, 19

Ley de Newton, tercera, 19

Ley de Ohm, 111

Ley de Pascal, 229-230

Ley de la termodinámica, primera, 256

Ley de voltajes de Kirchhoff (ley de mallas), 115, 121, 141

Ley distributiva, 186

Libra, 13

fuerza, 12  
 masa, 12  
 Lógica matemática, 285-288  
   identidades básicas, 286-288  
   leyes básicas, 286  
 Longitud, tabla de conversiones para la, 591  
 Lubricador, 240

## M

Malla abierta, control de, 496  
 Malla abierta, función de transferencia de, 499  
 Malla abierta, sistema de control de, 496  
 Malla cerrada, función de transferencia de, 500  
 Manómetro en forma de U, 98  
 Masa, 12, 590  
   tabla de conversión para, 590  
 Masa-capacitancia, analogía, 136  
 Masa densidad de, 181  
 Masa-inductancia, analogía, 135  
 Masa, principio de conservación de la, 188-189  
 Masa-resorte-polea, 77, 90-91  
 Masa-resorte, sistema, 26-31, 93-94, 371-373, 399-402, 465-466  
 Mecánica-eléctrica, analogía, 134-136  
 Medidor de Venturi, 214-215, 231  
 Medio sumador (semisumador), 286  
 Megapascal, 165  
 Merrit, H. E., 210, 556  
 Metacentro, 212  
 Metro, 586, 588  
 Modelado (modelación) experimental, 3  
 Modelado matemático (elaboración de modelos matemáticos), 3-4  
 Modelo matemático, 1, 3  
 Modelos matemáticos linealizados, 203, 206-210, 222, 225-226  
 Módulo de comprensibilidad, 182  
 Módulo de dispersión, 182, 210, 228-229  
 Mole, 586, 588  
 Momento, 18, 384, 456  
 Momento angular, 18, 384  
 Momento angular, ley de conservación del, 384  
 Momento de inercia, 14-17, 30-31  
   determinación experimental del, 30-31  
   de un cilindro homogéneo, 14  
   de un cuerpo plano, 14  
   de un disco homogéneo, 70  
   tabla de, 15  
 Momento de una fuerza, 13  
 Momento, ley de conservación del, 383-385  
 Motor:  
   de aspas, 169  
   de engrane, 169, 175  
   de pistón axial, 169, 174  
   de pistón radial, 169, 174

Motores neumáticos, 244-245  
   de tipo aspa, 244,  
   de tipo pistón, 244  
 Motores de pistones axiales, 169, 173  
 Movimiento armónico simple, 29  
 Movimiento de Lagrange, ecuación de, 596-606  
 Movimiento, transformadores de, 61  
 Murphy, A. T., 69  
 Murray, J. F., 210

## N

Newton, 12  
 Newton, primera ley de, 18  
 Newton, segunda ley de, 19  
 Newton, tercera ley de, 19  
 Nodo, 115  
   ecuaciones de, 156  
   método de, 119  
 NOR, elementos, 291, 294-297  
 Número de Reynolds, 185-186  
 Números complejos, 320  
   división de, 324  
   forma polar de los, 321, 322  
   forma rectangular de los, 321, 322  
   igualdad de los, 322  
   multiplicación de los, 323-324  
   potencia de los, 325  
   raíces de los, 325  
   sustracción de los, 323

## O

Ogata, K., 210, 349, 556  
 Ohm, 107  
 Ohm, ley de, 110  
 Orden exponencial, 326  
 Orificio, 196  
   afilado, 196  
   de borde, 196  
   de placa delgada, 196  
 OR INCLUSIVA, 285  
 OR EXCLUSIVA, 285  
 Oxidación de un líquido hidráulico, 184

## P

Palanca, 61, 78  
 Par de fuerzas, 44  
 Pascal, 165  
 Pasc, ley de, 229-230  
 Péndulo, 97, 102, 599  
   cónico, 462  
   con resorte, 451-452, 599-600  
   doble, 600-602  
   en movimiento, 484, 602, 603  
 Péndulo invertido, 551-555  
   sistemas de control del, 551-556

- Péndulo simple, 75, 599  
 Periodo, 30  
 Perno, 170  
 Perturbación, 494  
 Peso, 12  
 Peso específico, 182  
 Pistón axial, bomba de, 169-170  
 Pistón radial, bomba de, 169-170  
 Pistones axiales, motores de, 169-174  
 Pistones radiales, motores de, 169-174  
 Planta, 494  
 Poise, 183  
 Polipasto, 63-64, 65  
 Polipasto, 63-65, 94, 103  
   de cadena, 63-65  
   de cuatro poleas, 63-64  
   de dos poleas, 63-64, 94  
   de seis poleas, 300-301  
   neumático de tres poleas, 245-246  
 Polo doble, 326  
 Polo múltiple, 325, 403  
 Polo simple, 325  
 Polos, 325  
 Posición, control de, 551  
 Potencia, 50, 55, 231  
   consumida, 151-152, 163  
   disipada por resistores, 132, 163  
   factor de, 109  
   instantánea, 130  
   promedio, 55  
   tabla de conversión para la, 594  
   transformadores de, 61  
   unidades de, 55  
 Potencial, 196  
   energía, 52-53, 88, 90, 91  
 Potenciómetro, 433  
 Poundal, 13  
 Prefiltro tipo proporcional-derivativo, 550  
 Presión, 165  
   absoluta, 165  
   barométrica, 165  
   excesiva, 178  
   pulsaciones de, 240  
   tabla de conversión para, 593  
   unidades de la, 164-165  
   válvula de control para la, 246-249  
 Presión atmosférica estándar, 182  
 Presión, calibrador de, 165  
 Presión de agrietamiento, 261-262  
 Presión estándar, 253  
 Primera ley de la termodinámica, 256  
 Primera ley de Newton, 18  
 Primera variación, 598  
 Principio de conservación de la masa, 188-189  
 Principio de d'Alambert, 48-50  
 Principio de Hamilton, 597  
 Principio de superposición, 2  
 Proceso irreversible, 257  
 Proceso reversible, 256  
 Preny, freno de, 88  
 Propiedades termodinámicas de los gases, 253-258  
 Prototipo, 6  
 Puente de Wheatstone, 124-125, 151, 161-162  
 Punto de bifurcación, 499  
 Punto de suma, 498
- ## R
- Radián, 586, 588  
 Radio de giro, 16  
 Rapidez, 18  
 Rapidez crítica, 464-465  
 Rayleigh, función de disipación, 603-606  
 Razón de flujo de la filtración, 228  
 Razón de flujo de la masa, 261-264  
   ecuaciones para el aire, 265-268  
 Razón máxima de flujo de masa, 262-263  
 Realimentación fisiológica, 495  
 Red, 119  
 Regulador (gobernador), 574-576  
 Relevador:  
   de acción de reversa, 514  
   neumático, 514-515  
   neumático, con descarga atmosférica, 514-515  
   din descarga atmosférica, 514-515  
 Relevador de acción reversa, 514  
 Relevador neumático, 514-515  
   del tipo de descarga atmosférica, 514-515  
   del tipo sin descarga atmosférica, 514-515  
 Relevador neumático con descarga a la atmósfera, 514-515  
 Residuo, 344  
 Resistencia, 107, 130, 195-198, 266-271  
   combinada, 139-140, 163  
   flujo laminar, 197  
   flujo líquido, 197  
   flujo turbulento, 198  
   promedio, 217-219, 305  
 Resistencia mecánica, 23  
 Resistencia térmica, 366-367  
 Resistores:  
   en serie y paralelo, 110-113  
   potencia disipada en los, 132-133, 163  
 Resorte, 20  
   ideal, 22  
 Resorte constante del, 21  
   equivalente de la, 73-75, 97  
   torsional, 21  
 Resorte, constante equivalente del, 73-75, 76, 97  
 Resorte lineal, 21  
 Resorte no lineal, 21  
 Respiradero, 277  
 Respuesta al escalón:  
   de un sistema de segundo orden, 379-382  
   de un sistema eléctrico, 379-381  
   sistema mecánico, 381-382  
   sistema de primer orden, 367-369  
 Respuesta a la frecuencia, 398-409

Respuesta al impulso, 383, 385-389  
     de un sistema mecánico, 385-389  
 Respuesta de estado permanente, 366  
 Respuesta forzada, 24, 364  
 Respuesta libre, 24, 364  
 Respuesta rampa:  
     de un sistema de primer orden, 369  
     error de estado permanente, 547-549  
 Respuesta rampa unitaria, 569-570  
 Respuesta transitoria, 364  
     especificaciones, 535-545  
 Reswick, J. B., 68, 137  
 Reynolds, número de, 185-186  
 Richardson, H. H., 69  
 Rotació desbalanceada, 411  
     vibración debida a la, 411-413

**S**

Seely, S., 68, 137  
 Segunda ley de Newton, 19  
 Señal de error del actuador, 495  
 Señales de prueba, 363  
 Series de Taylor, 205-206, 222-224, 598  
 Servo sistema hidráulico, 206-210, 224,  
     226-229, 579-580  
     Servomecanismo, 538-539  
 Servomotor hidráulico, 523-524  
 Servoválvula de dos etapas, 177  
 Shearer, J. L., 69  
 SI, 585-589  
 Siemens, 108  
 Simulación por computadora analógica, 447  
 Síntesis, 5  
 Sismógrafo, 419-420  
 Sistema, 1  
     análisis de un, 5  
     dinámico, 1  
     diseño de un, 5  
     estático, 1  
 Sistema absoluto de unidades, 9, 585  
 Sistema críticamente amortiguado, 32, 376  
     respuesta de un, 376  
 Sistema de control de elevación de un  
     avión, 578  
 Sistema de control de malla abierta, 496  
 Sistema de control de malla cerrada, 495-496  
 Sistema de control de nivel de líquido,  
     510-511, 528-532  
 Sistema de control de velocidad, 583  
 Sistema de control fluidico, 276  
 Sistema de control realimentario, 495  
 Sistema de masa colgante, 100, 103  
 Sistema de  $n$  grados de libertad, 41  
 Sistema de nivel de líquido, 195, 197,  
     201-205, 215-222, 231-233  
 Sistema de orden  $n$ , 390  
 Sistemas de presión neumática, 267-268,  
     274-275, 305-306, 316-317, 558-559  
 Sistema de primer orden, 25

    análisis de respuesta transitoria de un,  
         365-371  
     control proporcional de una, 528-531  
     respuesta a la rampa de un, 369  
     respuesta de escalón de un, 367-369  
 Sistema de segundo orden, 27, 371-389  
     análisis de la respuesta transitoria de un,  
         371-389  
     respuesta al escalón de un, 379-382  
 Sistemas de suspensión del automóvil, 417  
 Sistema de trazo hidráulico, 580  
 Sistema de unidades, 8-9, 584-589  
     absoluto, 585  
     cgs, 585  
     gravitacional, 585  
     inglés, 9  
     inglés de ingeniería, 585  
     internacional, 585-589  
     métrico de ingeniería, 585  
     mks, 585  
 Sistema dinámico, 1  
 Sistema estático, 1  
 Sistema gravitacional de unidades, 9, 585  
 Sistema híbrido, 252  
 Sistema inglés de unidades, 9  
 Sistema inglés de unidades de ingeniería, 9,  
     585-589  
 Sistema masa-resorte amortiguador, 31-35,  
     371-379, 391, 582-583, 604  
 Sistema masa-resorte-polea, 77, 90-91  
 Sistema LRC, 380-381, 437-438, 605  
 Sistema mecánico rotatorio, 455  
 Sistema métrico de unidades de ingeniería,  
     9, 585  
 Sistema no conservativo, 603-605  
 Sistema no lineal, 3, 205-210  
 Sistema pasivo, 57  
 Sistema resorte-polea, 76  
 Sistema rotacional, 25-26  
 Sistema sobrearmortiguado, 32  
     vibración libre del, 375-376  
 Sistema subarmortiguado, 32  
     vibración libre del, 374-375  
 Sistema térmico, 365-369, 487  
     elaboración de un modelo matemático de,  
         un, 365-367  
 Sistema termómetro, 365-369, 581  
 Sistemas análogos, 133-136, 397-398  
 Sistemas con dos grados de libertad, 38-40,  
     473-476, 600-603, 606  
 Sistemas conservativos, 57-60, 597-603  
     ecuaciones de movimiento de Lagrange  
         para, 597-603  
 Sistemas de control de posición, 538-539,  
     544-550, 583  
     con realimentación de la velocidad,  
         544-546  
 Sistemas de unidades, 8-9, 584-589  
 Sistemas hidráulicos, 165-181  
     ventajas y desventajas de los, 178-179  
 Sistemas lineales, 2  
 Sistemas neumáticos, 235-238, 252-253,

269-274, 299-300, 314-315  
 comparación entre los sistemas hidráulicos y los, 237  
 desventajas de los, 253  
 sistema eléctrico análogo para, 275  
 ventajas de los, 252  
 Slug, 12  
 Smith, R. J., 137  
 Sobrepasso:  
 máximo, 536-537  
 máximo porcentual, 537, 543  
 Solución homogénea, 364  
 Solución particular, 364  
 Sonido, 303  
 Stoke, 303  
 Streeter, V. L., 210  
 Sumadores, 429-430  
 Superposición, principio de, 2

## T

Tabla de conversión, 11, 590-595  
 para áreas, 592  
 para energía, 594  
 para longitud, 591  
 para masa, 590  
 para potencias, 594  
 para presión, 593  
 para temperatura, 595  
 para volumen, 592  
 Tabla de verdad, 287  
 Tacómetro de cd, 544  
 Tacómetro de realimentación, 545  
 Taft, C. K., 68, 137  
 Tanque de oscilación, 180, 230-231  
 Taylor, series de, 205-206, 222-224, 598  
 Técnica de linealización, 205-206  
 Temperatura estándar, 253  
 Temperatura, tabla de conversión para, 595  
 Teorema de Euler, 321  
 Teorema de diferenciación, 336-338  
 Teorema de integración, 341-343  
 Teorema del valor final, 338-339, 353  
 Teorema del valor inicial, 340, 357, 387  
 Tercera ley de Newton, 19  
 Termodinámica, primera ley de la, 256  
 Thomas, G. M., 210  
 Tiempo, constante de, 26, 203, 217, 383  
 Tiempo de asentamiento, 365, 536-537, 542  
 Tiempo de retorno o de atraso, 536  
 Tiempo de subida o levantamiento, 536, 540-541  
 Tiempo del pico, 536-537, 541  
 Tiempo derivativo, 512  
 Tiempo, factor de escalamiento en, 436-439, 475  
 Tiempo integral, 512  
 Torca (par), 13  
 Trabajo, 50  
 realizado, 50, 86, 131  
 unidades, 51

Trabajo mecánico, 256  
 Trabajo, control de, 496  
 Transductor eléctrico-neumático, 577  
 Transductor fluidico, 277  
 Transformación de Laplace, 326-342  
 inversa, 326, 342-347  
 Transformadores:  
 de energía, 61  
 de movimiento, 61  
 de potencia, 61  
 Transmisibilidad, 413-418  
 de la fuerza de excitación, 414-417, 489  
 del movimiento, 490  
 del movimiento de excitación, 417-419  
 Tubo capilar, 217-218

## U

Unidad básica, 584  
 Unidad de potencia hidráulica, 212, 231  
 Unidad térmica inglesa, 254  
 Unidades, 8-9, 584-589  
 sistema absoluto de, 585  
 sistema cgs de, 585  
 sistema gravitacional de, 585  
 sistema inglés de, 9  
 sistema inglés de ingeniería de, 585  
 sistema internacional de, 585-589  
 sistema métrico de ingeniería de, 585  
 sistema mks, 585  
 Unidades BES, 285  
 Unidades de potencia hidráulica, 167-178, 212, 231  
 Unidades derivadas, 584  
 Unidades SI, 9-10, 584-589  
 abreviaciones de las, 10  
 prefijos abreviados de las, 10  
 prefijos de las, 10  
 Unidades sistemáticas, 584

## V

Valor final, teorema del, 338-339, 353  
 Valor inicial, teorema del, 340, 357, 387  
 Valor lógico negativo, 285  
 Válvula de alivio, 177-178  
 actuada por piloto, 248  
 de acción directa, 247-248  
 Válvula de carretes deslizantes, 175, 224-227, 249,  
 con traslape, 213-214  
 de cuatro vías, 175, 206-210  
 de tres vías, 176  
 modelo matemático lineal de la, 226  
 sin traslape, 213-214  
 Válvula de control direccional, 249  
 Válvula de piloto de alivio, 248  
 Válvula de piloto neumático de tres puertas  
 251



- Válvula de piloto reductora de presión, 246-247
- Válvula de vaivén, 252
- Válvula reductora de presión, 246-247  
actuada por piloto, 246-247  
de acción directa sin alivio, 246-248
- Válvula de seguridad, 302
- Válvula magnética de acción directa de dos puertas (lumberas), 249-250
- Válvula magnética de acción directa de tres puertas de dos posiciones, 249-250
- Válvula neumática de diafragma, 560
- válvula neumática piloto de tres puertas, 250, 251
- Válvula reductora de presión de acción directa, sin alivio, 246, 247
- Válvulas:
- de aleta, 176-177
  - de alivio, 177-178
  - de corredera, 175, 249
  - de movimiento vertical, 177, 248
  - de retención, 177
  - de tobera (aleta), 176
  - de tubo de inyección, 177
  - hidráulicos de control, 175-177
  - sin traslape, 176
  - traslapada, 176
- Válvulas, coeficientes de, 209
- Válvulas de interfaz, 251-252
- Variable compleja, 325
- Velocidad, 18
- coeficiente de, 193, 196
  - perfil de la, 186
  - realimentación de, 545-546
- Velocidad angular, 18
- absoluta, 18
  - relativa, 18
- Velocidad crítica de un gas, 262-263
- Velocidad del sonido, 263, 303-304, 315
- Vena contracta, 193, 259
- Ventaja mecánica, 62-63, 65
- Ventiladores, 239
- Venturi, medidor de, 214-215, 231
- Vibración
- aislador de la, 413-414
  - aislamiento de la, 409-426
  - debida a una rotación desbalanceada, 411-413
- Vibración libre, 26, 29, 371-382
- de un sistema masa-resorte, 371, 373
  - de un sistema masa-resorte amortiguador, 373, 379
- Viscosidad, 183-184
- cinemática, 183-184, 211
  - dinámica, 183-184, 211
- Viscosidad absoluta, 183
- coeficiente de, 183
- Viscosidad cinemática, 183-184, 211
- del agua, 185
  - unidades BES de la, 183-184, 211
  - unidades cgs de la, 183-184
  - unidades de, 183-184
  - unidades SI de la, 183-184, 211
- Viscosidad dinámica, 183
- coeficiente de, 184
  - del aceite, 211
  - del agua, 185
  - unidades BES de, 183, 211
  - unidades de, 183-184
  - unidades SI de la, 183-184, 211
- Volt, 105
- Voltaje, 105
- fuelle, 106
  - generador, 106
- Voltímetro (vóltmetro) de cd de bobina móvil de d'Arsonval, 147
- Volumen, control de, 188
- Volumen específico, 181
- del aire, 255
- Volumen, tabla de conversión para, 592
- W**
- Walker, J. H., 299
- Watt, 129-130
- Watt-segundo, 133
- Wheatstone, puente de, 124-125, 151, 161
- Wylie, E. B., 210
- Y**
- Yugo escocés, 61-62